Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (1) 1986, S. 71–83

Eine Parallelogrammungleichung zum Exponenten $\gamma \in [1, 2]$ für Normen

A. HOFFMANN

Im Hilbertraum X wird die verallgemeinerte Parallelogrammungleichung zum Exponenten γ

$$\lambda \|x_1\|^\gamma + (1 - \lambda) \|x_2\|^\gamma \leqq \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\|^\gamma + \min \{\lambda, 1 - \lambda\} C(\gamma) \|x_1 - x_2\|^\gamma$$

für beliebige $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, $\gamma \in [1, 2]$ bewiesen und die Konstante $C(\gamma)$ bestimmt. Die Erweiterung dieser Ungleichung auf gewisse normierte Räume ist möglich, erfordert aber Einschränkungen für den Parameter γ.

В гильбертовом пространстве X доказывается обобщенное неравенство параллелограмма с экспонентом γ

$$\lambda \|x_1\|^\gamma + (1 - \lambda) \|x_2\|^\gamma \leqq \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\|^\gamma + \min \{\lambda, 1 - \lambda\} C(\gamma) \|x_1 - x_2\|^\gamma$$

для любых $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, $\gamma \in [1, 2]$ и определяется константа $C(\gamma)$. Распространение этого неравенства на некоторые нормированные пространства возможно, но для этого необходимы ограничения на параметр γ.

For a Hilbert space X the generalized parallelogramm inequality to the exponent γ

$$\lambda \|x_1\|^\gamma + (1 - \lambda) \|x_2\|^\gamma \leqq \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\|^\gamma + \min \{\lambda, 1 - \lambda\} C(\gamma) \|x_1 - x_2\|^\gamma$$

for every $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, $\gamma \in [1, 2]$ is proved and the constant $C(\gamma)$ is determined. The extension of this inequality to certain normed spaces is possible with restrictions of the parameter γ.

1. Zur Problemstellung

In KÖTHE [3: § 26.7] findet man für Banachräume des Typs $\mathcal{L}_p[\Omega, Y]$, $p \geqq 2$, die Parallelogrammungleichung

$$\|x_1 - x_2\|^p + \|x_1 - x_2\|^p \leqq 2^{p-1}(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p) \tag{1.1}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_p[\Omega, Y]$, die für $p = 2$ bekanntlich zur Parallelogrammgleichung wird. ROLEWICZ [5: S. 2/3] betrachtete reellwertige Funktionen, die der verallgemeinerten Jensenschen Ungleichung

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leqq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) + \min \{\lambda, 1 - \lambda\} C \|x_1 - x_2\|^\gamma \tag{1.2}$$

für beliebige x_1, x_2 aus einem normierten Raum X genügen. Dabei ist die Konstante C nur von γ abhängig, und λ kann beliebig aus dem Intervall [0, 1] gewählt werden. Für $\gamma > 2$ folgt aus der Gültigkeit von (1.2) nach ROLEWICZ [5: Th. 3] die Konvexität von f auf X. Wir werden im folgenden zeigen, daß die für $\gamma \in (1, 2]$ nichtlineare konkave Funktion $f(x) := -\|x\|^\gamma$ auf dem Hilbertraum X der Ungleichung (1.2) genügt und damit im Sinne von Rolewicz eine γ-parakonvexe Funktion ist. Es ergibt sich für diese spezielle Funktion aus (1.2) die Parallelogrammungleichung zum Exponenten $\gamma \in [1, 2]$

$$\lambda \|x_1\|^\gamma + (1-\lambda) \|x_2\|^\gamma \leqq \|\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\|^\gamma + \min\{\lambda, 1-\lambda\} C \|x_1 - x_2\|^\gamma. \tag{1.3}$$

In Abhängigkeit von γ bestimmen wir die für (1.3) kleinstmögliche Konstante $C(\gamma)$. Weiterhin erweitern wir die Gültigkeit von (1.3) auch für Normen gewisser Banachräume. Dabei ist es aber erforderlich, den Bereich für γ einzuschränken (Beispiele 1–3). Wir geben in diesem Fall eine Möglichkeit für die Wahl der Konstanten C in Abhängigkeit von γ an, weisen aber ausdrücklich darauf hin, daß dies nicht die kleinstmögliche zu sein braucht.

Der Beweis für die Ungleichung (1.1) benutzt wesentlich die Hölderungleichung zum Exponenten $p \geqq 2$ (vgl. KÖTHE [3: § 26.7]). Für $\lambda = 1/2$ könnte der Beweis der Ungleichung (1.3) völlig analog unter Verwendung einer durch LEINDLER [4: S. 12] bewiesenen konversen Hölderungleichung durchgeführt werden. Das folgende Theorem gibt den von LEINDLER bewiesenen Gültigkeitsbereich dieser konversen Hölderungleichung an:

Theorem: *Seien* $a_k, b_k, c_k \geqq 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $r \geqq 1$, $-\infty < s \leqq +\infty$ *und* $1 \leqq \tau \leqq +\infty$ *mit* $1/r + 1/s = 1 + 1/\tau$ *und*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^\tau\right)^{1/\tau} := \sup_k c_k \quad \textit{für} \quad \tau = +\infty.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^\tau b_{n-k}^\tau\right)^{1/\tau} \geqq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^r\right)^{1/r} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^s\right)^{1/s}. \tag{1.4}$$

Wie aber das folgende Beispiel zeigt, ist das Theorem inkorrekt. Es kann damit zum Beweis von (1.3) nicht herangezogen werden.

Beispiel: Wir wählen

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_k = \begin{cases} u^2 & \text{für } k = 1 \\ v^2 & \text{für } k = 2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei u und v positive Zahlen sind. Die Zahlen r, s und τ $(1 \leqq r < +\infty, 1/2 < s < 1, \tau = 1)$ mögen der Beziehung $1/r + 1/s = 1 + 1/\tau$ genügen. Angenommen, (1.4) ist richtig. Dann folgt hieraus

$$a_k b_{n-k} = \begin{cases} u^2 & \text{für } k = 2, \ n = 3 \\ v^2 & \text{für } k = 2, \ n = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$u^2 + v^2 \geqq 1 \cdot (u^{2s} + v^{2s})^{1/s} = (u^p + v^p)^{2/p} \tag{1.5}$$

mit $p := 2s$. Die Einbettungsungleichung (KÖTHE [3: § 14.8(9)])

$$(|x_1|^{q'} + |x_2|^{q'})^{1/q'} \leqq (|x_1|^q + |x_2|^q)^{1/q}$$

für $q' \geqq q \geqq 1$ liefert mit $|x_1| := |u + v|$, $|x_2| := |u - v|$, $q = 1$ und $q' = 2$ die Ungleichung

$$\left((u + v)^2 + (u - v)^2\right)^{1/2} \leqq |u + v| + |u - v|. \tag{1.6}$$

Die Identität $(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2)$, und die Beziehungen (1.5), (1.6) ergeben

$$|u + v| + |u - v| \geqq (2)^{1/2} (u^p + v^p)^{1/p} \tag{1.7}$$

für beliebige $u, v > 0$, $p \in (1, 2)$. Setzen wir $u = v > 0$, dann folgt unmittelbar aus (1.7) $p \geqq 2$ im Widerspruch zu $p \in (1, 2)$. Da (1.6) richtig ist, ist (1.5) und folglich auch (1.4) inkorrekt.

2. Ergebnisse

Es werden zunächst für die Gültigkeit der Ungleichung (1.3) in Hilberträumen Formeln und Eigenschaften für die kleinstmögliche Konstante C in Abhängigkeit von γ angegeben.

Satz 1: *Sei X ein reeller Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $\gamma \in [1, 2]$ ein kleinstes $C(\gamma) \in [1, 2]$ derart, daß die Parallelogrammungleichung* (1.3) *für beliebige $x_1, x_2 \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ erfüllt ist. Es gilt*

$$C(\gamma) = \sup_{\xi \in [0,1]} \frac{(\gamma - 1)\, \xi^\gamma + \gamma \xi^{\gamma-1} + 1}{(1 + \xi)^\gamma}. \tag{2.1}$$

Satz 2: *Sei $C(\gamma)$ die Konstante aus Satz* 1.

1. *Es ist*

$$C(\gamma) = \begin{cases} 2 & \text{für } \gamma = 1 \\ \dfrac{(\gamma - 1)\, a(\gamma)^\gamma + a(\gamma)^{\gamma-1} + 1}{(1 + a(\gamma))^\gamma} & \text{für } 1 < \gamma < 2 \\ 1 & \text{für } \gamma = 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

wobei $a(\gamma)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$(\gamma - 2)\, \xi + (\gamma - 1) = \xi^{2-\gamma} \tag{2.3}$$

ist.

2. *Die Funktion $C(\cdot)\colon [1, 2] \to [1, 2]$ ist stetig und streng monoton fallend und auf $(1, 2)$ beliebig oft differenzierbar.*

3. *Es gelten die Abschätzungen*

$$2^{1-\gamma} \leqq C(\gamma) \leqq 2^{2-\gamma}. \tag{2.4}$$

Bemerkung 1: Für $\gamma = 2$ gilt bekanntlich die Identität

$$\lambda \|y_1\|^2 + (1 - \lambda) \|x_2\|^2 = \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\|^2 + \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2$$

für beliebige $x_1, x_2 \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$. Setzt man in ihr $\lambda = 1/2$, so erhält man die bekannte Parallelogrammgleichung für Normen in Hilberträumen. Diese Beziehung motivierte die Bezeichnung „Parallelogrammungleichung" für (1.3).

Bemerkung 2: Durch Lösen der Gleichung (2.3) nach dem Newtonverfahren erhält man die folgenden Näherungswerte für $C(\gamma)$, $\gamma = 1(1/10)\,2$ (vgl. Abb. 1):

γ	$C(\gamma)$	γ	$C(\gamma)$	γ	$C(\gamma)$	γ	$C(\gamma)$
1,0	2,00000	1,1	1,72446	1,2	1,56471	1,3	1,43190
1,4	1,36534	1,5	1,29891	1,6	1,23382	1,7	1,17092
1,8	1,11077	1,9	1,05384	2,0	1,00000		

Bemerkung 3: In der Abbildung 1 sind die Beziehungen in (2.4) grafisch dargestellt.

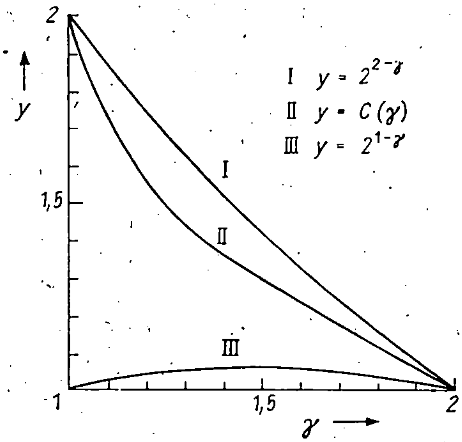

Abb. 1

Die nächsten zwei Aussagen erlauben eine Erweiterung der Aussage von Satz 1 auf spezielle Banachräume.

Satz 3: *Seien X ein reeller Banachraum und X' der Raum der stetigen reellen linearen Funktionale über X. Wenn die Ungleichung* (1.3) *zum Exponenten p, $p \in [1, 2]$ fest, mit der Konstanten C_p erfüllt ist, dann gilt die Ungleichung* (1.3) *auch für jeden Exponenten $\gamma \in [1, p]$ mit der Konstanten*

$$C_p(\gamma) := (C_p)^{\gamma/p} \sup_{\xi \in [0,1]} \frac{(\gamma - 1)\,\xi^\gamma + \gamma \xi^{\gamma-1} + 1}{[(p-1)\,\xi^p + p\xi^{p-1} + 1]^{\gamma/p}}. \tag{2.5}$$

Der folgende Satz gibt Konstruktionen an, mit denen man über Satz 1 und Satz 2 die Prämisse in Satz 3 für spezielle Typen von Banachräumen erfüllen kann.

Satz 4: *Sei der Exponent γ aus dem Intervall* $[1, 2]$.

1. *Seien $(X_i, \|\cdot\|_i)$ Banachräume und b_i positive Zahlen für $i = 1, 2, \ldots, n$. Wenn die Ungleichung* (1.3) *für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ auf X_i durch die Norm $\|\cdot\|_i$ zum Exponenten γ mit der Konstanten C_i erfüllt ist, dann gilt die Ungleichung* (1.3) *auf dem Produktraum $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ mit der Norm*

$$|||x|||_\gamma := \left[\sum_{i=1}^{n} b_i (\|x_i\|)^\gamma\right]^{1/\gamma}$$

zum gleichen Exponenten γ mit der Konstanten $\sup_i C_i$.

2. *Seien* $(X_0, \|\cdot\|_0)$ *ein Banachraum,* (Ω, B_R, μ) *ein Maßraum mit finitem Maß* μ *über der Borelalgebra* B_R *von Mengen aus* Ω, f *eine Abbildung von* Ω *in* X_0 *und* b *ein positives Funktional über* Ω *derart, daß die Norm von* f *zum Exponenten* γ *über* Ω *integrierbar und das Funktional* b *meßbar und bez. des Maßes* μ *fast überall beschränkt ist. Wenn die Ungleichung* (1.3) *durch die Norm* $\|\cdot\|_0$ *zum Exponenten* γ *mit der Konstanten* C_0 *erfüllt wird, dann gilt die Ungleichung* (1.3) *auf dem mit der Norm*

$$|||f||| := \left(\int_\Omega b(z)\,\|f(z)\|^\gamma\,dz\right)^{1/\gamma}$$

versehenen linearen Raum $L_\gamma(\Omega, X^0)$ *mit der Norm* $|||\cdot|||$ *zum gleichen Exponenten* γ *mit der gleichen Konstanten* C_0.

3. *Seien* Z *ein linearer Raum,* $(X_0, \|\cdot\|_0)$ *ein Banachraum und* L *ein linearer Operator von* Z *in* X_0. *Wenn die Ungleichung* (1.3) *durch die Norm* $\|\cdot\|_0$ *zum Exponenten* γ *mit der Konstanten* C_0 *erfüllt wird, dann erfüllt die auf* Z *definierte Halbnorm*

$$\|z\|_L := \|Lz\|_0$$

die Ungleichung (1.3) *zum gleichen Exponenten* γ *mit der gleichen Konstanten* C_0.

Bemerkung 4: Die Voraussetzungen in Satz 4 bez. der Gültigkeit der Ungleichung (1.3) sind nach Satz 1 für jeden Exponenten $\gamma \in [1, 2]$ erfüllt, wenn die linearen Räume $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ Hilberträume (nicht notwendig vom gleichen Typ) sind. Insbesondere ist dies der Fall, wenn $X_i = \mathbf{R}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ gilt. Wir erhalten damit die Gültigkeit der Ungleichung (1.3) zum gleichen Exponenten γ laut Satz 4 für die l-Norm des $\mathbf{R}^n$, für die Norm des Banachraumes $L_\gamma(\Omega, \mathbf{R})$ und für gewisse Typen von Sobolewräumen entsprechend der Auswahl des Differentialoperators L.

Bemerkung 5: Nach Satz 3 folgt aus Bemerkung 4, daß die Ungleichung (1.3) für einige Banachräume vom $L_{\gamma'}$-Typ mit $\gamma' \in [1, \gamma]$ und entsprechende Typen von Sobolewräumen zum Exponenten γ' erfüllt ist.

Bemerkung 6: Offen ist, ob die Ungleichung (1.3) auch für Banachräume des Typs L_p für $p \in (2, \infty]$ und gewisse Exponenten $\gamma \in (1, 2]$ gilt (vgl. Bemerkung 9 nach Beispiel 4).

Satz 5: *Sei* X *ein beliebiger normierter Raum. Dann gilt die Ungleichung* (1.3) *zum Exponenten* $\gamma = 1$ *mit der Konstanten* $C = 2$.

Im folgenden geben wir einige Beispiele im $\mathbf{R}^2$, versehen mit der l_p-Norm für $p \in [1, +\infty]$. Zur Auswertung dieser Beispiele benötigen wir den folgenden Satz, der zur Ungleichung (1.3), eingeschränkt auf $X \setminus \{0\}$, ein von λ unabhängiges äquivalentes Ungleichungssystem angibt. Wir zeigen in den Beispielen, daß bei der Verwendung von l_p-Normen, $p \neq 2$, die Beziehung (1.3) nicht mehr für jeden Exponenten $\gamma \in [1, 2]$ gültig ist.

Satz 6: *Seien* $\gamma \in [1, 2]$ *und* X *ein Banachraum. Die Ungleichung* (1.3) *ist genau dann für alle* $x_1, x_2 \in X \setminus \{0\}$ *und* $\lambda \in [0, 1]$ *erfüllt, wenn es ein von* x_1, x_2 *und* γ *abhängiges Element* $x_2^* \in x'$ *mit*

$$\|x_2^*\| = 1, \qquad \langle x_2^*, x_2\rangle = \|x_2\|$$

und ein $C(\gamma)$ derart gibt, daß die beiden Ungleichungen

$$\frac{(\gamma - 1)\,\xi^\gamma - \gamma\langle x_2^*, x_1/\|x_1\|\rangle\,\xi^{\gamma-1} + 1}{(\|x_1 - x_2\|/\|x_1\|)^\gamma} \leqq C(\gamma) < +\infty, \qquad \xi := \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|}, \tag{2.6}$$

$$\frac{(\gamma - 1) - \gamma\langle x_2^*, x_1/\|x_1\|\rangle\,\eta + \eta^\gamma}{(\|x_1 - x_2\|/\|x_2\|)^\gamma} \leqq C(\gamma) < +\infty, \qquad \eta := \frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}, \tag{2.7}$$

für alle $\xi, \eta \in [0, 1)$ gelten. Die Konstanten $C(\gamma)$ in (2.6), (2.7) und (1.3) stimmen überein.

Beispiel 1: Sei $X = \mathbf{R}^2$ versehen mit der l_∞-Norm $\|x\|_\infty := \max\{|x^1|, |x^2|\}$, $x := (x^1, x^2)$. Wir betrachten für $t \in [1/2, 1]$ die speziellen Punktfamilien $x_1(t) := (1, t)$, $x_2(t) := (t, 1)$. Es gilt $\|x_1(t)\|_\infty = \|x_2(t)\|_\infty = 1 = \xi = \eta$, und es folgt $\|x_1 - x_2\|_\infty/\|x_2\|_\infty = 1 - t$. Wir berechnen $x_2^* = \big(u(t), v(t)\big)$ so, daß $\|x_2^*\|_1 = |u| + |v| = 1$ und $\langle x_2^*, x_2\rangle = tu + v = 1$ gilt. Man erhält die eindeutig bertimmte Lösung $x_2^* = (0, 1)$ und damit $\langle x_2^*, x_1\rangle = t$. Über (2.6) und (2.7) folgt für $\gamma > 1$ die Ungleichung

$$C(\gamma) \geqq \lim_{t\to 1-0} \frac{\gamma(1-t)}{(1-t)^\gamma} = +\infty.$$

Beispiel 2: Sei $X = \mathbf{R}^2$ versehen mit der l_1-Norm $\|x\|_1 := |x^1| + |x^2|$. Wir betrachten nun für $t \in [1/2, 1]$ die Punktfamilien $x_1(t) := (1 - t, t)$ und $x_2(t) := (t - 1, t)$. Es folgt offenbar $\|x_1(t)\|_1 = \|x_2(t)\|_1 = 1$ und $\|x_1 - x_2\|_1/\|x_1\|_1 = \|x_1 - x_2\|_1/\|x_2\|_1 = 2(1 - t)$. Für $x_2^*(t)$ folgt $\|x_2^*(t)\|_\infty = \max\{|u(t)|, |v(t)|\} = \langle x_2^*, x_2\rangle = (t - 1)\,u(t) + tv(t) = 1$. Es ist $x_2^*(t) = (-1, 1)$ die einzige Lösung. Es folgt $\langle x_2^*, x_1\rangle = 2t - 1$ und damit über (2.6) und (2.7) für $\gamma > 1$ die Ungleichung

$$C(\gamma) \geqq \lim_{t\to 1-0} \frac{2\gamma(1-t)}{2^\gamma(1-t)^\gamma} = +\infty.$$

Bemerkung 7: Zusammen mit Satz 5 folgt, daß für Normen vom Typ L_∞, l_∞ und L_1, l_1 die Ungleichung (1.3) nur zum Exponenten $\gamma = 1$ gilt.

Beispiel 3: Sei $X = \mathbf{R}^2$ versehen mit der l_p-Norm $\|x\|_p := (|x^1|^p + |x^2|^p)^{1/p}$ und der l_q-Norm für x_2^*, wobei $1/q + 1/p = 1$ ist. Seien weiter $1 < p < 2$, $\gamma > p$, $t \in [0, 1/2]$ und $x_1(t) := (t, s)$, $x_2 := (-t, s)$ mit $t^p + s^p = 1$, d. h. $\|x_1(t)\|_p = \|x_2(t)\|_p = 1$. Es folgt $\|x_1 - x_2\|_p/\|x_1\|_p = \|x_1 - x_2\|_p/\|x_1\|_p = 2t$. Wir berechnen $x_2^*(t)$ aus

$$\langle x_2^*, x_2\rangle = -tu + sv = 1 \quad\text{und}\quad (\|x_2^*\|_q)^q = |u|^{p/(p-1)} + |v|^{p/(p-1)} = 1.$$

Es folgt

$$v = \frac{1 + tu}{s} = (1 + tu)/(1 - t^p)^{1/p}$$

und

$$|u|^{p/(p-1)} + |1 + tu|^{p/(p-1)}\,|1 - t^p|^{1/(p-1)} = 1.$$

Hieraus ergeben sich die eindeutig bestimmten Lösungen $u = -t^{p-1}$ und $v = s^{p-1}$. Über (2.6) und (2.7) erhalten wir die Ungleichung

$$C(\gamma) \geqq \lim_{t\to +0} \frac{2t^p}{t^\gamma} = +\infty.$$

Bemerkung 8: Beispiel 3 zeigt zusammen mit Satz 4 und Satz 1, daß bei Normen vom L_p,l_p-Typ die Ungleichung (1.3) höchstens zum Exponenten $\gamma \in [1, p]$, $p \leqq 2$ erfüllt ist.

Beispiel 4: Sei $X = \mathbf{R}^2$ versehen mit der l_p-Norm, $p > 2$. Wir betrachten die Familien $x_1 = t(1, s)$, $x_2 + t(s, 1)$; $t^p(1 + s^p) = 1$, wobei t von s abhängt. Wir untersuchen den Grenzwert des Quotienten in (2.6) für $s \to 1-0$, d. h. $t \to (1/2)^{2/p}$. Mit $x_2^* = (u, v)$ folgt

$$\langle x_2^*, x_2\rangle = t(su + v), \quad (\|x_2^*\|_q)^q = |u|^{p/(p-1)} + |v|^{p/(p-1)} = 1.$$

Für u und v folgt hieraus $u = t^{p-1}s^{p-1}$ und $v = t^{p-1}$. Dies liefert

$$\|x_1 - x_2\|_p = 2^{1/p}t(1 - s), \qquad \langle x_2^*, x_1\rangle = t(u + sv) = t^p s^{p-1} + t^p s.$$

Für $\gamma = 2$ folgt aus (2.6)

$$C(2) \geqq \lim_{s\to 1-0} \frac{2\big(1 - t^p(s^{p-1} + s)\big)}{2^{2/p}t^2(1 - s)^2} = \lim_{s\to 1-0} \frac{2\big(1 - (s^{p-1} + s)/(1 + s^p)\big)}{t^2 2^{2/p}(1 - s)^2}$$

$$= \lim_{s\to 1-0} \frac{2(1 - s^p - s^{p-1} - s)}{(1 - s)^2 (1 + s^p)} = p - 1.$$

Bemerkung 9: Beispiel 4 zeigt, daß die Konstante $C(\gamma)$ für Banachräume vom Typ L_p, $p > 2$, für $\gamma > 1$ nicht mehr durch die Zahl 2 nach oben beschränkt ist. Beispiel 4 liefert zum Exponenten $\gamma = 2$ die untere Abschätzung $C(2) \geqq p - 1$ und damit $\lim\limits_{p\to+\infty} C(2) = +\infty$.

Bemerkung 10: Sei $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle\colon X \times X \to \mathbf{R}$ das Skalarprodukt auf dem Hilbertraum X. Dann ist die Ungleichung (1.3) auf der Menge aller (x_1, x_2) mit $\langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle \geqq 0$ zum Exponenten $\gamma \in [1, 2)$ nicht erfüllbar, wenn C gleich Eins gesetzt wird. In Bemerkung 2 zu Abschnitt 3 bringen wir ein Beispiel dazu.

3. Beweise

Wir beweisen zunächst mit Mitteln der konvexen Analysis den Satz 6. Dazu sei die folgende Aussage aus dieser Theorie vorangestellt.

Lemma 3.1: *Sei $\psi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ eine konvexe, streng monoton wachsende und für $t > 0$ stetig differenzierbare Funktion. Seien X, Z Banachräume, $T\colon Z \to X$ ein stetiger linearer Operator, $T^*\colon X' \to Z'$ der zugehörige adjungierte Operator, $f\colon X \to \mathbf{R}_+$ eine konvexe und stetige Abbildung und $g\colon Z \to \mathbf{R}$ die Komposition*

$$g(z) := \psi\big(f(x_0 + Tz)\big), \qquad z \in Z, \qquad x_0 \in X.$$

Wenn $g(z_0) \neq 0$ ist, dann gilt für das Subdifferential an der Stelle z_0 für die Abbildung g die Formel

$$\partial g(z_0) = \frac{d}{dt}\,\psi(t)|_{t=f(x_0+Tz_0)}\, T^*\, \partial f(x)|_{x=x_0+Tz_0}. \tag{3.1}$$

Folgerung 3.1: *Sei $\varphi(\lambda) := -\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\|^\gamma$ mit $x_1, x_2 \in X$, $\gamma > 0$ für $\lambda \in \mathbf{R}$ definiert. Dann folgt über Lemma 3.1 aus (3.1) für $x_2 \neq 0$ die Formel*

$$\partial\varphi(0) = \{-\gamma\, \|x_2\|^{\gamma-1}\, (\langle x_2^*, x_1\rangle - \|x_2\|) \mid \|x_2^*\| = 1, \|x_2\| = \langle x_2^*, x_2\rangle\} \tag{3.2}$$

und für $x_2 = 0$, $\gamma > 1$

$$\partial\varphi(0) = \{0\}.$$

Der Beweis von Lemma 3.1 folgt leicht aus IOFFE und TICHOMIROV [2: S. 210/213 und § 0.3]. Mit $\psi(t) := t^\gamma$, $\lambda \in Z := \mathbf{R}$, $x_0 := x_2$, $T\lambda := \lambda(x_1 - x_2)$, $T^*x^* := \langle x^*, x_1 - x_2\rangle$, $f(x) := \|x\|$ ergibt sich aus (3.1) die Folgerung 3.1 ∎

Beweis von Satz 6: (1.3) ist identisch mit der Ungleichung

$$l(\lambda) := -\|x_2 + \lambda(x_1 - x_2)\|^\gamma + \|x_2\|^\gamma + \lambda(\|x_1\|^\gamma - \|x_2\|^\gamma)$$
$$\leqq \min\{\lambda, 1 - \lambda\} C \|x_1 - x_2\|^\gamma =: r(\lambda).$$

Die Abbildung l ist auf $[0, 1/2]$ konkav, und r ist auf $[0, 1/2]$ linear. Weiter gilt $l(0) = r(0) = 0$. Damit ist (1.3) auf $[0, 1/2]$ genau dann erfüllt, wenn $-C\|x_1 - x_2\|^\gamma$ Subgradient von $-l$ an der Stelle $\lambda = 0$ ist. Aus Symmetriegründen gilt dies auch für $\lambda \in [1/2, 1]$. Aus Lemma 3.1 (Formel (3.1)) folgt für $x_2 \neq 0$, daß die Erfüllung der Ungleichung

$$\frac{-\gamma\|x_2\|^{\gamma-1}(\langle x_2^*, x_1\rangle - \|x_2\|) + \|x_1\|^\gamma - \|x_2\|^\gamma}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqq C \tag{3.3}$$

hinreichend und notwendig für $l(\lambda) \leqq r(\lambda)$ ist. Mit $\xi := \|x_2\|/\|x_1\|$, $\eta := \|x_1\|/\|x_2\|$, $\xi, \eta \in (0, 1]$ und $\langle x_2^*, x_1\rangle = \langle x_2^*, x_1/\|x_1\|\rangle \cdot \|x_1\|$ folgen aus (3.3) sofort die Ungleichungen (2.6) und (2.7) und umgekehrt ∎

Bemerkung 1: Für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und $x_1 = x_2$ ist die Beziehung (1.3) trivialerweise erfüllt für jede Konstante $C \geqq 1$. Diese Fälle werden wir in Zukunft vernachlässigen.

Beweis von Satz 5: Aus $\|x_1 \pm x_2\| \geqq \big|\|x_1 - x_2\|\big|$ folgt sofort

$$l(\lambda) \leqq -\big|\|x_2\| - \lambda\|x_1 - x_2\|\big| + \|x_2\| + \lambda\|x_1 - x_2\|.$$

Der Fall $\|x_2\| \geqq \lambda\|x_1 - x_2\|$ gibt $l(\lambda) \leqq 2\lambda\|x_1 - x_2\|$ und der Fall $\|x_2\| < \lambda\|x_1 - x_2\|$ impliziert $l(\lambda) \leqq 2\|x_2\| \leqq 2\lambda\|x_1 - x_2\|$, d. h. $C \geqq 2$. Wählen wir speziell $x_1 = x_0$, $x_2 = -\lambda x_0$, $\lambda \in (0, 1/2)$ und $\gamma = 1$, dann folgt für $\big(l(\lambda) - r(\lambda)\big)/\lambda$ bei $C < 2$ und hinreichend kleinem $\lambda > 0$ im Widerspruch zu (1.3) $\big(l(\lambda) - r(\lambda)\big)/\lambda = -\lambda C + (2 - C) > 0$. Damit ist $C = 2$ die in (1.3) wählbare minimale Konstante für $\gamma = 1$ ∎

Vorbereitend zu den Beweisen von Satz 1 und Satz 3 führen wir an:

Nach Satz 6 ergibt sich $C(\gamma)$ bzw. $C_p(\gamma)$ aus den Ungleichungen (2.6) und (2.7) als Maximum der Suprema der linken Seiten über alle $\xi, \eta \in (0, 1]$, $\alpha := -\langle x_2^*, x_1/\|x_1\|\rangle \in [-1, 1]$. Es ist leicht einzusehen, daß ξ bzw. η und α unabhängig voneinander ihre Definitionsbereiche durchlaufen können. Wir zeigen die Endlichkeit von $C_p(\gamma)$ und $C(\gamma)$, indem wir für die Ausdrücke

$$F(\alpha, \xi, \gamma; p) := \frac{(\gamma - 1)\xi^\gamma + \alpha\gamma\xi^{\gamma-1} + 1}{[(p - 1)\xi^p - \alpha p\xi^{p-1} + 1]^{\gamma/p}}$$

und

$$G(\alpha, \eta, \gamma; p) := \frac{\eta^\gamma + \alpha\gamma\eta + \gamma - 1}{[(p - 1)\eta^p + \alpha p\eta^{p-1} + 1]^{\gamma/p}}$$

mit $\alpha \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$, $\gamma \in [1, 2]$ und $p \in [1, 2]$ eine Extremwertuntersuchung bez. η, ξ und α mit γ und p als Parameter durchführen.

Lemma 3.2: *Sei $\alpha \cdot \xi \neq -1$. Dann gilt:*

i) *Die Abbildung $F(\cdot, \xi, \gamma; p): (-1, 1] \to \mathbf{R}$ ist für die Parameter γ und ξ mit $1 \leqq \gamma \leqq p \leqq 2$ und $\xi \in [0, 1]$ monoton wachsend in α.*

ii) $\lim\limits_{(\alpha,\xi)\to(-1,1)} F(\alpha,\xi,\gamma;p) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leqq \gamma = p \leqq 2 \\ 0 & \text{für } 1 \leqq \gamma < p \leqq 2. \end{cases}$

iii) *Für alle* $\alpha \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $1 \leqq \gamma \leqq p \leqq 2$ *mit* $\alpha \cdot \xi \neq -1$ *gilt die Abschätzung* $F(\alpha, \xi, \gamma; p) \geqq G(\alpha, \xi, \gamma; p) \geqq 0$.

Beweis: i) Im Fall $p = \gamma$ gilt i) trivialerweise, da F identisch eins ist. Wir setzen daher im weiteren $\gamma < p$ voraus. Wir bilden die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\gamma\left(\xi^{\gamma+p-1}(p-\gamma) + \xi^{\gamma+p-2}\alpha(p-\gamma) + \xi^{\gamma-1} - \xi^{p-1}\right)}{\left((p-1)\,\xi^p + \alpha p \xi^{p-1} + 1\right)^{(\gamma/p)+1}}$$

und betrachten zwei Fälle bez. der Variablen α.

Fall 1: $\alpha \geqq 0$. Wegen $p > \gamma$ und $\xi \in [0, 1]$ erhält man $\xi^{\gamma-1} \geqq \xi^{p-1}$ und folglich $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \geqq 0$.

Fall 2: $-1 \leqq \alpha < 0$, $\alpha \cdot \xi \neq -1$. Wir zeigen zunächst die Positivität des Nenners über die Gültigkeit der Ungleichung

$$N(\alpha, \xi) := (p-1)\,\xi^p - \alpha p \xi^{p-1} + 1 > 0, \tag{3.5}$$

indem wir die schärfere Ungleichung $N(-1, \xi) =: N(\xi) > 0$ beweisen. Es gilt

$$N'(\xi) = p(p-1)\,\xi^{p-1} - p(p-1)\,\xi^{p-2} = 0 \quad \text{nur für} \quad \xi = 1 \text{ auf } (0, 1],$$
$$N''(\xi) = p(p-1)^2\,\xi^{p-2} - p(p-1)\,(p-2)\,\xi^{p-3} > 0 \quad \text{auf } (0, 1],$$
$$N(0) = 1 \quad \text{und} \quad N(1) = 0.$$

Hieraus folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes und wegen $\alpha \cdot \xi \neq -1$ sofort die Beziehung (3.5). Der Zähler $Z(\alpha, \xi)$ von $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$ ist für $\alpha = -1$ am kleinsten. Wir setzen $Z(\xi) := Z(-1, \xi)$ und erhalten

$$Z(\xi) = \xi^{\gamma-1}\left((1 - \xi^{p-\gamma}) - (p-\gamma)\,\xi^{p-1}(1-\xi)\right).$$

Sei $\varphi(\xi) := (1 - \xi^{p-\gamma})$ und $\psi(\xi) := (p-\gamma)\,\xi^{p-1}(1-\xi)$. Dann gilt $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(1) = \psi'(1) = (p-\gamma)$, $\varphi''(\xi) = -(p-\gamma)\,(p-\gamma-1)\,\xi^{p-3} \geqq 0$ und

$$\psi''(\xi) = \left((p-1)\,(p-2)\,\xi^{p-3} - p(p-1)\,\xi^{p-2}\right)(p-\gamma) \leqq 0 \text{ auf } (0, 1],$$

$Z(1) = Z'(1) = 0$, $Z''(\xi) \geqq 0$ auf $(0, 1]$. Erneut folgt aus dem Mittelwertsatz $Z(\xi) \geqq 0$ auf $[0, 1]$, d. h. $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \geqq 0$ für jedes $\alpha \in [-1, 1]$ und $\xi \in [0, 1]$ mit $\alpha \cdot \xi \neq -1$.

ii) Wie beim Beweis von i) kann $\gamma < p$ vorausgesetzt werden. Wir entwickeln den Zähler und den Radikanden des Nenners der Abbildung F bez. α und ξ an der Stelle $(\alpha_0, \xi_0) = (-1, 1)$ nach Taylor bis zur 2. Ordnung und erhalten

$$F(\alpha, \xi, \gamma; p)$$
$$:= \frac{(\alpha+1)\left[\gamma + \gamma(\gamma-1)\,(\xi-1)/2 + \right.}{(\alpha+1)^{\gamma/p}\left[p + p(p-1)\,(\xi-1)/2 + \right.}$$
$$\frac{\left. + o\left((\alpha+1)^2, (\xi-1)^2\right)/(\alpha+1)\right]}{\left. + \dfrac{\left(p(p-1)\,(\xi-1)^2\right)/2 + o(|\alpha+1|^2, |\xi-1|^2)}{\alpha+1}\right]^{\gamma/p}}$$

$$+ \frac{(\xi-1)^2/|\xi-1|^{2\gamma/p} \times \gamma(\gamma-1)/2}{\left[p(\alpha+1)/(\xi-1)^2 + p(p-1)(\alpha+1)/(|\xi-1| \cdot 2) + p(p-1)/2 + \frac{o(|\alpha+1|^2, |\xi-1|^2)}{(\xi-1)^2}\right]^{\gamma/p}}.$$

Wir schätzen $F(\alpha, \xi, \gamma; p)$ nach oben ab und erhalten

$$F(\alpha, \xi, \gamma; p) \leqq \frac{(\alpha+1)^{1-\gamma/p}\left(\gamma + O(|\xi-1|, |\alpha+1|)\right)}{\left(p + o(|\alpha+1|, |\xi-1|)\right)^{\gamma/p}} + \frac{(\xi-1)^{2-2\gamma/p}\left(\gamma(\gamma-1)/2\right)}{\left(p(p-1)/2 + O(|\alpha+1|, |\xi-1|)\right)^{\gamma/p}} \to 0$$

für $(\alpha, \xi) \to (-1, 1)$. Nach (3.5) ist $F(\alpha, \xi, \gamma; p) \geqq 0$ für jedes $(\alpha, \xi) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, $\alpha \cdot \xi \neq -1$, $1 \leqq \gamma \leqq p \leqq 2$.

iii) Da die Nenner identisch sind, betrachten wir nur die Differenz der Zähler von F mit G für $\eta = \xi$. Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta(\xi, \alpha) &:= (2-\gamma)(1-\xi^\gamma) + \alpha\xi^{\gamma-1}(1-\xi^{2-\gamma}) \\ &\geqq \Delta(\xi, -1) =: \Delta(\xi) = (2-\gamma)(1-\xi^\gamma) - \gamma\xi^{\gamma-1}(1-\xi^{2-\gamma}),\end{aligned}$$

$\Delta(0) = (2-\gamma) \geqq 0$, $\Delta(1) = \Delta'(1) = 0$ und $\Delta''(\xi) = \gamma(\gamma-1)(2-\gamma)(\xi^{\gamma-3} - \xi^{\gamma-2}) \geqq 0$ auf dem Intervall $(0, 1]$.

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt $\Delta(\xi) \geqq 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Analog folgt aus dem Mittelwertsatz, daß der Zähler von G, nach (3.5) damit auch G stets nichtnegativ sind ∎

Bemerkung 2: Für $\alpha \in [-1, 0]$ gilt i. allg. nicht $F(\alpha, \xi, \gamma; p) \leqq 1$, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $\alpha = 0$, $\gamma = 1{,}5$ und $p = 2$. Für $\xi_0 = 1/4$ folgt $F(0, 1/4, 3/2; 2) = (17/16)^{1/4} > 1$. Aus einer Kurvendiskussion für $F(0, \xi, \gamma; p)$ ergibt sich der Maximalwert von $F(0, \xi, \gamma; p)$ an der Stelle $\xi_0 = \left((\gamma-1)/(p-1)\right)^{1/(p-\gamma)}$.

Beweis von Satz 1: Da X ein Hilbertraum ist, können die Räume X und X' identifiziert werden, und es gilt $\langle x_2^*, x_1\rangle = \langle\langle x_2, x_2\rangle\rangle/\|x_2\|$, $\partial\|x_2\| = \{x_2/\|x_2\|\}$. Wir betrachten den Fall $p = 2$. Es gilt bekanntlich

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \langle\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle\rangle = \|x_1\|^2 - 2\langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle + \|x_2\|^2.$$

Damit folgt aus (2.6) und (2.7), daß über die Ungleichungen $F(\alpha, \xi, \gamma; 2) \leqq C(\gamma)$ und $G(\alpha, \xi, \gamma; 2) \leqq C(\gamma)$ die Konstanten $C(\gamma)$ zu bestimmen sind. Nach Vereinbarung wird der Fall $x_1 = x_2$, d. h. $\alpha = -1$, $\xi = \eta = 1$, ausgeschlossen (in diesem Fall ist die Ungleichung (1.3) sogar für jedes C trivialerweise erfüllt). Nach Lemma 3.2iii) genügt es, das Supremum von $F(\alpha, \xi, \gamma; 2)$ für $(\alpha, \xi) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ mit $\alpha \cdot \xi \neq -1$ zu bestimmen. Aus Lemma 3.2i), ii) und $F(1, 0; \gamma; 2) = \gamma 2^{1-\gamma} = 1$ folgt (2.1). Da $F(1, \cdot, \gamma; 2)$ auf $[0, 1]$ stetig ist, wird das Supremum für $\xi =: a(\gamma)$ angenommen und ist endlich ∎

Beweis von Satz 3: Die Beziehung (1.3) gilt laut Voraussetzung für ein $p \in [1, 2]$ mit der Konstanten C_p. Damit folgt über (2.6) mit $\gamma = p$ die Abschätzung

$$\|x_1 - x_2\|^p \geqq \left((p-1)\|x_2\|^p - p\langle x_2^*, x_1/\|x_1\|\rangle \|x_1\| \|x_2\|^{p-1} + \|x_1\|^p\right)/C_p, \quad (3.4)$$

die über die Identität $\|x_1 - x_2\|^\gamma = (\|x_1 - x_2\|^p)^{\gamma/p}$ und die Variablensubstitution mit ξ, η und α, eingesetzt in (2.6) und (2.7), die Bestimmungsungleichungen

$$F(\alpha, \xi, \gamma; p)\,(C_p)^{\gamma/p} \leqq C_p(\gamma), \quad G(\alpha, \eta, \gamma; p)\,(C_p)^{\gamma/p} \leqq C_p(\gamma)$$

für $C_p(\gamma)$ liefert. Der weitere Beweis läuft analog zum Beweis von Satz 1 ∎

Zur Schärfe der Konstanten $C(\gamma)$ und $C_p(\gamma)$:
Da α und ξ unabhängig laufen, ist $C(\gamma)$ „scharf". Auch wenn C_p „scharf" gewählt wird, braucht $C_p(\gamma)$ nicht „scharf" zu sein, da die Werte von α und ξ an den Stellen, wo die Gleichheit angenommen wird bzw. in der Grenze gilt, in (3.4) und (1.3) nicht übereinstimmen müssen.

Beweis von Satz 2: *Zu* 1 *und* 2:

Sei $F_\gamma(\xi) := F(1, \xi, \gamma; 2)$. Dann folgt sofort für die Randwerte

$$F_\gamma(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma \in (1, 2], \\ 2 & \text{für } \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{und } F_\gamma(1) = \gamma 2^{1-\gamma} \text{ für jedes } \gamma \in [1, 2].$$

Die Untersuchung auf Extremwerte liefert für $\gamma = 1$ bei $F_1(\xi) = 2/(1 + \xi)$ das absolute Maximum für $\xi = 0$ zum Wert $F_1(0) = 2$. Im Fall $\gamma \in (1, 2)$ sind Untersuchungen auf relative Maxima erforderlich. Es folgt aus

$$\frac{\partial F_\gamma(\xi)}{\partial \xi} = \gamma\big(\xi^{\gamma-1}(\gamma - 2) + \xi^{\gamma-2}(\gamma - 1) - 1\big)/(1 - \xi)^{\gamma+1} = 0$$

die Fixpunktgleichung

$$\Phi_\gamma(\xi) = \xi \tag{3.6}$$

mit $\Phi_\gamma(\xi) := \big(\gamma - 1 - (2 - \gamma)\,\xi\big)^{1/(2-\gamma)}$ und die Beziehung (2.3). Man zeigt leicht daß für jedes $\xi \in (0, q_0)$, $q_0 := \min\{1, (\gamma - 1)/(2 - \gamma)\}$, die Relationen $\Phi_\gamma(\xi) \in (0, q_0)$ $\Phi_\gamma'(\xi) < 0$ auf $(0, q_0)$ und $|\Phi_\gamma'(\xi)| \leqq |\Phi_\gamma'(0)| = (\gamma - 1)^{(\gamma-1)/(2-\gamma)} < 1$ gelten. Damit hat (3.6) bzw. (2.3) für jedes $\gamma \in (1, 2)$ genau eine Lösung $a(\gamma) \in (0, q_0)$. Nach dem Theorem über implizite Funktionen ist $a(\cdot)$ auf $(1, 2)$ beliebig oft differenzierbar. Wegen $\lim\limits_{\xi\to+0} F_\gamma'(\xi) = +\infty$, $F_\gamma'(1) < 0$ und der Unität der Lösung $a(\gamma)$ von (2.3) für jedes $\gamma \in (1, 2)$ nimmt $F_\gamma(\cdot)$ in $\xi = a(\gamma)$ sein globales Maximum $C(\gamma)$ an, welches offensichtlich auf $(1, 2)$ beliebig oft nach γ differenzierbar ist. Für $\gamma = 2$ folgt sofort $C(2) = F_2(\gamma) \equiv 1$ aus der Definition von $F_\gamma(\xi)$. Wir erweitern $a(\cdot)$ zu einer stetigen Abbildung auf $[1, 2]$ derart, daß $C(\gamma) = F_\gamma\big(a(\gamma)\big)$ für jedes $\gamma \in [1, 2]$ gilt. Aus $a(\gamma) \in (0; 1)$ folgt

$$a'(\gamma) = (a + 1)/\big(-a^{2-\gamma}(\ln a) + (2 - \gamma)\big) > 0 \quad \text{für jedes } \gamma \in (1, 2);$$

d. h., $a(\cdot)$ ist auf $(1, 2)$ monoton wachsend und beschränkt. Es existieren also die Grenzwerte $a(1) := \lim\limits_{\gamma\to1+0} a(\gamma)$ und $a(2) := \lim\limits_{\gamma\to2-0} a(\gamma)$. Man findet leicht, daß $a(1) = 0$ und $a(2)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a(2) = \exp\big(-a(2) - 1\big)$ ist, welche sofort aus der Beziehung

$$\ln a(2) = -\lim_{\gamma\to2-0} \big(\ln\left[(\gamma - 2)\,(a(\gamma) + 1) + 1\right]\big)/(\gamma - 2) = -a(2) - 1$$

folgt. Aus den beiden Fixpunktgleichungen folgen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &0 \leqq a(\gamma) \leqq a(2) < 0{,}279 \quad \text{für } \gamma \in [1, 2], \\ &0 \leqq a(\gamma) \leqq a(1,3) < 0{,}12 \quad \text{für } \gamma \in [1, 1{,}3]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzungen zeigen wir, daß die Abbildung $C(\cdot)$ auf $(1, 2)$ streng monoton fallend ist. Wegen $F_\gamma'(a(\gamma)) = 0$ folgt mit (2.3)

$$\frac{dC(\gamma)}{d\gamma} = F_\gamma'(a(\gamma))\, a'(\gamma) + \frac{\partial F_\gamma(a(\gamma))}{\partial\gamma} = \frac{\partial F_\gamma(a(\gamma))}{\partial\gamma}$$

$$= \big[a^2(1 + (\gamma - 1) \ln [a/(1 + a)]) + a(1 + \gamma \ln [a/(1 + a)]) - a^{2-\gamma} \ln (1 + a)\big]\, a^{\gamma-2}/(1 + a)^\gamma|_{a=a(\gamma)}.$$

Es genügt, zu zeigen

$$Q := \big[a^2\big(1 + (\gamma - 1) \ln [a/(1 + a)]\big) + a\big(1 + \gamma \ln [a/(1 - a)]\big)\big]\big|_{a=a(\gamma)} < 0.$$

Aus (3.7) folgt $\ln\big[a(\gamma)/\big(1 + a(\gamma)\big)\big] \leqq -1{,}5$ für $\gamma \in [1, 2]$ und damit

$$1 + \gamma \ln\big[a(\gamma)/\big(1 - a(\gamma)\big)\big] < 0$$

und

$$\big[a^2\big(1 - \gamma \ln [a/(1 + a)]\big) - a\big(1 + \gamma \ln [a/(1 + a)]\big)\big]\big|_{a=a(\gamma)} \geqq 0$$

und schließlich $Q \leqq a^2\big(2 + (2\gamma - 1) \ln\big[a/(1 + a)\big)\big]\big|_{a=a(\gamma)}$. Für $\gamma \in [1, 1{,}3]$ ergibt sich aus (3.7) und $\ln\big(a(\gamma)/(1 + a(\gamma))\big) \leqq -2{,}2$ die Beziehung $Q \leqq 2 + (2\gamma - 1) \ln\big[a(\gamma)/\big(1 + a(\gamma)\big)\big] \leqq 2 - 2{,}2 = -0{,}2 < 0$ und für $\gamma \in [1{,}3, 2]$ analog $Q \leqq 2 - 1{,}6 \cdot 1{,}5 = -0{,}4 < 0$.

Zu 3: Für $\gamma \in \{1, 2\}$ ist die Ungleichungskette (2.4) durch Einsetzen verifizierbar. Sei nun $\gamma \in (1, 2)$. Dann gilt

$$C(\gamma) = \frac{(\gamma - 1)\, \xi^\gamma + \gamma \xi^{\gamma-1} + 1}{(1 + \xi)^\gamma},$$

falls $(\gamma - 2)\, \xi + (\gamma - 1) = \xi^{2-\gamma}$ ist. Diese Gleichung ist identisch mit

$$(\gamma - 1)\, \xi^\gamma + \gamma \xi^{\gamma-1} + 1 = (1 + \xi^{\gamma-1})\,(1 + \xi).$$

Damit folgt für $\xi = a(\gamma)$

$$C(\gamma) = (1 + \xi^{\gamma-1})/(1 + \xi)^{\gamma-1} \leqq \sup_{\bar\xi \in [0,1]} \big((1 + \bar\xi^{\gamma-1})/(1 + \bar\xi)^{\gamma-1}\big).$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial\xi}\big((1 + \xi^{\gamma-1})/(1 + \xi)^{\gamma-1}\big) \geqq 0$ für jedes $\xi \in (0, 1]$ und $\gamma \in (1, 2)$ folgt aus dieser Monotonie in ξ durch Einsetzen des Wertes $\xi = 1$ die rechte Seite von (2.4). Setzt man in (2.1) $\xi = 1$, dann folgt die linke Abschätzung von (2.4) ∎

Der Beweis von Satz 4 ist offensichtlich und folgt unmittelbar aus Satz 1 und Satz 3 durch Einsetzen der Terme in (1.3) und Summation bzw. Integration der erhaltenen Ungleichungen ∎

LITERATUR

[1] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.
[2] Иоффе, А. Д., и В. М. Тихомиров: Теория экстремальных задач. Москва: Изд-во Наука 1974.

[3] Köthe, G.: Topologische lineare Räume I. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1960.
[4] Leindler, L.: On a certain converse of Hölders's inequality. Acta Sci. Math. **33** (1972), 217—223.
[5] Rolewicz, S.: On γ-paraconvex multifunctions. Math. Japonica **24** (1979), 293—300.

Manuskripteingang: 22. 02. 1983; in revidierter Fassung: 23. 07. 1984

VERFASSER:

Dr. rer. nat. Armin Hoffmann
Sektion Mathematik, Rechentechnik und ökonomische Kybernetik
der Technischen Hochschule Ilmenau
DDR-6300 Ilmenau, PSF 327