Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (2) 1986, S. 119–123

Die Produktstruktur einer Klasse von Integraltransformationen

J. A. Bryčkov, H.-J. Glaeske und O. I. Maričev

Es wird ein Verfahren skizziert, mit dessen Hilfe man Integraltransformationen vom Typ der Mellin-Faltung einer Teilklasse von Kernen als Produkt modifizierter Laplace-Transformationen darstellen kann. Möglichkeiten zur Faktorisierung nach anderen Transformationen werden angedeutet.

Описывается способ представления интегральных преобразований типа свёртки Меллина с ядрами из определенного подкласса в виде произведения модифицированных преобразований Лапласа. Указывается на возможности факторизации также с помощью других преобразований.

A method for the representation of a subclass of integral transformations of the Mellin-convolution-type as a product of modified Laplace transforms is sketched. Possibilities for the factorization with respect to other transforms are hinted.

1. Eine Vielzahl wichtiger Integraltransformationen läßt sich (nach geeigneter Variablentransformation) mit Hilfe eines gewissen Kerns k in der Gestalt

$$(k\varphi)(x) := \int_0^\infty k(x/t)\,\varphi(t)\,t^{-1}\,dt = \{k(x)\}\,\varphi \tag{1.1}$$

darstellen, d. h. in Gestalt der Mellin-Faltung $\{k(x)\}\,\varphi$ des die Transformation definierenden Kerns k mit der Originalfunktion φ. Hierzu gehören z. B. die Laplace-, die Fourier-Sinus- und Fourier-Cosinus-, die Hankel-, die Stieltjes-, die einseitige Hilbert- und die Meier-Transformation sowie die Riemann-Liouvilleschen und Weylschen Integrale

$$I_+^\alpha\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt, \qquad \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \tag{1.2}$$

bzw.

$$I_-^\alpha\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt, \qquad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.3}$$

Unter diesen Transformationen spielt die Laplace-Transformation eine besondere Rolle, weil sie am besten untersucht ist (siehe z. B. [4]) und weil es umfangreiche Tabellenwerke gibt (siehe z. B. [1]). Ziel dieser kurzen Abhandlung ist es zu skizzieren, wie man Transformationen der Gestalt (1.1) unter gewissen Einschränkungen für die Kerne k als Produkt modifizierter Laplace-Transformationen bzw. deren Umkehrung darstellen kann. Dieses Verfahren bietet außerdem die Möglichkeit, durch Zusammenfassung gewisser Faktoren Produktzerlegungen nach anderen

Transformationen vorzunehmen. Das wird beispielhaft erläutert. Genaue Untersuchungen über den Gültigkeitsbereich sollen hier nicht vorgenommen werden (siehe hierzu [2]). An Hand eines Beispiels wird erläutert, wie man im konkreten Falle verschiedene Faktorisierungen herstellen kann.

2. Nach dem Faltungssatz der Mellin-Transformation gilt für die Mellintransformierte der Transformation (1.1)

$$(k\varphi)^*(s) = k^*(s)\,\varphi^*(s). \tag{2.1}$$

Hier und im folgenden sei f^* die Mellintransformierte von f, d. h.

$$f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,dx = \mathfrak{M}[f](s).$$

Wir betrachten die Klasse aller Integraltransformationen der Gestalt (1.1), deren Kerne k Mellintransformierte der Form

$$k^*(s) = M \frac{\prod_{j=1}^{A} \Gamma(a_j + s) \prod_{k=1}^{B} \Gamma(b_k - s)}{\prod_{l=1}^{C} \Gamma(c_l + s) \prod_{m=1}^{D} \Gamma(d_m - s)} \tag{2.2}$$

mit

$$-\operatorname{Re}(a_j) < \operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(b_k), \qquad j = 1, 2, \ldots, A, \quad k = 1, 2, \ldots, B \tag{2.3}$$

besitzen.

Bemerkung 1: Die Bedingungen (2.3) sind keine Beschränkung der Allgemeinheit. Mittels des Ergänzungssatzes der Gammafunktion kann man den Gültigkeitsbereich beliebig nach rechts oder links verschieben. Hierbei ändern sich i. a. natürlich die Anzahlen A, B, C, D der Faktoren und die a_j, b_k, c_l, d_m.

Nun ist

$$\Gamma(s) = \mathfrak{M}[e^{-t}](s), \qquad \operatorname{Re}(s) > 0. \tag{2.4}$$

Die Funktion e^{-t} ist der Kern der Laplace-Transformation. Betrachtet man die modifizierten Laplace-Transformationen

$$\Lambda_\pm \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-(x/t)^{\pm 1}} \varphi(t)\, t^{-1}\,dt, \tag{2.5}$$

so gilt offensichtlich

$$\Lambda_\pm \varphi(x) = \left\{e^{-x^{\pm 1}}\right\} \varphi = \mathfrak{L}[t^{-1}\varphi(t^{\mp 1})](x^{\pm 1}), \tag{2.5'}$$

wobei $\mathfrak{L}$ die Laplacetransformierte ist, d. h.

$$\mathfrak{L}[f](x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt.$$

Verwendet man neben (2.4) und (2.1) noch $\mathfrak{M}[f(t^{-1})](s) = f^*(-s)$, so ergibt sich

$$\mathfrak{M}[\Lambda_\pm \varphi](s) = \Gamma(\pm s)\,\varphi^*(s).$$

Setzen wir

$$\Lambda_\pm^{-1} \varphi(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{(\gamma)} \frac{\varphi^*(s)\, x^{-s}}{\Gamma(\pm s)}\,ds, \qquad \gamma \gtrless 0, \tag{2.6}$$

so ist

$$\Lambda_\pm^{-1} \varphi(x) = \left\{e^{-x^{\pm 1}}\right\} \varphi = \mathfrak{M}^{-1}[\varphi^*(s)/\Gamma(\pm s)](x). \tag{2.6'}$$

Nach der Umkehrformel der Mellintransformation hat man also

$$\mathfrak{M}[\Lambda_\pm^{-1}\varphi]\,(s) = \varphi^*(s)/\Gamma(\pm s).$$

Verwendet man noch $\mathfrak{M}[t^a f(t)]\,(s) = f^*(s+a)$, so erhält man die folgenden Zuordnungen:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}[t^a\Lambda_+ t^{-a}]\,(s) = \Gamma(a+s), \quad \mathfrak{M}[t^{-b}\Lambda_- t^b]\,(s) = \Gamma(b-s);\\ &\mathfrak{M}[t^c\Lambda_+^{-1}t^{-c}]\,(s) = 1/\Gamma(c+s), \quad \mathfrak{M}[t^{-d}\Lambda_-^{-1}t^d]\,(s) = 1/\Gamma(d-s).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Jeder Gammafunktion in (2.2) entspricht also wegen (2.1) im Original ein Ausdruck der Gestalt $x^{\pm a}\Lambda_\pm^{\pm 1}x^{\mp a}$ und dem Kern k das Produkt dieser Ausdrücke. Damit haben wir das folgende

Resultat: *Jede Integraltransformation der Form* (1.1), (2.2) *läßt sich als* $k\varphi$, *wo* k *Produkt von Operatoren der Gestalt* $x^{\pm a}\Lambda_\pm^{\mp 1}x^{\pm a}$ *ist, schreiben. Hier sind* $\Lambda_\pm^{-1}$ *aus* (2.5) *und* (2.6) *zu entnehmen. Genauer ist*

$$\begin{aligned}\{k(x)\}\,\varphi &= \prod_{j=1}^{A}(x^{a_j}\Lambda_+ x^{-a_j})\prod_{k=1}^{B}(x^{b_k}\Lambda_- x^{b_k})\\ &\quad\times\prod_{l=1}^{C}(x^{c_l}\Lambda_+^{-1}x^{-c_l})\prod_{m=1}^{D}(x^{-d_m}\Lambda_-^{-1}x^{d_m})\,\varphi.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Bemerkungen: 2. Man beachte, daß in (2.8) für die Gammafunktion im Zähler von (2.2) die Operatoren $\Lambda_\pm$ und für diejenigen im Nenner die Operatoren $\Lambda_\pm^{-1}$ gewählt werden müssen. In beiden Fällen entsprechen sich die Vorzeichen von s im Argument der Gammafunktion und die am Symbol Λ angebrachten Symbole „+" bzw. „−".

3. Da die Reihenfolge der Faktoren in (2.2) beliebig vertauscht werden kann, ist die Darstellung (2.8) bis auf die Reihenfolge der Faktoren, die auf der rechten Seite der Gleichung (2.8) vor der Funktion φ stehen, eindeutig.

Aus der Produktzerlegung von $\{k(x)\}$ erhält man sofort eine Zerlegung für $\{k(x^{-1})\}$, weil bei dieser Substitution $\Lambda_+^{\pm 1}$ in $\Lambda_-^{\pm 1}$ übergeht und umgekehrt. So folgt z. B. aus

$$\{k(x)\} = (x^\alpha\Lambda_+ x^{-\alpha})\,(x^\beta\Lambda_-^{-1}x^{-\beta})$$

sofort

$$\{k(x^{-1})\} = (x^{-\alpha}\Lambda_- x^\alpha)\,(x^{-\beta}\Lambda_+^{-1}x^\beta).$$

Man überlegt sich auch leicht, daß in diesem Beispiel

$$\{x^\lambda k(x)\} = (x^{\lambda+\alpha}\Lambda_+ x^{-\lambda-\alpha})\,(x^{\lambda+\beta}\Lambda_-^{-1}x^{-\lambda-\beta})$$

ist.

Die Umkehrung von (1.1), d. h. die Auflösung von

$$\{k(x)\}\,\varphi = g \tag{2.9}$$

nach $\{k(x)\}$ kann unter geeigneten Bedingungen in der Gestalt

$$\varphi(x) = \{k^{-1}g\}\,(x) = \{k(x)\}^{-1}\,g \tag{2.10}$$

geschrieben werden, wobei $\{k(x)\}^{-1}\,k = x$ ist. In diesem Sinne ist das Symbol $\{k(x)\}^{-1}$ in Zukunft zu verstehen. Hat die linke Seite von (2.9) speziell die Gestalt (2.8), so überlegt man sich sofort, daß (unter gewissen Bedingungen) die Gleichung (2.10) in der Form

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \prod_{m=1}^{D}(x^{-d_m}\Lambda_- x^{d_m})\prod_{l=1}^{C}(x^{c_l}\Lambda_+ x^{-c_l})\\ &\quad\times\prod_{k=1}^{B}(x^{-b_k}\Lambda_-^{-1}x^{b_k})\prod_{j=1}^{A}(x^{a_j}\Lambda_+^{-1}x^{-a_j})\,g\end{aligned} \tag{2.11}$$

geschrieben werden kann. Andere Möglichkeiten der Darstellung von $\{k(x)\}^{-1}$ findet man in [2: § 4].

3. Andere Faktorisierungen erhält man z. B., wenn man als Faktoren Ausdrücke wählt, deren Mellintransformierte höchstens zwei Gammafunktionen enthält. Mit Hilfe von Tafeln von Mellintransformierten (siehe z. B. [1, 6]) ergeben sich, zusätzlich zu (2.7), die folgenden Korrespondenzen:

$k^*(s)$	$\{k(x)\}$
$\Gamma(a + s)/\Gamma(c + s)$	$x^a I_-^{c-a} x^{-c}$
$\Gamma(b - s)/\Gamma(d - s)$	$x^{1-d} I_+^{d-b} x^{b-1}$
$\Gamma(a + s)/\Gamma(d - s)$	$x^{(a-d+1)/2} \left\{J_{a+d-1}(2\sqrt{x})\right\} x^{(d-a-1)/2}$
$\Gamma(b - s)/\Gamma(c + s)$	$x^{(c-b-1)/2} \left\{J_{b+c-1}(2/\sqrt{x})\right\} x^{(b-c+1)/2}$
$\Gamma(a + s)\, \Gamma(b - s)$	$\Gamma(a + b)\, \{x^a(1 + x)^{-a-b}\}$
$[\Gamma(c + s)\, \Gamma(d - s)]^{-1}$	$[\Gamma(c + d)]^{-1}\, \{x^c(1 + x)^{-c-d}\}^{-1}$
$\Gamma(a + s)\, \Gamma(b + s)$	$2x^{(a+b)/2} \left\{K_{a-b}(2\sqrt{x})\right\} x^{-(a+b)/2}$
$\left(\Gamma(a + s)\, \Gamma(b + s)\right)^{-1}$	$2^{-1}x^{(a+b)/2} \left\{K_{a-b}(2\sqrt{x})\right\}^{-1} x^{-(a+b)/2}$
$\Gamma(a - s)\, \Gamma(b - s)$	$2x^{-(a+b)/2} \left\{K_{a-b}(2/\sqrt{x})\right\} x^{(a+b)/2}$
$\left(\Gamma(a - s)\, \Gamma(b - s)\right)^{-1}$	$2^{-1}x^{-(a+b)/2} \left\{K_{a-b}(2/\sqrt{x})\right\}^{-1} x^{(a+b)/2}$

Hier sind J_ν die Besselfunktionen erster Art und K_ν die modifizierten Besselfunktionen dritter Art (der Ordnung ν). Die in obiger Tabelle aufgeführten Kerne k lassen sich nach dem Verfahren von Abschnitt 2 natürlich sofort als Produkte von zwei modifizierten Laplace-Transformationen schreiben.

Wir betrachten zum Abschluß ein Beispiel. Wegen

$$\mathfrak{M}[e^{-x/2} I_\nu(x/2)]\,(s) = \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(s + \nu)\, \Gamma(-s + 1/2)}{\Gamma(1 + \nu - s)},$$

$$-\mathrm{Re}\,(\nu) < \mathrm{Re}\,(s) < 1/2,$$

(siehe [6: Formel 9.12. (1)/S. 174]), wobei I_ν die modifizierten Besselfunktionen erster Art sind, erhält man, je nachdem, welche Gammafunktionen man zusammenfaßt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi}\, \{e^{-x/2} I_\nu(x/2)\} &= (x^\nu \Lambda_+ x^{-\nu})\, (x^{-1/2} \Lambda_- x^{1/2})\, (x^{-\nu-1} \Lambda_-^{-1} x^{\nu+1}) \\
&= (x^\nu \Lambda_+ x^{-\nu})\, (x^{-\nu} I_+^{\nu+1/2} x^{-1/2}) \\
&= (x^{-1/2} \Lambda_- x^{1/2}) \left\{J_{2\nu}(2\sqrt{x})\right\} \\
&= \Gamma(\nu + 1/2)\, \{x^\nu (x + 1)^{-\nu-1/2}\}\, \{x^{-\nu-1} \Lambda_-^{-1} x^{\nu+1}\},
\end{aligned}$$

also drei weitere Produktzerlegungen für die linke Seite.

4. Die oben dargestellte Methode gestattet es, für eine große Klasse von Integraltransformationen Produktzerlegungen herzuleiten. Grundlage ist ein Mellinbild k^* der Gestalt (2.2) des Kerns k der Transformation (1.1). Damit werden die in verschiedenen Arbeiten angegebenen Faktorisierungen spezieller Integraltransformationen auf eine einheitliche Basis gestellt. In [2: § 8] werden für eine Reihe von Kernen Produktzerlegungen angegeben.

Verallgemeinerungen dieser Betrachtungen sind in mehreren Richtungen möglich. Zum einen können statt der Funktionen $\Gamma(\pm s + \beta)$ in (2.2) auch Funktionen der Gestalt $\Gamma(\alpha s + \beta)$ gewählt werden. Auch die Ausdehnung auf Integraltransformationen von Distributionen ist möglich, wenn man zur Bestimmung der Mellintransformierten k^* des Kerns k etwa auf die Tabellen in [3] zurückgreift. Weiterhin existieren Produktzerlegungen auch für eine Reihe von Transformationen, die nicht zu der hier betrachteten Klasse gehören. So findet man in [5] z. B. eine Faktorisierung für die Laguerre-Pinney-Transformation, und auch für die Kontorovich-Lebedev-Transformation und andere Transformationen, bei denen die Bildvariable im Index des Kerns erscheint, sind Faktorisierungen möglich. Sie werden an anderer Stelle publiziert.

LITERATUR

[1] Bateman, H. (Ed.: A. Erdelyi): Tables of Integral Transforms, Vol. I. New York—Toronto—London: McGraw-Hill 1954.

[2] Брычков, Ю. А., Глеске, Х.-Ю., и О. И. Маричев: Факторизация интегральных преобразований типа свёртки. Москва: Итоги Наука и Техники, Серия Математический Анализ 21 (1983), 3—41.

[3] Брычков, Ю. А., и А. П. Прудников: Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва: Изд-во Наука 1977.

[4] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Basel—Stuttgart: Birkhäuser-Verlag, Bd. I: 1950, Bd. II: 1955, Bd. III: 1956.

[5] Glaeske, H.-J.: Die Laguerre-Pinney-Transformation. Aequat. math. 22 (1981), 73—85.

[6] Маричев, О. И.: Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Изд-во Наука и Техника 1978.

Manuskripteingang: 14. 12. 1984

VERFASSER:

Doz. Dr. J. A. Bryčkov
Rechenzentrum der AdW der UdSSR
UdSSR-Moskau W 333, ul. Vavilova 40

Prof. Dr. H.-J. Glaeske
Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität
DDR-6900 Jena, Universitätshochhaus

Doz. Dr. O. I. Maričev
Lehrstuhl Funktionentheorie
der Belorussischen Staatlichen Universität
UdSSR-220050 Minsk 50, Leninplatz