Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (2) 1986, S. 133–137

Eine Definition des Kroneckerindexes im $\mathbf{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Cliffordanalysis

K. Habetha

Es wird ein Index (Umlaufzahl) für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten M in $\mathbf{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Clifford-Analysis definiert und bewiesen, daß er in den Komponenten des Komplementes von M ganzzahlig ist.

С помощью анализа Клиффорда определяется индекс для n-мерного замкнутого и ограниченного многообразия M в $\mathbf{R}^{n+1}$. Доказывается, что этот индекс является целочисленным в компонентах дополнения M.

An index for an n-dimensional closed and bounded manifold M in $\mathbf{R}^{n+1}$ will be defined with the help of Clifford analysis and it will be proved, that it is an entire number in every component of the complement of M.

Ist $e_1, \ldots, e_n$ ein Orthonormalsystem im $\mathbf{R}^n$, so sei $C_n(\mathbf{R})$ die davon mittels der Multiplikationsregeln $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}e_0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ erzeugte *Cliffordalgebra* der Dimension 2^n mit der Basis e_0 (Einselement), $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_1e_2, \ldots, e_{n-1}e_n, \ldots, e_1e_2 \ldots e_n$. Diese Basis kann durch e_A, $A \subset \{1, \ldots, n\}$, beschrieben werden. Elemente in $C_n(\mathbf{R})$ werden $c = \sum_A c_Ae_A$ geschrieben, Elemente im $\mathbf{R}^{n+1}$ als $z = \sum_{j=0}^n x_je_j$, $dz = \sum_{j=0}^n e_j\,dx_j$ sei das Differential. Der *Hodge-Stern* ist definiert durch

$$(dx_{i_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})^* = \operatorname{sgn}(i_0, \ldots, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_n)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n},$$

damit ist $dz^* = \sum_{j=0}^n e_j\,dx_j^*$ erklärt. Eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet des $\mathbf{R}^{n+1}$ mit Werten in $C_n(\mathbf{R})$ heißt *links-* (*rechts-*) *regulär*, falls $Df = 0$ $(fD = 0)$ mit dem verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operator $D = \sum_{j=0}^n e_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ist. Für weitere Einzelheiten sei auf [1] oder [2] verwiesen.

Es soll der folgende Satz bewiesen werden.

Satz: *M sei eine geschlossene, beschränkte Mannigfaltigkeit der Dimension n im $\mathbf{R}^{n+1}$, sie sei hinreichend glatt. Dann ist der Index (Umlaufzahl)*

$$n(M, z) := \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M d\zeta^* \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^{n+1}} = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^{n+1}}\, d\zeta^*$$

in den Komponenten des Komplements von M ganzzahlig (ω_{n+1} — Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbf{R}^{n+1}$).

Bemerkungen: a) Die Glattheitsvoraussetzungen sind bewußt unscharf gehalten, da durch Approximation — wegen der Ganzzahligkeit ändert sich dabei nichts — auch stückweise oder noch weniger glatte Flächen erfaßt werden können.

b) Da nach Einsetzen einer lokalen Parameterdarstellung $d\zeta^* = \nu\, do$ mit der äußeren Normalen ν (in der Algebra geschrieben: $\sum_{j=0}^{n} \nu_j e_j$) ist und da nach dem vorstehenden Satz der Index reell ist, gilt

$$n(M, z) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M \frac{\operatorname{Re}\left(\nu(\overline{\zeta - z})\right)}{|\zeta - z|^{n+1}}\, do.$$

Nun ist aber $\operatorname{Re}\left(\nu(\overline{\zeta - z})\right) = \langle \nu, \zeta - z\rangle$ mit dem normalen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ der nunmehr als Vektoren aufgefaßten Größen und deshalb

$$n(M, z) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M \frac{\langle \nu, \zeta - z\rangle}{|\zeta - z|^{n+1}}\, do.$$

An dieser Form ist die Übereinstimmung mit dem Kroneckerschen Indexbegriff der Topologie deutlicher, es spielt der Winkel zwischen Normale und „Fahrstrahl" $\zeta - z$ eine Rolle.

c) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Voraussetzungen an M Selbstdurchdringungen nicht verbieten.

d) In bekannter Weise kann eine Homologietheorie in gegebenen Gebieten des $\mathbf{R}^{n+1}$ entwickelt werden, allerdings nur bezüglich der n-ten Homologiegruppe, die dabei gewonnen wird. Für niedere Dimension sei auf F. SOMMEN [3] hingewiesen.

Beweis des Satzes: Da der Cauchykern rechts- und linksregulär ist, ist $n(M, z)$ in der linken der obigen Formulierungen eine rechtsreguläre Funktion. Die andere Formulierung kann durch Vertauschung von rechts und links behandelt werden, die Gleichheit ist auch aus der vorangehenden Bemerkung b ersichtlich, da das Skalarprodukt kommutativ ist.

Sei nun G die unbeschränkte Komponente des Komplements von M, sie enthält das Äußere $|z| > R$ einer Kugel, dort existiert eine Laurententwicklung

$$n(M, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha P_\alpha(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} d_\alpha Q_\alpha(z)$$

mit

$$c_\alpha = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{|u|=\varrho} n(M, u)\, du^*\, Q_\alpha(u), \qquad d_\alpha = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{|u|=\varrho} n(M, u)\, du^*\, P_\alpha(u).$$

Auf $|u| = \varrho$ ist $du^* = u\,do$ mit dem normalen Flächenelement oder $du^* = \varrho^n \nu\, do_1$ mit dem Flächenelement do_1 auf der Einheitskugel und $u = \varrho\nu$. Ferner ist offensichtlich $|n(M, u)| \leqq C/\varrho^n$, und es sind P_α, Q_α homogene Ausdrücke in ϱ, wegen $u = \varrho\nu$ gilt

$$P_\alpha(u) = \varrho^{|\alpha|} P_\alpha(\nu), \qquad Q_\alpha(u) = \frac{1}{\varrho^{n+|\alpha|}}\, Q_\alpha(\nu).$$

Damit ergibt sich

$$|c_\alpha| \leqq \frac{C_1}{\varrho^n}\, \varrho^n\, \frac{1}{\varrho^{n+|\alpha|}} \to 0 \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty.$$

Da die Koeffizienten nicht von ϱ abhängen, folgt $c_\alpha = 0$ für alle α. Weiter gilt nach Fubini

$$d_\alpha = \frac{1}{\omega_{n+1}^2} \int_M d\zeta^* \int_{|u|=\varrho} \frac{\overline{\zeta - u}}{|\zeta - u|^{n+1}}\, du^*\, P_\alpha(u)$$

und nach der Cauchyschen Integralformel für linksreguläre Funktionen angewandt auf $P_\alpha(\zeta)$

$$d_\alpha = -\frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M d\zeta^* P_\alpha(\zeta).$$

Nun ist $\frac{\partial}{\partial x_j} P_{\alpha+\varepsilon_j}(z) \doteq (\alpha_j + \varepsilon_j) P_\alpha(z)$ für ein beliebiges j mit $1 \leqq j \leqq n$ [2: Lemma 16.5.6 (ii)] und daher

$$d_\alpha = -\frac{1}{\omega_{n+1}(\alpha_n + 1)} \int_M d\zeta^* \frac{\partial}{\partial \xi_n} P_{\alpha+\varepsilon_n}(\zeta).$$

Das Integral hier ist Null wegen des folgenden Lemmas (in [2: 5.229] ohne Beweis formuliert).

Lemma: *Sei*

$$\omega_{i_1\ldots i_p} := (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dz)^* \quad \text{für} \quad \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{0, \ldots, n\},$$

sei f linksregulär im Gebiet $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ und sei M_{n-p+1} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n - p + 1$ in G mit hinreichend glattem Rand. Dann gilt

$$\int_{\partial M_{n-p+1}} \omega_{i_1\ldots i_p} f = \int_{M_{n-p+1}} \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p+m+1}\, \omega_{i_1\ldots\widehat{i_m}\ldots i_p} \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}.$$

Dabei soll wie üblich das Dach über i_m bedeuten, daß dieser Index entfällt. Es sei auf $\omega_\varnothing = dz^*$ hingewiesen. Der Beweis wird später ausgeführt. Für $p = 1$ und $i_1 = n$ lautet die Aussage des Lemmas

$$\int_{\partial M} \omega_n f = -\int_{M_n} \omega_\varnothing \frac{\partial f}{\partial x_n} = -\int_{M_n} dz^* \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Wegen $\partial M_n = \varnothing$ im vorliegenden Fall ergibt sich $d_\alpha = 0$. Damit ist $n(M, z) = 0$ in der unbeschränkten Komponente des Komplements von M.

$n(M, z)$ ist auch in den anderen Komponenten des Komplements von M ganzzahlig, wenn es sich bei Überschreiten von M nur um ganze Zahlen ändert. Das ergibt sich so: Lokal wird eine hinreichend kleine Kugel K mit Mittelpunkt auf M durch M in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegt, deren Ränder durch $\partial K_1 + M_0$ und $\partial K_2 - M_0$ gebildet werden, wenn M_0 das durch K aus M ausgeschnittene Stück ist und die Numerierung entsprechend gewählt wird. Es sei etwa $n(M, z) = k \in \mathbf{Z}$ konstant in G_1. Dann ist

$$n(M, z) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_M d\zeta^* \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^{n+1}} \doteq \int_{M-M_0} + \int_{M_0} + \int_{\partial K_1} - \int_{\partial K_1}$$

und nach der Cauchyschen Integralformel in G_1

$$n(M, z) - 1 = \int_{M-M_0} - \int_{\partial K_1}.$$

Die rechte Seite ist in ganz K rechtsregulär, da die linke Seite in G_1 konstant ist, muß dies nach dem Eindeutigkeitssatz in ganz K gelten, also ist $n(M, z)$ auch in G_2 konstant. Wird übrigens M mehrfach durchlaufen, so ist dieser Schluß mehrfach anzuwenden. In G_2 ändert sich bei der obigen Betrachtung der Wert von $n(M, z)$ um 1, da dort $\int_{M_0} + \int_{\partial K_1} = 0$ ist ∎

Beweis des Lemmas: Es wird der Satz von Stokes angewendet, dabei ist $d(\omega_{i_1\ldots i_p}f)$ zu bilden. Da $\omega_{i_1\ldots i_p}$ konstante Koeffizienten hat und eine Differentialform der Stufe $n+1-(p+1)$ ist, gilt

$$d(\omega_{i_1\ldots i_p}f) = (-1)^{n-p}\,\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge df$$

$$= (-1)^{n-p} \sum_{j,k=0}^{n} e_j(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* \wedge dx_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \qquad (*)$$

Von der Summe über k sind nur die Summanden von Null verschieden, in denen k gleich einem der Indizes $i_1, \ldots, i_p, j$ ist.

Sei zuerst $k = j$, dann folgt, falls $j \neq i_1, \ldots, i_p$ ist,

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* = \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_p, j, i_{p+1}, \ldots, i_n)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

und

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})^*$$

$$= \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_p, j, i_{p+1}, \ldots, i_n)\, dx_j \wedge dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

$$= (-1)^{n-p} \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_p, j, i_{p+1}, \ldots, i_n)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \wedge dx_j.$$

Diese Summanden in $(*)$ ergeben

$$S_1 := \sum_{j \neq i_1,\ldots,i_p} e_j(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})^* \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

und wegen $\sum_{j=0}^{n} e_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = Df = 0$

$$S_1 = -\sum_{m=1}^{p} e_{i_m}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})^* \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}$$

$$= \sum_{m=1}^{p} e_{i_m}(-1)^{1+p-m} (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{i_m})^* \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}.$$

Ist nun andererseits k gleich einem der $i_1, \ldots, i_p$, etwa gleich i_m, so ist — wieder für $j \neq i_1, \ldots, i_p$ —

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* \wedge dx_{i_m}$$

$$= \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_p, j, i_{p+1}, \ldots, i_n)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \wedge dx_{i_m}$$

und

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^*$$

$$= \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, \widehat{i_m}, \ldots, i_p, j, i_{p+1}, \ldots, i_n, i_m)\, dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \wedge dx_{i_m}$$

$$= (-1)^{n-p+1+p-m} (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* \wedge dx_{i_m}.$$

Diese Summanden liefern also in $(*)$

$$S_2 := \sum_{j \neq i_1,\ldots,i_p} \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p-m+1} e_j(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}.$$

Zusammen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
d(\omega_{i_1\ldots i_p}f) &= S_1 + S_2 \\
&= \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p-m+1} \Big\{ e_{i_m}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{i_m})^* \\
&\quad + \sum_{j \neq i_1,\ldots,i_p} e_j(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_j)^* \Big\} \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}.
\end{aligned}
$$

In der geschweiften Klammer geht die Summe jetzt gerade über alle $j \neq i_1, \ldots, \widehat{i_m}, \ldots, i_p$, damit wird

$$d(\omega_{i_1\ldots i_p}f) = \sum_{m=1}^{p} (-1)^{p-m+1} (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_m}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dz)^* \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}} \blacksquare$$

LITERATUR

[1] BRACKX, F., DELANGHE, R., and F. SOMMEN: Clifford analysis (Research Notes in Mathematics 76). Boston—London—Melbourne: Pitman 1982.

[2] HABETHA, K.: Function theory in algebras. In: Complex Analysis: Methods, Trends, and Applications (Hrsg.: E. Lanckau und W. Tutschke). Berlin: Akademie-Verlag 1983, 225—237.

[3] SOMMEN, F.: Monogenic differential forms and homology theory (to appear).

Manuskripteingang: 14. 12. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. KLAUS HABETHA
Lehrstuhl II für Mathematik
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule
D-5100 Aachen, Templergraben 55