Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (3) 1986, S. 193–221

Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis zur Lösung des Goursat-Problems für quasilineare hyperbolische Systeme erster Ordnung mittels Differenzenverfahren

H.-P. Gittel

Diese Arbeit setzt die Untersuchungen [8] des Autors über die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe für quasilineare hyperbolische Systeme erster Ordnung fort. Für ein spezielles Goursat-Problem, worauf das allgemeine Problem reduziert werden konnte, wird mittels eines geeigneten Differenzenverfahrens die Lösbarkeit in der Klasse der Lipschitz-stetigen Funktionen nachgewiesen. Dabei erhält man „fortsetzbare Anfangsbedingungen". Außerdem kann noch die Eindeutigkeit der Lösung des Ausgangsproblems sowie ihre stetige Abhängigkeit von Parametern gezeigt werden, indem eine A-priori-Abschätzung für ein gewisses lineares Problem ausgenutzt wird.

Эта работа продолжает исследования [8] автора о смешанной задаче для квазилинейных гиперболических систем первого порядка. Для специальной задачи Гурса, к которой свелась общая задача, доказывается с помощью подходящего разностного метода её разрешимость в классе непрерывных по Липшицу функций. При этом получаются „продолжаемые начальные условия". При использовании априорной оценки для некоторой линейной задачи можно также показать единственность решения исходной задачи и его непрерывную зависимость от параметров.

This paper continues the author's investigations [8] on the mixed problem for quasi-linear hyperbolic systems of the first order. For a special Goursat problem to which the general problem was reduced the solvability in the class of Lipschitz continuous functions is proved by means of a suitable difference method. Thereby we obtain "continuable initial conditions". Moreover, using an a priori estimate for a certain linear problem we can show the uniqueness of the solution of the original problem and its continuous dependence on parameters.

1. Einleitung

In Fortsetzung der Abhandlung [8] des Verfassers erfolgt hier der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis zur Lösung der gemischten Anfangs-Randwertaufgabe für das quasilineare hyperbolische System:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(A^{i,j}(x, y, u^1, \ldots, u^m) \frac{\partial u^j}{\partial x} + B^{i,j}(x, y, u^1, \ldots, u^m) \frac{\partial u^j}{\partial y}\right) = F^i(x, y, u^1, \ldots, u^m) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{F}.$$

Unter den in [8] formulierten Voraussetzungen konnte das allgemeine Goursat-Problem **P I** auf ein spezielles reduziert werden, welches vom folgenden Typ war (s. auch Bemerkung 8):

P III: *Bestimme* $\mathbf{u} = (u^i) = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}$ *mit Lipschitz-stetigen Komponenten als Lösung* von

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{D}(x, y, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{F}(x, y, \mathbf{u}) \quad |f|.\ |\ddot{u}|.\ \textit{in} \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{B}^\tau = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \mid x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq \tau\lambda,\ \lambda x + y \leqq \lambda\}$$

$$(0 < \tau \leqq 1, \textit{hinreichend klein})$$

mit

$$u^i(x, 0) = g^i(x) \quad \textit{für} \quad x \in [0, 1] \textit{ und} \tag{1.3}$$

$$u^l(0, y) = H^l(y, u^1(0, y), \ldots, u^r(0, y)) \tag{1.4}$$

für $y \in [0, \lambda]$, $l = r + 1, \ldots, m$ ($\lambda > 0$, *noch zu wählender Parameter*).

$\mathbf{D}$ ist dabei eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente D^i so angeordnet sind, daß

$$\begin{aligned} D^i &\leqq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r, \\ D^l &> 0 \quad \text{für} \quad l = r + 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1.5}$$

für alle in Frage kommenden Werte von x, y, $\mathbf{u}$ gilt.

Wir werden nun einen lokalen Existenzbeweis für **P III** mittels des Differenzenverfahrens von Thomée [12] erbringen, jedoch unter unseren schwächeren Voraussetzungen. Durch unsere Lösungsmethode erhalten wir dann „*fortsetzbare Anfangsbedingungen*“ (s. FRIEDRICHS und LEWY [6]), d. h. die Lösung von **P III** bzw. des Ausgangsproblems **P I** besitzt die gleichen Regularitätseigenschaften wie die vorgeschriebenen Anfangswerte.[1])

Daneben betrachten wir noch die Eindeutigkeit der Lösung des Goursat-Problems sowie ihre Abhängigkeit von Parametern. Beide Fragestellungen können wir ziemlich einheitlich behandeln, da mittels Diskretisierung eine A-priori-Abschätzung für die Lösung eines speziellen linearen Hilfsproblems hergeleitet werden kann. Die sich dabei ergebende diskrete A-priori-Abschätzung gestattet weiterhin die Untersuchung des unmittelbar diskretisierten Ausgangsproblems **P I** wie in [3] beim Anfangswertproblem.

Diese Resultate über das Goursat-Problem ergeben zusammen mit denjenigen aus [8] analoge Ergebnisse, wie sie für das Cauchysche Anfangswertproblem bekannt sind. Sie verallgemeinern die Untersuchungen von PROUSE [11] und THOMÉE [12, 13] und stellen außerdem eine gewisse Ergänzung zu den Differenzenverfahren von BECKERT [1] für die Lösung der anderen Anfangs-Randwertaufgaben dar.

Die vorliegende Abhandlung beinhaltet den zweiten Teil der Dissertation des Verfassers [7].

2. Definitionen und Vereinbarungen

Es werden die gleichen Bezeichnungen wie in [8] verwendet. Sei $k \geqq 0$, ganzzahlig, und G ein nichtleeres beschränktes Gebiet des R^N.

Definition 1: Mit $C^k(\overline{G})$ bezeichnen wir die Klasse aller reellwertigen Funktionen, die auf $\overline{G}$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. $C^{k,1}(\overline{G})$ sind alle Funktionen aus $C^k(\overline{G})$, deren höchste Ableitungen noch einer *Lipschitzbedingung* ge-

[1]) Verfahren mit dieser Eigenschaft für das Cauchysche Anfangswertproblem s. z. B. in [1, 5].

nügen (*L-stetig* sind). Dabei bezeichne

$$L_f := \sup_{\substack{\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}\in\bar{G}\\ \mathbf{z}\neq\bar{\mathbf{z}}}} \frac{|f(\mathbf{z}) - f(\bar{\mathbf{z}})|}{|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}|} \;{}^{2)} \tag{2.1}$$

die *Lipschitzkonstante* von $f \in C^{0,1}\bar{G}$ auf $\bar{G}$.

Definition 2: Für $\mathbf{f} = (f^h)$ schreiben wir $\mathbf{f} \in C_q^k(\bar{G})$ und

$$\|\mathbf{f}\|_{C^k(\bar{G})} = \max_{h=1,\ldots,q} \|f^h\|_{C^k(\bar{G})} \;{}^{3)}, \tag{2.2}$$

falls für alle Komponenten $f^h \in C^k(\bar{G})$ gilt. Eine analoge Bezeichnungsweise gilt für die Räume $C_k^{q,1}(\bar{G})$ und für Matrizen. Weiterhin setzen wir

$$L_{\mathbf{f}} = \max_{h=1,\ldots,q} L_{f^h} \tag{2.3}$$

bei $\mathbf{f} \in C_q^{0,1}(\bar{G})$.

Definition 3: Bezüglich (1.5) definieren wir für einen m-dimensionalen Vektor $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}^- = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^+ = \begin{pmatrix} z^{r+1} \\ \vdots \\ z^m \end{pmatrix}.$$

Für eine $m \times m$-Matrix $\mathbf{K}$ sei

$$\mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} K^{1,1} & \ldots & K^{1,m} \\ \vdots & & \\ K^{r,1} & \ldots & K^{r,m} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} K^{r+1,1} & \ldots & K^{r+1,m} \\ \vdots & & \\ K^{m,1} & \ldots & K^{m,m} \end{pmatrix}.$$

Ist $\bar{\mathbf{K}}$ eine Diagonalmatrix, so schreiben wir zur Abkürzung

$$\bar{\mathbf{K}}^- = \begin{pmatrix} \bar{K}^1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \bar{K}^r \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{K}}^+ = \begin{pmatrix} \bar{K}^{r+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \bar{K}^m \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Vereinbarungen formulieren wir die Voraussetzungen an die Koeffizienten des Systems (1.2), an die Anfangswerte (1.3) und an die Randbedingungen (1.4) wie folgt.

V III: $\mathbf{D} \in C^{0,1}_{m\times m}(\bar{Q})$, $\mathbf{F} \in C^{0,1}_m(\bar{Q})$, $\mathbf{g} \in C^{0,1}_m([0,1])$, $\mathbf{H} \in C^{0,1}_{m-r}(\bar{Q}^-)$

mit

$$\bar{Q} = \{(x, y, u^1, \ldots, u^m) \in \mathsf{R}^{2+m} \mid 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sigma, \quad |\mathbf{u} - \mathbf{g}(x)| \leqq \varrho\} \;{}^{2)}$$

und

$$\bar{Q}^- = \{(y, u^1, \ldots, u^r) \in \mathsf{R}^{1+r} \mid 0 \leqq y \leqq \sigma, \quad |\mathbf{u}^- - \mathbf{g}^-(0)| \leqq \varrho\},$$

$\sigma, \varrho > 0$ reell.

In $\bar{Q}$ gelte für D^i die Anordnung (1.5).

---

[2]) Für $\mathbf{z} \in \mathsf{R}^N$ sei $|\mathbf{z}| = \max_{\nu=1,\ldots,N} |z^\nu|$.

[3]) $\|f^h\|_{C^k(\bar{G})}$ ist die übliche Maximumnorm in den Räumen $C^k(\bar{G})$ mit der Abkürzung $\|f^h\|_{\bar{G}} := \|f^h\|_{C^0(\bar{G})}$.

Für (1.3) und (1.4) seien die Kompatibilitätsbedingungen nullter Ordnung [4]) erfüllt:

$$\mathbf{g}^+(0) = \mathbf{H}\big(0, \mathbf{g}^-(0)\big). \tag{2.4}$$

Für die Diskretisierung von **P III** benötigen wir die folgenden *Differenzenoperatoren.*

Definition 4: Für eine Funktion f, die auf einer Menge $\mathfrak{M} \subseteqq \mathsf{R}^2$ definiert ist, sei

$$\Delta_x(f, s)\,(x, y) := \frac{f(x + s, y) - f(x, y)}{s}$$

der *Differenzenquotient von f in x-Richtung* für $(x, y), (x + s, y) \in \mathfrak{M}$ und

$$\Delta_y(f, s)\,(x, y) := \frac{f(x, y + s) - f(x, y)}{s}$$

derjenige *in y-Richtung* für $(x, y), (x, y + s) \in \mathfrak{M}$ mit $s \in \mathsf{R}$, $s \neq 0$.

Dabei sind für Vektoren und Matrizen die Differenzenoperationen, Differentiation und Konvergenz stets komponentenweise zu verstehen.

3. Das Differenzenverfahren für P III

3.1 Das diskretisierte Problem

Um das Goursat-Problem **P III** zu diskretisieren, führen wir die gleichen Differenzenapproximationen durch, wie sie in [11, 12] für Goursat-Probleme oder z. B. in [3] für Cauchysche Anfangswertprobleme verwendet werden. Dazu überdecken wir die (x, y)-Ebene so mit einem rechtwinkligen achsenparallelen Maschengitter der Maschenweite $h^{(n)} = \dfrac{1}{n}$ in x-Richtung der Maschenweite und $k^{(n)} = \dfrac{\lambda}{n}$ in y-Richtung für ein beliebiges natürliches n, daß

$$V^{(n)} = \{\mathfrak{P}_{\xi,\eta} = (\xi h^{(n)}, \eta k^{(n)}) \in \mathsf{R}^2 \mid \eta = 0, \ldots, n;\ \xi = 0, \ldots, n - \eta\}$$

das zugehörige *Gitterpunktnetz* in $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1$ ist. Im weiteren lassen wir, falls keine Verwechslungen auftreten können, bei $V^{(n)}, h^{(n)}, k^{(n)}$ usw. den Index n weg, weil wir zunächst die Betrachtungen für eine beliebiges aber festes n führen. Als Abkürzung schreiben wir für eine Funktion $f = f(x, y)$, die auf $\mathfrak{B}$ definiert ist, $f_{\xi,\eta} = f(\xi h, \eta k)$ auf V und

$$\begin{aligned}
\Delta_x^+ f_{\xi,\eta} &:= \Delta_x f_{\xi,\eta} := \Delta_x(f, h)\,(\xi h, \eta k)\\
\Delta_x^- f_{\xi,\eta} &:= \Delta_x f_{\xi-1,\eta} = \Delta_x(f, -h)\,(\xi h, \eta k)\\
\Delta_y^+ f_{\xi,\eta} &:= \Delta_y f_{\xi,\eta} := \Delta_y(f, k)\,(\xi h, \eta k)\\
\Delta_y^- f_{\xi,\eta} &:= \Delta_y f_{\xi,\eta-1} = \Delta_y(f, -k)\,(\xi h, \eta k).
\end{aligned}$$

Die gleichen Bezeichnungen werden natürlich auch für eine nur auf V definierte *Gitterfunktion* γ verwendet.

Bei der Diskretisierung von (1.2) verwenden wir wie in [12] als Approximation für $\dfrac{\partial}{\partial y}$ den entsprechenden Differenzenquotienten in Vorwärtsrichtung Δ_y^+. In x-Richtung jedoch hängt die Ersetzung des Differentialquotienten vom Vorzeichen der

[4]) Zu Kompatibilitätsbedingungen s. [8: Abschnitt 5].

Diagonalelemente D^i in der entsprechenden Differentialgleichung des Systems (1.2) ab. In den ersten r Gleichungen ($D^i \leqq 0$) wird $\frac{\partial}{\partial x}$ durch den Differenzenquotienten bez. x in Vorwärtsrichtung Δ_x^+, in den restlichen $(m - r)$ Gleichungen ($D^l > 0$) durch denjenigen in Rückwärtsrichtung Δ_x^- ersetzt. Wir erhalten somit folgendes Differenzengleichungssystem:

$$\Delta_y u^i_{\xi,\eta} + D^i_{\xi,\eta}\Delta_x u^i_{\xi,\eta} = F^i_{\xi,\eta}, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{3.1}$$

$$\Delta_y u^l_{\xi,\eta} + D^l_{\xi,\eta}\Delta_x^- u^l_{\xi,\eta} = F^l_{\xi,\eta}, \qquad l = r + 1, \ldots, m, \tag{3.2}$$

mit $D^i_{\xi,\eta} = D^i(\xi h, \eta k, \mathbf{u}_{\xi,\eta})$ für $i = 1, \ldots, m$ ($F^i_{\xi,\eta}$ analog). Dabei lassen wir nur solche Gitterpunkte zu, für die $(\xi h, \eta k, \mathbf{u}_{\xi,\eta}) \in \bar{Q}$ ist, d. h. nur solche ξ, η mit $0 \leqq \xi \leqq n - \eta$, $0 \leqq \eta \leqq n\frac{\sigma}{\lambda}$, $|\mathbf{u}_{\xi,\eta} - \mathbf{g}_\xi| \leqq \varrho$. Durch Einführung von

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(n)} = \{\eta \in \{0, \ldots, n\} \mid (\xi h, \eta k, \mathbf{u}_{\xi,\eta}) \in \bar{Q} \quad \text{für alle} \quad \xi = 0, \ldots, n - \eta\}$$

(*Menge der zulässigen Gitterkoordinaten in y-Richtung*) können wir

$$\eta_1 = \eta_1^{(n)} = \max\{\eta \in \{0, \ldots, n - 1\} \mid \eta' \in \mathfrak{Z}^{(n)} \quad \text{für alle } \eta' \leqq \eta\}$$

definieren.

Unter Beachtung der Definitionsbereiche für die verschiedenen Differenzenquotienten gemäß Definition 4 gelten die Gleichungen (3.1) für $\eta = 0, \ldots, \eta_1$; $\xi = 0, \ldots, n - \eta - 1$ und die Gleichungen (3.2) für $\eta = 0, \ldots, \eta_2 = \min\{\eta_1, n - 2\}$; $\xi = 1, \ldots, n - \eta - 1$. Diskretisierung von (1.3) ergibt

$$u^i_{\xi,0} = g^i_\xi, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad \text{für} \quad \xi = 0, \ldots, n, \tag{3.3}$$

und von (1.4)

$$u^l_{0,\eta} = H^l_\eta, \qquad l = r + 1, \ldots, m, \quad \text{für} \quad \eta = 0, \ldots, \eta_3 \tag{3.4}$$

mit $H^l_\eta = H^l(\eta k, \mathbf{u}^-_{0,\eta})$ und

$$\eta_3 = \eta_3^{(n)} = \max\{\eta \in \{0, \ldots, n\} \mid (\eta' k, \mathbf{u}^-_{0,\eta'}) \in \bar{Q}^- \quad \text{für alle } \eta' \leqq \eta\}.$$

(Dabei gilt stets $\eta_3 \geqq \eta_1$.)

Bemerkung 1: Für jedes n ist $\mathfrak{Z}^{(n)}$ nicht leer, da wegen (3.3) $0 \in \mathfrak{Z}^{(n)}$ ist. Auf Grund der Stetigkeitseigenschaften von $\mathbf{g}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$ und $\mathbf{H}$ läßt sich leicht nachweisen, daß für hinreichend großes n auch $1 \in \mathfrak{Z}^{(n)}$ ist.

Unter der Voraussetzung, daß für **P III** die Kompatibilitätsbedingungen nullter Ordnung (2.4) erfüllt sind, können wir nun explizit die Lösung des *diskreten Goursat-Problems* (3.1)—(3.4) bestimmen. Geeignetes Umstellen der Gleichungen ergibt nämlich ein Rekursionssystem für $u_{\xi,\eta}$ bez. η ($\mathbf{I}$ — $m \times m$-Einheitsmatrix):

$$\mathbf{u}_{\xi,0} = \mathbf{g}_\xi \quad \text{für} \quad \xi = 0, \ldots, n, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{u}^-_{\xi,\eta+1} = k\mathbf{F}^-_{\xi,\eta} - \lambda\mathbf{D}^-_{\xi,\eta}\mathbf{u}^-_{\xi+1,\eta} + (\mathbf{I}^- + \lambda\mathbf{D}^-_{\xi,\eta})\,\mathbf{u}^-_{\xi,\eta} \tag{3.5}$$

für $\eta = 0, \ldots, \eta_1$; $\quad \xi = 0, \ldots, n - \eta - 1$,

$$\mathbf{u}^+_{\xi,\eta+1} = k\mathbf{F}^+_{\xi,\eta} + \lambda\mathbf{D}^+_{\xi,\eta}\mathbf{u}^+_{\xi-1,\eta} + (\mathbf{I}^+ - \lambda\mathbf{D}^+_{\xi,\eta})\,\mathbf{u}^+_{\xi,\eta} \tag{3.6}$$

für $\eta = 0, \ldots, \eta_2$; $\quad \xi = 1, \ldots, n - \eta - 1$,

$$\mathbf{u}^+_{0,\eta+1} = \mathbf{H}_{\eta+1} \quad \text{für} \quad \eta = 0, \ldots, \eta_3 - 1.^{5)} \tag{3.7}$$

[5]) $\mathbf{u}^+_{0,0} = \mathbf{H}_0$ nach (3.4) ist durch (3.3) und (2.4) gesichert.

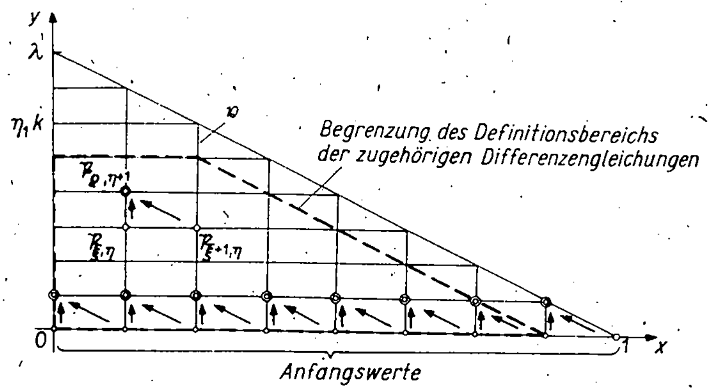

Abb. 1

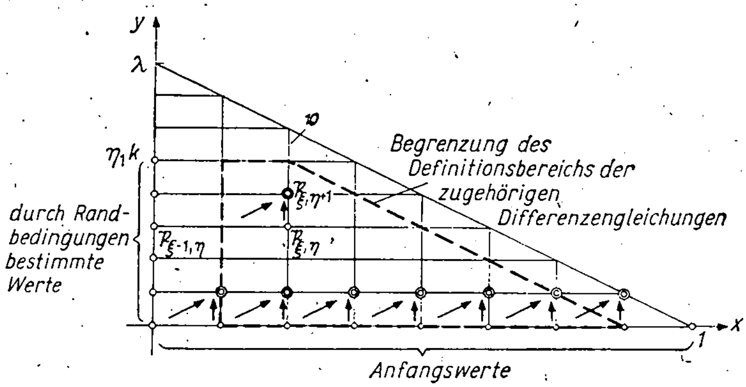

Abb. 2

Bemerkung 2: Das Differenzenverfahren nach [12] ist so angelegt, daß sich $\mathbf{u}_{\xi,\eta+1}$ stets aus den Funktionswerten von $\mathbf{u}$ in zwei zu $\mathfrak{P}_{\xi,\eta+1}$ benachbarten Gitterpunkten auf der vorangehenden Parallelen zur x-Achse: $y = \eta k$ berechnet. Dabei werden die beiden Differenzenquotienten bez. x (in Vorwärts- oder Rückwärtsrichtung) so verwendet, daß sich für $\mathbf{u}^-$ die Werte auf der y-Achse mit aus den zugehörigen Differenzengleichungen ergeben (s. Abb. 1), dagegen für $\mathbf{u}^+$ nicht und so die Randbedingungen in die Berechnungen mit eingehen (s. Abb. 2). Prouse wendet in [11] ein analoges Verfahren für hyperbolische Systeme an, die nicht unbedingt Diagonalform haben müssen. Dadurch ist das Verfahren jedoch nicht unmittelbar explizit wie in unserem Fall.

3.2 Abschätzung der ersten Differenzenquotienten

Für das Weitere setzen wir nun voraus, daß für das Verhältnis der Maschenweiten $\frac{k}{h} = \lambda$ die Beschränkung

$$\lambda \, \|\mathbf{D}\|_{\bar{Q}} \leqq 1 \tag{3.8}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 3: Durch die Beschränkung (3.8) wird erreicht, daß für die m charakteristischen Scharen[6]) des Systems (1.2) gilt:

$$-\frac{1}{\lambda} \leqq \frac{dx}{dy} = D^i \leqq \frac{1}{\lambda}.$$

Dadurch ist für jede Lösung des Anfangswertproblems (1.2), (1.3) das Abhängigkeitsintervall eines Gitterpunktes $\mathfrak{P}_{\xi,\eta}$ im numerischen Abhängigkeitsintervall dieses Punktes enthalten [4: S. 270; 7: S. 78—79]. Die Forderung (3.8) entspricht damit der *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung* [4] für die Konvergenz von Differenzenverfahren zu hyperbolischen Differentialgleichungen.

Wir werden nun wie in [12] die ersten Differenzenquotienten der Lösung $\mathfrak{u}_{\xi,\eta}$ der diskreten Anfangs-Randwertaufgabe (3.1)—(3.4) rekursiv bzw. η abschätzen, wobei es jedoch einiger anderer Schlußweisen wegen der Zulassung von Nullstellen von D^i für $i = 1, \ldots, r$ bedarf. Dabei werden die folgenden *diskreten Normen* verwendet.

Definition 5: Für eine Gitterfunktion γ sei

$$\|\Delta\gamma\|_\eta := \max_{\xi=0,\ldots,n-\eta-1} |\Delta\gamma_{\xi,\eta}| \quad \text{mit} \quad \Delta = \Delta_x, \quad \Delta = \Delta_y, \quad \text{für} \quad \eta = 0, \ldots, n-1;$$

$$\|\gamma_\eta\| := \max_{\xi=0,\ldots,n-\eta} |\gamma_{\xi,\eta}| \quad \text{für} \quad \eta = 0, \ldots, n;$$

$$\|\gamma\|_{\eta,\bar\eta} := \max_{\eta'=\eta,\ldots,\bar\eta} \|\gamma\|_{\eta'}, \quad \text{für} \quad 0 \leqq \eta \leqq \bar\eta \leqq n;$$

$$\|\gamma\|_V := \|\gamma\|_{0,n} = \max_{\substack{\xi=0,\ldots,n-\eta\\ \eta=0,\ldots,n}} |\gamma_{\xi,\eta}|.$$

Für Vektoren und Matrizen aus Gitterfunktionen sind dann diese diskreten Normen analog zur Norm (2.2) zu verstehen, also als Maximum der entsprechenden Normen aller Komponenten.

Die Voraussetzungen **V III** gestatten nun, die Differenzenquotienten wie folgt abzuschätzen.

a) *Abschätzung von* $\Delta_x \mathfrak{u}^-_{\xi,\eta}$:

Für $i = 1, \ldots, r$; $\eta = 0, \ldots, \eta_1 - 1$; $\xi = 0, \ldots, n - \eta - 2$ gilt nach (3.5)

$$\Delta_x u^i_{\xi,\eta+1} = k\Delta_x F^i_{\xi,\eta} - \lambda D^i_{\xi+1,\eta}\Delta_x u^i_{\xi+1,\eta} + (1 + \lambda D^i_{\xi,\eta})\, \Delta_x u^i_{\xi,\eta}.$$

Unter Ausnutzung der L-Stetigkeit von $\mathbf{F}$ folgt

$$|\Delta_x u^i_{\xi,\eta+1}| \leqq kL_{F^i} \max\{1, |\Delta_x \mathfrak{u}_{\xi,\eta}|\} + (|\lambda D^i_{\xi+1,\eta}| + |1 + \lambda D^i_{\xi,\eta}|)\, \|\Delta_x \mathfrak{u}^-\|_\eta$$
$$\leqq kL_F(1 + \|\Delta_x \mathfrak{u}\|_\eta) + (1 - \lambda h \Delta_x D^i_{\xi\eta})\, \|\Delta_x \mathfrak{u}^-\|_\eta.$$

Bei der Umformung des zweiten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung ist die Wahl des λ gemäß (3.8) entscheidend, denn es ergibt sich daraus $-1 \leqq \lambda D^i_{\xi,\eta} \leqq 0$. Letztendlich erhalten wir wieder wegen der L-Stetigkeit von $\mathbf{D}$

$$\|\Delta_x \mathfrak{u}^-\|_{\eta+1} \leqq \|\Delta_x \mathfrak{u}^-\|_\eta + \frac{1}{n} C_1 (1 + \|\Delta_x \mathfrak{u}\|_\eta)^2 \tag{3.9}$$

mit $C_1 = \lambda \max\{L_D, L_F\}$.

---

[6]) Zu Charakteristiken für quasilineare Systeme erster Ordnung s. z. B. [7: S. 23—26].

b) *Abschätzung von* $\Delta_y \mathbf{u}^-_{\xi,\eta}$:

Aus (3.1) folgt unmittelbar für $\eta = 0, \ldots, \eta_1$

$$\|\Delta_y \mathbf{u}^-\|_\eta \leqq \|\mathbf{F}\|_{\bar{Q}} + \|\mathbf{D}\|_{\bar{Q}} \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_\eta. \tag{3.10}$$

Bemerkung 4: Es ist in unserem Fall günstiger, abweichend von [12], zuerst $\Delta_x \mathbf{u}^-_{\xi,\eta}$ rekursiv bez. η abzuschätzen und damit anschließend unter Verwendung von (3.1) eine Abschätzung für $\Delta_y \mathbf{u}^-_{\xi,\eta}$ zu finden. Beim umgekehrten Vorgehen (s. [12]) ließe sich (3.1) wegen eventueller Nullstellen von $D^i_{\xi,\eta}$ nicht nach $\Delta_x u^i_{\xi,\eta}$ auflösen.

c) *Abschätzung von* $\Delta_x \mathbf{u}^+_{\xi,\eta}$:

Analog zu a) erhalten wir aus (3.6) für $l = r + 1, \ldots, m$; $\eta = 0, \ldots, \eta_2 - 1$; $\xi = 1, \ldots, n - \eta - 2$

$$|\Delta_x u^l_{\xi,\eta+1}| \leqq kL_F(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta) + (|\lambda D^l_{\xi,\eta}| + |1 - \lambda D^l_{\xi+1,\eta}|) \|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_\eta.$$

Unter Beachtung von $0 < \lambda D^l_{\xi+1,\eta} \leqq 1$ wegen (3.8) ergibt sich insgesamt eine ähnliche Ungleichung wie (3.9):

$$|\Delta_x \mathbf{u}^+_{\xi,\eta+1}| \leqq \|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_\eta + \frac{1}{n} C_1(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta)^2. \tag{3.11}$$

Um $\|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_{\eta+1}$ abschätzen zu können, fehlen noch Schranken für $\Delta_x u^l_{0,\eta+1}$. Dazu beachten wir die Identität

$$\Delta_x \gamma_{\xi,\eta+1} = \lambda(\Delta_y \gamma_{\xi+1,\eta} - \Delta_y \gamma_{\xi,\eta}) + \Delta_x \gamma_{\xi,\eta}$$

für

$$\eta = 0, \ldots, n - 2; \qquad \xi = 0, \ldots, n - \eta - 2$$

und erhalten unter Verwendung von (3.2), (3.4)

$$\Delta_x u^l_{0,\eta+1} = \lambda(F^l_{1,\eta} - D^l_{1,\eta} \Delta_x^- u^l_{1,\eta} - \Delta_y H_\eta{}^l) + \Delta_x u^l_{0,\eta} \quad \text{für } \eta = 0, \ldots, \eta_1 - 1.$$

Für diese η, genauer für $\eta = 0, \ldots, \eta_4 = \min\{\eta_1; \eta_3 - 1\}$, gilt nun

$$|\Delta_y H_\eta{}^l| \leqq L_{H'} \max\{1, |\Delta_y \mathbf{u}^-_{0,\eta}|\} \leqq C_2(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_\eta) \tag{3.12}$$

unter Benutzung der Abschätzung (3.10) mit $C_2 = L_H \max\{1, \|\mathbf{F}\|_{\bar{Q}}, \|\mathbf{D}\|_{\bar{Q}}\}$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} |\Delta_x u^l_{0,\eta+1}| &\leqq \lambda\, |F^l_{1,\eta}| + \lambda\, |\Delta_y H_\eta{}^l| + |1 - \lambda D^l_{1,\eta}|\, |\Delta_x u^l_{0,\eta}| \\ &\leqq C_3(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_\eta) + \beta\, |\Delta_x u^l_{0,\eta}| \end{aligned}$$

mit

$$C_3 = \lambda(\|\mathbf{F}\|_{\bar{Q}} + C_2) \quad \text{und} \quad \beta = 1 - \lambda \min_{\substack{(x,y,\mathbf{u}) \in \bar{Q} \\ l = r+1, \ldots, m}} D^l(x, y, \mathbf{u})$$

wegen (1.5), (3.8). Wie sich nun leicht durch Induktion über $\eta \leqq \eta_1 - 1$ zeigen läßt, folgt daraus

$$\begin{aligned} |\Delta_x u^l_{0,\eta+1}| &\leqq \beta^{\eta+1} |\Delta_x u^l_{0,0}| + C_3 \sum_{\eta'=0}^{\eta} \beta^{\eta-\eta'} (1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_{\eta'}) \\ &\leqq |\Delta_x \mathbf{u}_{0,0}| + C_3(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_{0,\eta}) \sum_{\eta'=0}^{\eta} \beta^{\eta'}, \end{aligned}$$

also

$$|\Delta_x \mathbf{u}^+_{0,\eta+1}| \leqq \|\Delta_x \mathbf{u}\|_0 + C_3(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_{0,\eta}) \frac{1}{1 - \beta}. \tag{3.13}$$

Bemerkung 5: Die letzte Abschätzung ist nicht möglich für $\beta \geqq 1$, d. h. für den Fall

$$\min_{\substack{(x,y,\mathbf{u})\in\bar{Q} \\ l=r+1,\ldots,m}} D^l(x, y, \mathbf{u}) \leqq 0,$$

da die geometrische Reihe $\sum_{\beta'=0}^{\infty} \beta^{\eta'}$ hierfür divergiert. Für diese Abschätzung wird also wesentlich die Positivität von $D^{r+1}, \ldots, D^m$ in $\bar{Q}$ benötigt, wie sie in (1.5) vorausgesetzt wurde.

Wegen (3.3) gilt für $\xi = 0, \ldots, n - 1$

$$|\Delta_x \mathbf{u}_{\xi,0}| = |\Delta_x \mathbf{g}_\xi| \leqq L_g, \tag{3.14}$$

so daß wir letztendlich aus (3.11) und (3.13)

$$\|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_{\eta+1} \leqq \max\left\{\|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_\eta + \frac{1}{n} C_1(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta)^2, \quad C_4(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_{0,\eta})\right\} \tag{3.15}$$

für $\eta = 0, \ldots, \eta_1 - 1$ mit $C_4 = L_g + \dfrac{1}{1-\beta} C_3$ erhalten.

Bemerkung 6: Zunächst war für die Gültigkeit von (3.11) $\eta \leqq \eta_2 - 1 = \min\{\eta_1 - 1, n - 3\}$ gefordert. Jedoch folgt im Falle $\eta_1 > n - 2$, also $\eta_1 = n - 1$, die Abschätzung (3.15) auch für $\eta = \eta_1 - 1$, da $\|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_{\eta+1} = |\Delta_x \mathbf{u}^+_{0,n-1}|$ und somit (3.13) gilt.

d) *Abschätzung von* $\Delta_y \mathbf{u}^+_{\xi,\eta}$:

Wie in Teil b) verwenden wir hierfür die entsprechenden Differenzengleichungen (3.2) und zusätzlich $\Delta_y \mathbf{u}^+_{0,\eta} = \Delta_y H_\eta$ nach (3.4). Beachten wir noch Abschätzung (3.12) für $\eta = 0, \ldots, \eta_4$, so folgt insgesamt für dieselben η (auf Grund analoger Überlegungen wie in Bemerkung 6)

$$\|\Delta_y \mathbf{u}^+\|_\eta \leqq \max\left\{\|\mathbf{F}\|_{\bar{Q}} + \|\mathbf{D}\|_{\bar{Q}} \|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_\eta, \quad C_2(1 + \|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_\eta)\right\}. \tag{3.16}$$

Auf Grund von (3.10), (3.16) ist es für den Beweis der gleichmäßigen, d. h. der von n unabhängigen Beschränktheit der ersten Differenzenquotienten von $\mathbf{u}^{(n)}_{\xi,\eta}$ bez. x und y ausreichend, die gleichmäßige Beschränktheit von

$$\|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta = \max\{\|\Delta_x \mathbf{u}^-\|_\eta, \|\Delta_x \mathbf{u}^+\|_\eta\}$$

für $\eta = 0, \ldots, \eta_1$ zu zeigen. Wegen der rekursiven Ungleichungen (3.9) und (3.15) sind für $\|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Dieser Hilfssatz wird im folgenden Abschnitt bewiesen und liefert die gesuchten Abschätzungen, wenn wir noch die Ausgangsgleichung für $\eta = 0$ (3.14) sowie (3.10) und (3.16) beachten.

Satz 1: *Für die Lösung* $\mathbf{u}$ *des diskreten Goursat-Problems* (3.1)—(3.4) *gibt es positive Konstanten* τ_0 *und* C_0, *so daß für* $\eta \leqq \min\{n\tau_0, \eta_1\}$ *gilt*

$$\|\Delta_x \mathbf{u}\|_\eta \leqq C_0, \qquad \|\Delta_y \mathbf{u}^-\|_\eta \leqq C_0,$$

sowie für $\eta \leqq \min\{n\tau_0, \eta_4\}$ *gilt*

$$\|\Delta_y \mathbf{u}^+\|_\eta \leqq C_0.$$

Dabei hängen τ_0 *und* C_0 *nicht von* n *ab, sondern nur von den gegebenen Funktionen* **D, F, H, g.**

Da wir die beiden entscheidenden Größen $\eta_1^{(n)}$ und $\eta_4^{(n)}$ nicht unmittelbar bestimmen können, suchen wir ein $\tau > 0$, so daß eine Ungleichung

$$n\tau \leqq \min \{n\tau_0, \eta_1, \eta_4\} \tag{3.17}$$

gilt. Zunächst gewinnen wir aus den Abschätzungen für $\|\Delta_y u\|_\eta$ im obigen Satz durch Induktion über η (Beweis s. [7: S. 86]), daß bei $\tau_1 = \min \left\{\tau_0, 1, \frac{\sigma}{\lambda}, \frac{\varrho}{\lambda C_0}\right\}$ für hinreichend großes n gilt $n\tau_1 < \eta_4 + 2$. Dabei sind insbesondere die Definitionen von η_1, η_3, η_4 zu beachten.

Folgerung 1: *Wird* $n \geqq \frac{4}{\tau_1}$ *und* $\tau := \frac{\tau_1}{2}$ *gewählt, so ergibt sich* (3.17) *und für alle* $\eta \leqq n\tau$ *ist*

$$\|\Delta u\|_\eta \leqq C_0 \; (\Delta = \Delta_x, \Delta_y) \tag{3.18}$$

sowie

$$\|u - g\|_\eta \leqq \varrho. \tag{3.19}$$

3.3 Zwei Hilfssätze

Wir zeigen in diesem Abschnitt die Gültigkeit des zum Beweis von Satz 1 notwendigen Hilfssatzes über die gleichmäßige Beschränktheit endlicher Zahlenfolgen, die rekursiven Ungleichungen genügen. In Anlehnung an [12: S. 83–85] benötigen wir zunächst folgenden Hilfssatz, der jedoch auf etwas anderem Wege bewiesen wird (s. z. B. [1: S. 45–46]).

Hilfssatz 1: *Seien* $n, \nu_0 = \nu_0^{(n)}$ *natürliche Zahlen*, $a_\nu \geqq 0$ *für* $\nu = 0, \ldots, \nu_0$. *Weiterhin gelte für* $\nu = 0, \ldots, \nu_0 - 1$

$$a_{\nu+1} \leqq a_\nu + \frac{C_0}{n} (1 + a_\nu)^2 \tag{3.20}$$

mit einer von n unabhängigen positiven Konstanten C_0.

Dann ist mit $\omega_0 = \dfrac{1}{2C_0(1 + a_0)} > 0$ *die Ungleichung*

$$a_\nu \leqq 1 + 2a_0 \tag{3.21}$$

für alle $\nu \leqq \min \{n\omega_0, \nu_0\}$ *erfüllt.*

Zusatz: Gilt (3.20) mit $C_0 = 0$, so folgt (3.21) unmittelbar, wobei ω_0 beliebig positiv gewählt werden kann.

Beweis: (3.20) läßt sich als Differenzenungleichung schreiben:

$$\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{\frac{1}{n}} \leqq C_0(1 + a_\nu)^2.$$

Betrachten wir nun die Lösung $A(t)$ der entsprechenden Differentialgleichung

$$\frac{dA}{dt} = C_0(1 + A)^2$$

mit dem Anfangswert $A(0) = a_0$, so majorisieren in einer Umgebung von 0 ihre Funktionswerte $A_\nu := A\left(\nu \frac{1}{n}\right)$ gerade a_ν. Das folgt durch Induktion über ν wegen der Monotonie von A. Die explizite Darstellung von A liefert $A(t) \leqq A(\omega_0) = 1 + 2a_0$ für alle $t \in [0, \omega_0]$ und damit (3.21) ∎

Hilfssatz 2: *Seien $n, \nu_1 = \nu_1^{(n)}$ natürliche Zahlen, $b_\nu^- \geqq 0, b_\nu^+ \geqq 0, b_\nu = \max\{b_\nu^-, b_\nu^+\}$ für $\nu = 0, \ldots, \nu_1$. Es mögen weiterhin für $\nu = 0, \ldots, \nu_1 - 1$ die beiden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} b_{\nu+1}^- &\leqq b_\nu^- + \frac{C_1}{n}(1 + b_\nu)^2, \\ b_{\nu+1}^+ &\leqq \max\left\{b_\nu^+ + \frac{C_1}{n}(1 + b_\nu)^2, \quad C_2(1 + \max_{\nu'=0,\ldots,\nu} b_{\nu'})\right\} \end{aligned} \tag{3.23}$$

mit von n unabhängigen Konstanten $C_1 \geqq 0$, $C_2 \geqq 1$ gelten.

Dann gibt es ein $\omega = \omega(b_0, C_1, C_2) > 0$ und ein $C = C(b_0, C_1, C_2)$ mit

$$b_\nu \leqq C \quad \text{für alle} \quad \nu \leqq \min\{n\omega, \nu_1\}. \tag{3.24}$$

Beweis: Wir definieren neue Folgen B_ν^- und B_ν^+ als Majoranten zu b_ν^- und b_ν^+. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} B_0^\pm &= b_0^\pm, \quad B_\nu = \max\{B_\nu^-, B_\nu^+\} \qquad (\nu = 0, \ldots, \nu_1), \\ B_{\nu+1}^- &= B_\nu^- + \frac{C_1}{n}(1 + B_\nu)^2, \\ B_{\nu+1}^+ &= \max\left\{B_\nu^+ + \frac{C_1}{n}(1 + B_\nu)^2, \quad C_2(1 + B_{\nu+1}^-)\right\} \qquad (\nu = 0, \ldots, \nu_1 - 1). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Durch Induktion über ν folgt dann, daß stets $\max\limits_{\nu'=0,\ldots,\nu} b_{\nu'}^\pm \leqq B_\nu^\pm$ gilt. Deshalb ist es ausreichend, die behauptete Abschätzung (3.24) für B_ν zu beweisen. Dies geschieht wie in [12: Lemma 7.2]. Dazu wird die Maximumbildung für $B_{\nu+1}^+$ in der Rekursionsformel (3.25) aufgelöst und für die beiden entstehenden Fälle jeweils Hilfssatz 1 geeignet angewendet (ausführlich s. [7: S. 89—91]) ∎

4. Konvergenz des Differenzenverfahrens

Wir werden nun zeigen, daß die im vorangehenden Abschnitt erhaltenen Ergebnisse ausreichen, um die Existenz einer Lösung des Goursat-Problems **P III** nachzuweisen.

Nach einer geeigneten Fortsetzung der Lösung $\mathbf{u}_{\xi,\eta}^{(n)}$ des diskreten Goursat-Problems (3.1)—(3.4) auf ganz $\mathfrak{V}^\tau$ erhalten wir aus (3.18), (3.19) die gleichmäßige Beschränktheit der entstehenden Funktionenfolge und der zugehörigen Differenzenquotienten (τ gemäß Folgerung 1 gewählt). Für den Nachweis einer stetig differenzierbaren Lösung einer gemischten Anfangs-Randwertaufgabe vom Typ **P III** waren z. B. in [12] noch die recht umfangreichen Abschätzungen der Differenzenquotienten zweiter Ordnung von $\mathbf{u}_{\xi,\eta}^{(n)}$ erforderlich. Wir benötigen in unserem Fall diese jedoch nicht, da eine Lösung von **P III** nur f. ü. in $\mathfrak{V}^\tau$ (1.2) genügt. Wie wir zeigen werden, ergibt sich nämlich die gleichmäßige Konvergenz einer Teilfolge der entstehenden Funktionenfolge und gleichzeitig im Raum $L^2(\mathfrak{V}^\tau)$ die schwache Konvergenz der entsprechenden Folge von Differenzenquotienten.

4.1 Erweiterungsoperatoren

Wir betrachten die $\mathfrak{u}_{\xi,\eta}$, $\Delta\mathfrak{u}_{\xi,\eta}$ nur auf $V \cap \mathfrak{B}^\tau$, und von diesen Werten ausgehend werden wir diese Funktionen zunächst auf ganz V fortsetzen und anschließend auf ganz $\mathfrak{B}$.

Sei γ eine Gitterfunktion, die für alle $\mathfrak{P}_{\xi,\eta} \in V$ mit $\eta \leqq n\tau$ definiert ist. Wir setzen

$$\gamma_{\xi,\eta} := \gamma_{\xi,[n\tau]} \quad \text{für} \quad \eta = [n\tau] + 1, \ldots, n; \qquad \xi = 0, \ldots, n - \eta.^{7)} \tag{4.1}$$

Falls γ zusätzlich nicht definiert ist für $\xi = 0$ oder $\xi = n - \eta$, so wird

$$\gamma_{0,\eta} := \gamma_{1,\eta} \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma_{n-\eta,\eta} := \gamma_{n-\eta-1,\eta} \tag{4.2}$$

gesetzt. Die *Erweiterung* von γ zu einer auf $\mathfrak{B}$ stetigen Funktion $\mathcal{E}\gamma = \mathcal{E}^{(n)}\gamma^{(n)}$ erfolgt gemäß [12: S. 72]. Dazu triangulieren wir $\mathfrak{B}$ mittels der $3(n + 1)$ Geraden

$$x = h^{(n)}\nu, \quad y = k^{(n)}\nu, \quad \lambda x + y = \nu k^{(n)} \quad \text{mit} \quad \nu = 0, \ldots, n$$

und erhalten für jedes natürliche n die Darstellung

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\eta=0}^{n-1} \bigcup_{\xi=0}^{n-\eta-1} \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{+} \cup \bigcup_{\eta=1}^{n-1} \bigcup_{\xi=1}^{n-\eta} \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{-}. \tag{4.3}$$

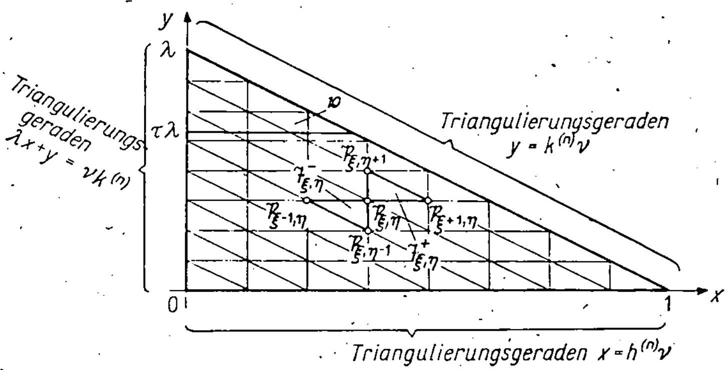

Abb. 3

Dabei sind $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{+} = \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{(n)+}$ bzw. $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{-} = \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{(n)-}$ die durch die *Triangulation* entstehenden Dreiecke mit den Eckpunkten

$$\mathfrak{P}_{\xi,\eta}, \mathfrak{P}_{\xi+1,\eta}, \mathfrak{P}_{\xi,\eta+1} \; (\eta = 0, \ldots, n - 1; \xi = 0, \ldots, n - \eta - 1)$$

bzw.

$$\mathfrak{P}_{\xi,\eta}, \mathfrak{P}_{\xi-1,\eta}, \mathfrak{P}_{\xi,\eta-1} (\eta = 1, \ldots, n - 1; \xi = 1, \ldots, n - \eta)$$

(s. Abb. 3). Der Wert von $\mathcal{E}\gamma$ in einem beliebigen Punkte (x, y) des Dreiecks $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{\pm}$ wird durch lineare Interpolation aus den Werten $\gamma_{\xi,\eta}, \gamma_{\xi\pm1,\eta}, \gamma_{\xi,\eta\pm1}$ in den drei zugehörigen Eckpunkten bestimmt, so daß gilt

$$\mathcal{E}\gamma(x, y) = \gamma_{\xi,\eta} + (x - \xi h)\, \Delta_x^{\pm}\gamma_{\xi,\eta} + (y - \eta k)\, \Delta_y^{\pm}\gamma_{\xi,\eta} \tag{4.4}$$

---

7) Für eine reelle Zahl t ist $[t]$ der ganze Teil von t, d. h. diejenige ganze Zahl, für die $[t] \leq t < [t] + 1$ gilt.

(jeweils für die entsprechenden ξ und η).[8]) Damit ist $\mathscr{E}\gamma$ stückweise linear und folglich L-stetig auf $\mathfrak{B}$ mit (s. [7: S. 96—97])

$$L_{\mathscr{E}\gamma} \leqq 2 \max \{\|\Delta_x\gamma\|_V, \|\Delta_y\gamma\|_V\}. \tag{4.5}$$

Unmittelbar aus der Definition sieht man, daß der *Erweiterungsoperator* $\mathscr{E}$ linear ist und daß er die Maximumnorm einer Gitterfunktion γ erhält:

$$\|\mathscr{E}\gamma\|_{\mathfrak{B}} = \|\gamma\|_V. \tag{4.6}$$

Desweiteren ist $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{(n)}$ in gewisser Weise mit den Differenzenoperatoren vertauschbar, wie wir jetzt zeigen werden.

Hilfssatz 3: *Für eine beliebige Gitterfunktion $\gamma^{(n)}$ gilt*

$$\mathscr{E}^{(n)}(\Delta_x^{(n)}\gamma^{(n)})\,(x, y) = \Delta_x(\mathscr{E}^{(n)}\gamma^{(n)}, h^{(n)})\,(x, y), \tag{4.7}$$

falls $(x, y), (x + h^{(n)}, y) \in \mathfrak{B}$ sind, und

$$\mathscr{E}^{(n)}(\Delta_y^{(n)}\gamma^{(n)})\,(x, y) = \Delta_y(\mathscr{E}^{(n)}\gamma^{(n)}, k^{(n)})\,(x, y), \tag{4.8}$$

falls $(x, y), (x, y + k^{(n)}) \in \mathfrak{B}$ sind.

Beweis: Nach der Darstellung (4.3) gibt es im Fall $(x, y), (x + h, y) \in \mathfrak{B}$ ein Dreieck $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}$ mit $\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = \mathfrak{T}^+_{\xi,\eta}$ oder $\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = \mathfrak{T}^-_{\xi,\eta}$, so daß $(x, y) \in \mathfrak{T}_{\xi,\eta}$ und $(x + h, y) \in \mathfrak{T}_{\xi+1,\eta}$ ist. Unter Verwendung von (4.4) erhalten wir (4.7), denn

$$\begin{aligned}\Delta_x(\mathscr{E}\gamma, h)\,(x, y) &= \frac{1}{h}\left(\gamma_{\xi+1,\eta} + (x - \xi h)\,\Delta_x^\pm\gamma_{\xi+1,\eta} + (y - \eta k)\,\Delta_y^\pm\gamma_{\xi+1,\eta}\right)\\ &\quad - \frac{1}{h}\left(\gamma_{\xi,\eta} + (x - \xi h)\,\Delta_x^\pm\gamma_{\xi,\eta} + (y - \eta k)\,\Delta_y^\pm\gamma_{\xi,\eta}\right)\\ &= \mathscr{E}(\Delta_x\gamma)\,(x, y).\end{aligned}$$

Dabei ist noch die Vertauschbarkeit der verschiedenen Differenzenoperatoren miteinander zu beachten. Formel (4.8) folgt analog ∎.

In Analogie zu $\mathscr{E}$ definieren wir auch Erweiterungsoperatoren $\mathscr{E}_x$ und $\mathscr{E}_y$. Dabei wird eine Gitterfunktion φ, welche in $\xi h \in [0, 1]$, $\xi = 0, \ldots, n$, auf der x-Achse definiert ist, wiederum durch lineare Interpolation zu einer stetigen Funktion $\mathscr{E}_x\varphi$ auf $[0, 1]$ mit $\mathscr{E}_x\varphi(\xi h) = \varphi_\xi$ fortgesetzt. Die Definition von $\mathscr{E}_y\psi$ erfolgt in derselben Weise für solche ψ, die in $\eta k \in [0, \lambda]$, $\eta = 0, \ldots, n$, auf der y-Achse definiert sind. $\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_x^{(n)}$ und $\mathscr{E}_y = \mathscr{E}_y^{(n)}$ haben somit entsprechende Eigenschaften, wie sie oben für $\mathscr{E}$ festgestellt wurden. Daneben gelten noch gewisse Konsistenzeigenschaften [7: S. 98—100; 12: S. 73].

4.2 Konvergenzsätze

Zunächst gewinnen wir unmittelbar aus den Ungleichungen (3.18), (3.19) den folgenden Satz.

Satz 2: *Die Folge der Lösungen $\{\mathfrak{u}^{(n)}_{\xi,\eta}\}_{n\geqq n_0}$ des diskreten Goursat-Problems* (3.1)—(3.4), *entsprechend der Festlegung* (4.1), (4.2) *auf ganz $V^{(n)}$ fortgesetzt, enthält eine Teilfolge $\{\mathfrak{u}^{(n')}_{\xi,\eta}\}_{n'\geqq n_0}$, mit*

$$\mathscr{E}^{(n')}\mathfrak{u}^{(n')} \rightrightarrows \bar{\mathfrak{u}} \quad \text{auf } \mathfrak{B} \quad \text{für} \quad n' \to \infty.^{9)} \tag{4.9}$$

---

[8]) Diese abkürzende Schreibweise bedeutet, daß die Formel mit den oberen Zeichen für $(x, y) \in \mathfrak{T}^+_{\xi,\eta}$ und die mit den unteren Zeichen für $(x, y) \in \mathfrak{T}^-_{\xi,\eta}$ gelten soll.

[9]) $\rightrightarrows$ bezeichnet die gleichmäßige Konvergenz.

Dabei ist $\bar{\mathfrak{u}} \in C_m^{0,1}(\mathfrak{B})$ *und*

$$\|\bar{\mathfrak{u}} - \mathfrak{g}\|_{\mathfrak{B}} \leqq \varrho. \tag{4.10}$$

Beweis: a) Unter Verwendung von (4.6) folgt aus der Abschätzung (3.19)

$$\|\mathscr{E}\mathfrak{u} - \mathscr{E}_x\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathfrak{u} - \mathfrak{g}\|_V \leqq \varrho \tag{4.11}$$

und weiterhin aus (4.5) und (3.18)

$$L_{\mathscr{E}u} \leqq 2 \max \{\|\Delta_x\mathfrak{u}\|_V, \|\Delta_y\mathfrak{u}\|_V\} \leqq 2C_0. \tag{4.12}$$

b) Da außerdem noch

$$\|\mathscr{E}_x\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathfrak{g}\|_V = \max_{\xi=0,\dots,n} |\mathfrak{g}_\xi| \leqq \|\mathfrak{g}\|_{[0,1]}$$

gilt, liefern die beiden Ungleichungen aus a) die gleichmäßige Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit der Folge $\{\mathscr{E}^{(n)}u^{(n)i}\}_{n\geqq n_0}$ auf $\mathfrak{B}$ für jedes $i = 1, \dots, m$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli [10: S. 35] folgt dann die Konvergenzaussage (4.9). Die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge und (4.12) ergeben sofort auch die L-Stetigkeit der Grenzfunktion $\bar{\mathfrak{u}}$.

c) Nach einer Konsistenzeigenschaft unseres Differenzenverfahrens [12: Lemma 3.4] haben wir $\mathscr{E}_x^{(n)}\mathfrak{g}^{(n)} \rightrightarrows \mathfrak{g}$ auf $[0, 1]$ für $n \to \infty$, womit aus (4.11) die Ungleichung (4.10) folgt ∎

Unser Ziel ist es nun, nachzuweisen, daß eine solche Grenzfunktion $\bar{\mathfrak{u}} \in C_m^{0,1}(\mathfrak{B})$ aus Satz 2 eine Lösung unseres Goursat-Problems **P III** in $\mathfrak{B}^\tau$ darstellt.

Wegen (4.10) können wir für eine auf $\bar{Q}$ definierte Funktion Z die Funktionswerte $Z(x, y, \bar{\mathfrak{u}}(x, y))$ mit $(x, y) \in \mathfrak{B}^\tau$ bilden und die Konvergenz der entsprechenden erweiterten Gitterfunktion gegen $Z[\bar{\mathfrak{u}}]$[10]) untersuchen. Diese Betrachtungen liefern dann auch die Konvergenz der Koeffizienten der Differenzengleichungen (3.1), (3.2) und der diskreten Randbedingungen (3.4) gegen die entsprechenden Koeffizienten von (1.2) bzw. (1.4).

Satz 3: *Sei* $Z \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $Z_{\xi,\eta}^{(n')}$ *die zu der Teilfolge aus Satz 2 gehörige Gitterfunktion auf* $V^{(n')}$ *mit*

$$Z_{\xi,\eta}^{(n)} = Z(\xi h^{(n)}, \eta k^{(n)}, \mathfrak{u}_{\xi,\eta}^{(n)}) \quad \text{für} \quad \eta = 0, \dots, [\tau, n]; \qquad \xi = 0, \dots, n - \eta.$$

Dann gilt

$$\mathscr{E}^{(n')}Z^{(n')} \rightrightarrows Z[\bar{\mathfrak{u}}] \quad \text{auf } \mathfrak{B}^\tau \quad \text{für} \quad n' \to \infty.$$

Beweis: a) Gemäß der Darstellung (4.3) finden wir für $(x, y) \in \mathfrak{B}^\tau$ zu jedem natürlichen n ein Dreieck $\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{(n)+}$ $(\eta \leqq [\tau n])$ oder $\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^{(n)-}$ $(\eta \leqq [\tau n] + 1)$ mit $(x, y) \in \mathfrak{T}_{\xi,\eta}(\xi = \xi^{(n)}, \eta = \eta^{(n)})$. In diesem Dreieck $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}$ gewinnen wir die erforderlichen Abschätzungen (s. auch Abb. 3).

b) Aus (4.4), der L-Stetigkeit von Z und Folgerung 1 ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} |\mathscr{E}Z(x; y) - Z_{\xi,\eta}| &\leqq h|\Delta_x^{\pm} Z_{\xi,\eta}| + k\,|\Delta_y^{\pm} Z_{\xi,\eta}| \\ &\leqq hL_Z \max\{1, |\Delta_x^{\pm}\mathfrak{u}_{\xi,\eta}|\} + kL_Z \max\{1, |\Delta_y^{\pm}\mathfrak{u}_{\xi,\eta}|\} \\ &\leqq (h + k)\, L_Z(1 + C_0). \end{aligned}$$

[10]) $Z[\bar{\mathfrak{u}}] := Z(\cdot, \cdot, \bar{\mathfrak{u}}(\cdot, \cdot))$.

Andererseits haben wir für $\eta \leqq n\tau$

$$\begin{aligned}&|Z_{\xi,\eta} - Z(x, y, \bar{\mathfrak{u}}(x, y))| \\ &\leqq L_Z \max \{|\xi h - x|, |\eta k - y|, |\mathfrak{u}_{\xi,\eta^*} - \bar{\mathfrak{u}}(x, y)|\} \\ &\leqq L_Z(h + k + |\mathscr{E}\mathfrak{u}(\xi h, \eta k) - \bar{\mathfrak{u}}(\xi h, \eta k)| + |\bar{\mathfrak{u}}(\xi h, \eta k) - \bar{\mathfrak{u}}(x, y)|) \\ &\leqq L_Z(1 + \lambda)(1 + L_{\bar{\mathfrak{u}}}) \frac{1}{n} + L_Z \|\mathscr{E}\mathfrak{u} - \bar{\mathfrak{u}}\|_{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

Für $\eta = [n\tau] + 1$ (nur möglich bei $\mathfrak{T}_{\xi,\eta} = \mathfrak{T}_{\xi,\eta}^-$) finden wir wegen (4.1) dieselbe Abschätzung.

c) Für die Teilfolge $\{\mathfrak{u}_{\xi,\eta}^{(n')}\}_{n' \geqq n_0}$ aus Satz 2 folgt für alle $(x, y) \in \mathfrak{B}^\tau$

$$\begin{aligned}&|\mathscr{E}^{(n')}Z^{(n')}(x, y) - Z(x, y, \bar{\mathfrak{u}}(x, y))| \\ &\leqq L_Z(1 + \lambda)(2 + C_0 + L_{\bar{\mathfrak{u}}}) \frac{1}{n'} + L_Z \|\mathscr{E}^{(n')}\mathfrak{u}^{(n')} - \bar{\mathfrak{u}}\|_{\mathfrak{B}}\end{aligned}$$

und somit die Behauptung ∎

Wir benötigen noch eine Aussage über die Konvergenz von Produkten aus Gitterfunktionen.

Hilfssatz 4: *Seien $\gamma^{(n)}$, $\bar{\gamma}^{(n)}$ zwei Gitterfunktionen auf $V^{(n)} \cap \mathfrak{B}^\tau$, für die*

$$\mathscr{E}^{(n)}\gamma^{(n)} \rightrightarrows f \quad \textit{auf} \quad \mathfrak{B}^\tau \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

und

$$\|\mathscr{E}^{(n)}\bar{\gamma}^{(n)}\|_{\mathfrak{B}} \leqq C \quad \textit{für alle} \quad n \geqq n_0 \quad (C \textit{ unabhängig von } n)$$

gilt. Dann folgt

$$\|\mathscr{E}^{(n)}(\gamma^{(n)}\bar{\gamma}^{(n)}) - f\mathscr{E}^{(n)}\bar{\gamma}^{(n)}\|_{\mathfrak{B}^\tau} \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Beweis: a) Sei $(x, y) \in \mathfrak{B}^\tau$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&|\mathscr{E}(\gamma\bar{\gamma})(x, y) - f(x, y)\,\mathscr{E}\bar{\gamma}(x, y)| \\ &\leqq |\mathscr{E}(\gamma\bar{\gamma})(x, y) - \gamma_{\xi,\eta}\mathscr{E}\bar{\gamma}(x, y)| + \|\mathscr{E}\bar{\gamma}\|_{\mathfrak{B}}\,|\gamma_{\xi,\eta} - f(x, y)|,\end{aligned}$$

wobei ξ, η diejenigen Gitterkoordinaten sein sollen, für die das Dreieck $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}$ den Punkt (x, y) enthält (s. Teil a) des letzten Beweises).

b) Nach (4.4) haben wir in $\mathfrak{T}_{\xi,\eta}$

$$\mathscr{E}(\gamma\bar{\gamma})(x, y) - \gamma_{\xi,\eta}\mathscr{E}\bar{\gamma}(x, y) = (x - \xi h)\,\bar{\gamma}_{\xi\pm1,\eta}\Delta_x^\pm\gamma_{\xi,\eta} + (y - \eta k)\,\bar{\gamma}_{\xi,\eta\pm1}\Delta_y^\pm\bar{\gamma}_{\xi,\eta}$$

und folglich mit (4.6)

$$\begin{aligned}&|\mathscr{E}(\gamma\bar{\gamma})(x, y) - \gamma_{\xi,\eta}\mathscr{E}\bar{\gamma}(x, y)| \\ &\leqq \|\bar{\gamma}\|_V(|\gamma_{\xi\pm1,\eta} - \gamma_{\xi,\eta}| + |\gamma_{\xi,\eta\pm1} - \gamma_{\xi,\eta}|) \\ &\leqq \|\mathscr{E}\bar{\gamma}\|_{\mathfrak{B}}\left(|\gamma_{\xi\pm1,\eta} - f(x, y)| + 2\,|f(x, y) - \gamma_{\xi,\eta}| + |\gamma_{\xi,\eta\pm1} - f(x, y)|\right).\end{aligned}$$

c) Wegen der Wahl von ξ, η gilt

$$|x - \xi' h| \leqq h, \qquad |y - \eta' k| \leqq k \quad \text{für} \quad \xi' = \xi, \xi \pm 1; \quad \eta' = \eta, \eta \pm 1.$$

Daraus folgt

$$|\gamma_{\xi',\eta'} - f(x, y)| \leqq |\mathscr{E}\gamma(\xi'h, \eta'k) - f(\xi'h, \eta'k)| + |f(\xi'h, \eta'k) - f(x, y)|$$
$$\leqq \|\mathscr{E}\gamma - f\|_{\mathfrak{B}^r} + \frac{\varepsilon}{10C}$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ bei hinreichend kleinem h und k, wenn wir die gleichmäßige Stetigkeit der Grenzfunktion f auf $\mathfrak{B}^r$ verwenden. (Hier ist wie in Teil b) des letzten Beweises wieder (4.1) zu beachten.)

d) Aus a)—c) ergibt sich

$$|\mathscr{E}^{(n)}(\gamma^{(n)}\bar{\gamma}^{(n)})(x, y) - (f \cdot \mathscr{E}^{(n)}\bar{\gamma}^{(n)})(x, y)| \leqq 5C \|\mathscr{E}^{(n)}\gamma^{(n)} - f\|_{\mathfrak{B}^r} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für hinreichend großes n, unabhängig von $(x, y) \in \mathfrak{B}^r$ ▮

Weiterhin ist es notwendig, das Verhalten von $\mathscr{E}^{(n)}(\Delta^{(n)}\mathfrak{u}^{(n)})$ für $n \to \infty$ zu untersuchen. Wir werden dabei auf die schwache Konvergenz einer Teilfolge im $L^2(\mathfrak{B}^r)$ gegen die entsprechende Ableitung von $\bar{\mathfrak{u}}$ schließen können. Diese Konvergenz werden wir mit $\rightharpoonup$ bezeichnen und mit $\langle\cdot, \cdot\rangle$ das Skalarprodukt im $L^2(\mathfrak{B}^r)$ (Definitionen s. z. B. [10: S 68, 96]).

Satz 4: *Für die der Teilfolge aus Satz 2 entsprechenden Folge* $\{\mathscr{E}^{(n')}(\Delta^{(n')}\mathfrak{u}^{(n')})\}_{n' \geq n}$, *gilt*

$$\mathscr{E}^{(n')}(\Delta^{(n')}\mathfrak{u}^{(n')}) \rightharpoonup \partial\bar{\mathfrak{u}} \quad \textit{für} \quad n' \to \infty.$$

(Hier ist $\partial = \dfrac{\partial}{\partial x}$ für $\Delta = \Delta_x$ bzw. $\partial = \dfrac{\partial}{\partial y}$ für $\Delta = \Delta_y$ zu setzen.)

Beweis: a) Für $f \in L^2(\mathfrak{B}^r)$ und $s^{(n)} = h^{(n)}$ *bei* $\Delta = \Delta_x$ *bzw.* $s^{(n)} = k^{(n)}$ *bei* $\Delta = \Delta_y$ haben wir zunächst die Abschätzung

$$|\langle\mathscr{E}^{(n)}(\Delta^{(n)}u^{(n)i}) - \partial\bar{\mathfrak{u}}^i, f\rangle|$$
$$\leqq |\langle\mathscr{E}^{(n)}(\Delta^{(n)}u^{(n)i}) - \Delta(\bar{\mathfrak{u}}^i, s^{(n)}), f\rangle| + |\langle\Delta(\bar{\mathfrak{u}}^i, s^{(n)}) - \partial u^i, f\rangle| \tag{4.13}$$

für jedes $i = 1, \ldots, m$. Wir brauchen nur den ersten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung zu untersuchen, da der zweite Summand wegen der L-Stetigkeit von $\bar{\mathfrak{u}}$ gegen 0 konvergiert [7: S. 21].

b) Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathfrak{G}^r)$, d. h. f möge in $\mathfrak{G}^r := \operatorname{int} \mathfrak{B}^r$ unendlich oft differenzierbar und $\operatorname{supp} f = \overline{\{(x, y) \in \mathfrak{G}^r \mid f(x, y) \neq 0\}}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{G}^r$ sein. Dann erreicht man für hinreichend kleines $s = s^{(n)}$, daß $(x + s, y)$, $(x, y + s) \in \mathfrak{G}^r$ bei $(x, y) \in \operatorname{supp} f$ ist. Für diese s und eine über $\mathfrak{B}^r$ integrierbare Funktion g gilt das Analogon zur Formel der partiellen Integration

$$\iint_{\mathfrak{B}^r} \Delta(g, s)(x, y) f(x, y)\, dx\, dy = -\iint_{\mathfrak{B}^r} g(x, y)\, \Delta(f, -s)(x, y)\, dx\, dy,$$

woraus folgt

$$\left|\iint_{\mathfrak{B}^r} \Delta(g, s)(x, y) f(x, y)\, dx\, dy\right| \leqq \|\partial f\|_{\mathfrak{B}^r} \iint_{\mathfrak{B}^r} |g(x, y)|\, dx\, dy.$$

c) Wenden wir jetzt die letzte Ungleichung mit $g := \mathscr{E}u^i - \bar{u}^i$ für $i = 1, \ldots, m$ an, so erhalten wir unter Beachtung von Hilfssatz 3

$$|\langle \mathscr{E}(\Delta u^i) - \Delta(\bar{u}^i, s), f\rangle| = \left|\iint_{\mathfrak{B}^r} \Delta(\mathscr{E}u^i - \bar{u}^i, s)\,(x, y)\,f(x, y)\,dx\,dy\right|$$
$$\leq \|\partial f\|_{\mathfrak{B}^r}\,\|\mathscr{E}u^i - \bar{u}^i\|_{\mathfrak{B}^r}\cdot C.$$

Dabei ist $C = \iint_{\mathfrak{B}^r} dx\,dy$ sowie n hinreichend groß gewählt. Aus dieser Ungleichung folgt mit Satz 2 für beliebiges, aber festes $f \in C_0^\infty(\mathfrak{G}^r)$

$$|\langle \mathscr{E}^{(n')}(\Delta^{(n')}u^{(n')i}) - \Delta(\bar{u}^i, s^{(n')}), f\rangle| \to 0 \quad \text{bei} \quad n' \to \infty.$$

d) Die Ausdehnung dieses Resultats auf $f \in L^2(\mathfrak{B}^r)$ erhält man in bekannter Weise [14: S. 213] aus der Dichtheit der Menge $C_0^\infty(\mathfrak{G}^r)$ im Raum $L^2(\mathfrak{B}^r)$, da $|\mathscr{E}(\Delta \mathbf{u}) - \Delta(\bar{\mathbf{u}}, s)|$ auf $\mathfrak{B}^r$ gleichmäßig beschränkt ist durch $C_0 + L_{\bar{u}}$ wegen (4.6) und (3.18). Aus (4.13) folgt dann die Behauptung des Satzes ∎

Bemerkung 7: Auch dann, wenn in Satz 3 die Werte von $Z_{\xi,\eta}^{(n)}$ für $\xi = 0$ oder $\xi = n - \eta$ nicht in der dort angegebenen Weise festgelegt werden, sondern durch Fortsetzung gemäß (4.2) definiert sind, bleibt die Behauptung des Satzes richtig. Weiterhin gilt dieser, falls Δ_x durch $\Delta_{\bar{x}}$ ersetzt wird (Verwendung der entsprechenden Modifikation von Formel (4.7)) und falls $\Delta_y \mathbf{u}_{0,\eta} = \Delta_y \mathbf{u}_{1,\eta}$ gemäß (4.2) festgelegt ist.

4.3 Existenzsätze

Wir betrachten gemäß Satz 2 die Teilfolge von Lösungen $\{\mathbf{u}_{\xi,\eta}^{(n')}\}_{n' \geq n_0'}$ des diskreten Anfangs-Randwertproblems (3.1)—(3.4) für $\eta \leq n'\tau$ und führen dann die entsprechenden Fortsetzungen von (3.1), (3.2) auf $\mathfrak{B}$, von (3.3) auf [0, 1] der x-Achse und von (3.4) auf $[0, \lambda]$ der y-Achse durch.

Die Sätze der beiden vorangegangenen Abschnitte gestatten jetzt, den Grenzübergang $n' \to \infty$ durchzuführen und den folgenden Existenzsatz zum Goursat-Problem **P III** aufzustellen.

Satz 5: *Es seien die Voraussetzungen* **V III** *erfüllt. Dann ist die Grenzfunktion* $\bar{\mathbf{u}}$ *aus Satz* 2 *eine Lösung von* **P III** *in* $\mathfrak{B}^r$, *wenn* $\tau = \tau(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{g}, \sigma, \varrho) > 0$ *entsprechend Folgerung* 1 *gewählt wird.*

Beweis: a) *Annahme der Anfangswerte* (1.3):

Für $x \in [0, 1]$ gilt wegen (3.3) $\mathscr{E}\mathbf{u}(x, 0) = \mathscr{E}_x\mathbf{u}(x) = \mathscr{E}_x\mathbf{g}(x)$ und wegen der Konsistenzeigenschaft [12: Lemma 3.4] $\mathscr{E}_x^{(n)}\mathbf{g}^{(n)} \rightrightarrows \mathbf{g}$ auf [0, 1] für $n \to \infty$.

b) *Erfüllung der Randbedingungen* (1.4):
Zunächst bemerken wir wieder, daß für $y \in [0, \lambda]$ wegen (3.4) $\mathscr{E}\mathbf{u}^+(0, y) = \mathscr{E}_y\mathbf{u}^+(y) = \mathscr{E}_y\mathbf{H}(y)$ gilt. Der zu Satz 3 analoge Satz für $\mathscr{E}_y$, angewendet auf $H^l \in C^{0,1}(\bar{Q}^-)$ für $l = r + 1, \ldots, m$, liefert die Konvergenz $E_y^{(n')}\mathbf{H}^{(n')} \rightrightarrows \mathbf{H}(\cdot, \bar{\mathbf{u}}^-(0, \cdot))$ auf $[0, \tau\lambda]$ für $n' \to \infty$.

c) *Erfüllung des Differentialgleichungssystems* (1.2):

c1) Wegen $D^i, F^i \in C^{0,1}(\bar{Q})$ für $i = 1, \ldots, m$ folgt unmittelbar aus Satz 3 unter Beachtung von Bemerkung 7

$$\mathscr{E}^{(n')}\mathbf{D}^{(n')} \rightrightarrows \mathbf{D}[\bar{\mathbf{u}}], \qquad \mathscr{E}^{(n')}\mathbf{F}^{(n')} \rightrightarrows \mathbf{F}[\bar{\mathbf{u}}] \quad \text{auf } \mathfrak{B}^r \quad \text{für} \quad n' \to \infty,$$

woraus sich speziell $\mathscr{E}^{(n')}\mathbf{F}^{(n')} \rightharpoonup \mathbf{F}[\bar{\mathbf{u}}]$ ergibt.

c2) Wir benötigen noch eine Konvergenzaussage über $\{\mathscr{E}^{(n')}(D^{(n')i}\Delta_x^{(n')\pm}u^{(n')i})\}_{n'\geqq n_0'}$ für $i = 1, \ldots, m$. Diese folgt aus Hilfssatz 4 und Satz 4: Für $f \in L^2(\mathfrak{B}^i)$ gilt

$$\left|\left\langle \mathscr{E}(D^i\Delta_x^{\pm}u^i) - D^i[\bar{\mathbf{u}}]\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial x}, f\right\rangle\right|$$

$$\leqq |\langle \mathscr{E}(D^i\Delta_x^{\pm}u^i) - D^i[\bar{\mathbf{u}}]\,\mathscr{E}(\Delta_x^{\pm}u^i), f\rangle| + \left|\left\langle \mathscr{E}(\Delta_x^{\pm}u^i) - \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial x}, D^i[\bar{\mathbf{u}}]\,f\right\rangle\right|. \tag{4.14}$$

Da $\|\mathscr{E}(\Delta_x^{\pm}u^i)\|_{\mathfrak{B}} \leqq C_0$ wegen (3.18), (4.6) ist, können wir Hilfssatz 4 mit $\gamma_{\xi,\eta} =: D^i_{\xi,\eta}$, $\bar{\gamma}_{\xi,\eta} = \Delta_x^{\pm}u^i$ anwenden. Als Folgerung gewinnen wir daraus die Konvergenz des ersten Summanden auf der rechten Seite von (4.14) gegen 0 für $n' \to \infty$. Wegen Satz 4 (Bemerkung 7) konvergiert auch der zweite Summand gegen 0, so daß die Abschätzung (4.14) die gesuchte Konvergenz $\mathscr{E}^{(n')}(D^{(n')i}\Delta_x^{(n')\pm}u^{(n')i}) \rightharpoonup D^i[\bar{\mathbf{u}}]\dfrac{\partial \bar{u}^i}{\partial x}$ liefert.

c3) Aus den Beziehungen (3.1), (3.2) erhalten wir nach der Fortsetzung auf $\mathfrak{B}$ und anschließendem Grenzübergang $n' \to \infty$ mit Satz 4, c1) und c2) die Behauptung ▮

Auf Grund des letzten Satzes sind die Voraussetzungen für [8: Satz 9 mit Folgerung] erfüllt, so daß wir sofort den Existenzsatz zum Ausgangsproblem **P I** gewinnen können.

P I: *Gesucht wird eine Lösung* **u** *von*

$$\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{DT}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{TB}^{-1}\mathbf{F} =: \bar{\mathbf{F}} \quad \text{in } \mathfrak{B}^i \tag{4.15}$$

mit

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{g}(x) \quad \text{für} \quad x \in [0, 1] \tag{1.3}$$

und

$$\sum_{j=1}^{m} R^{l,j}(y, \mathbf{u}(0, y))\frac{\partial u^j}{\partial y}(0, y) = H^l(y, \mathbf{u}(0, y)) \tag{4.16}$$

für $y \in [0, \tau\lambda]$, $l = r + 1, \ldots, m$.

Bemerkung 8: (4.15) ist die charakteristische Form des Systems (1.1), wobei wir voraussetzen:

a) Det $\mathbf{B} \neq 0$.

b) Die charakteristische Gleichung zur Matrix $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ hat nur reelle Wurzeln (hyperbolischer Fall) mit zugehörigen einfachen Elementarteilern.

c) Die Diagonalelemente D^i von $\mathbf{D}$ mögen gemäß (1.5) angeordnet sein.

d) Für die erweiterte Randmatrix $\mathbf{S} = \mathbf{S}(y, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^-(0, y, \mathbf{u}) \\ \mathbf{R}(y, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{R} = (R^{l,j})$ gelte

$$\text{Det}\,\mathbf{S} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad (y, \mathbf{u}) \in \bar{Q}^0 \tag{4.17}$$

(Definition von $\bar{Q}^0$ s. **V I**).

Unter diesen Voraussetzungen und gewissen Regularitätsforderungen (s. **V I**) konnten wir in [8] zeigen, daß **P I** einem speziellen Goursat-Problem **P II** für das verlängerte System zu (4.15) äquivalent ist, welches vom Typ **P III** war.

Folgerung 2: *Sind die Voraussetzungen*

$$\mathbf{VI:}\quad \mathbf{T},\mathbf{D} \in C^{k,1}_{m\times m}(\bar{Q}), \qquad \bar{\mathbf{F}} \in C^{k,1}_{m}(\bar{Q}),$$

$$\bar{\mathbf{R}} \in C^{k-1,1}_{(m-r)\times m}(\bar{Q}^0), \qquad \mathbf{H} \in C^{k-1,1}_{m-r}(\bar{Q}^0), \qquad \mathrm{g} \in C^{k,1}_{m}[(0,1])$$

mit

$$\bar{Q}^0 = \{(y, u^1, \ldots, u^m) \in \mathrm{R}^{1+m} \mid 0 \leqq y \leqq \sigma, |\mathbf{u} - \mathrm{g}(0)| \leqq \varrho\}$$

$$(\mathrm{k} \geqq 1, \text{ ganzzahlig})$$

und die Kompatibilitätsbedingungen erster bis k-ter Ordnung[4]) *für* **P I** *erfüllt, so ist diese gemischte Anfangs-Randwertaufgabe in der Klasse* $C^{k,1}_m(\mathfrak{B}^\tau)$ *lösbar. Es gibt also eine Lösung von* **P I** *in* $\mathfrak{B}^\tau$*, welche die gleichen Regularitätseigenschaften wie die Koeffizienten von* (4.15) *und wie die vorgegebenen Anfangswerte* (1.3) *besitzt* (*„fortsetzbare Anfangsbedingungen“* [6]).

5. Eindeutigkeit der Lösung des Goursat-Problems P I und ihre Abhängigkeit von Parametern

Um die Eindeutigkeit einer Lösung unseres Ausgangsproblems **P I** zu beweisen, werden wir die Differenz zweier Lösungen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ von **P I** untersuchen. Um nachzuweisen, daß diese überall in $\mathfrak{B}^\tau$ für ein hinreichend kleines $\tau > 0$ verschwindet, leiten wir für die *modifizierte Differenz* $\mathbf{w} = \mathbf{T}[\mathbf{u}_1](\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ [10]) ein lineares Goursat-Problem her. Auf Grund einer A-priori-Abschätzung für Lösungen solcher Probleme können wir dann auf $\mathbf{w} \equiv 0$ bzw. $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$ in $\mathfrak{B}^\tau$ schließen und gleichzeitig Aussagen über die Abhängigkeit der Lösung zu **P I** von Parametern gewinnen. Die Herleitung dieser Abschätzung erfolgt im nächsten Abschnitt.

5.1 A-priori-Abschätzung für ein lineares Hilfsproblem

Wir betrachten eine Lösung $\bar{\mathbf{u}} \in C^1_m(\mathfrak{B}^\tau)$ des folgenden linearen Goursat-Problems:
HP: *Bestimme* **u** *als Lösung von*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{D}(x, y)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{F}(x, y) \quad in\ \mathfrak{B}^\tau \tag{5.1}$$

mit

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathrm{g}(x) \quad \text{für} \quad x \in [0, 1] \tag{1.3}$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial y}(0, y) - \bar{\mathbf{R}}(y)\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial y}(0, y) = \bar{\mathbf{H}}(y) \quad \textit{für} \quad y \in [0, \tau\lambda]. \tag{5.2}$$

Dabei sei

$$\mathbf{D} \in C^0_{m\times m}(\mathfrak{B}^\tau), \qquad \mathbf{F} \in C^0_m(\mathfrak{B}^\tau), \qquad \mathrm{g} \in C^1_m([0, 1]),$$

$$\bar{\mathbf{R}} \in C^{0,1}_{(m-r)\times r}([0, \tau\lambda]), \qquad \bar{\mathbf{H}} \in C^0_{m-r}[(0, \tau\lambda]).$$

Weiterhin mögen die Diagonalelemente D^i der Diagonalmatrix **D** auf $\mathfrak{B}^\tau$ der Anordnung (1.5) genügen.

---

[4]) s. Seite 196.
[10]) s. Seite 206.

Zur Herleitung einer A-priori-Abschätzung für $\bar{\mathbf{u}}$ betrachten wir zunächst gewisse *lineare diskrete Operatoren* auf $V \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{r}}$ (vgl. Diskretisierung von (1.2) in Abschnitt 3.1).

Definition 6: Sei $\mathbf{u}$ auf $V \cap \mathfrak{B}^{\mathfrak{r}}$ definiert. Dann setzen wir für $0 \leqq \eta \leqq n\tau - 1$ und $\xi = 0, \ldots, n - \eta - 1$

$$\mathscr{L}^- \mathbf{u}_{\xi,\eta} := \Delta_y \mathbf{u}^-_{\xi,\eta} + \mathbf{D}^-_{\xi,\eta} \Delta_x \mathbf{u}^-_{\xi,\eta}, \tag{5.3}$$

für $0 \leqq \eta \leqq \min\{n\tau - 1, n - 2\}$ und $\xi = 1, \ldots, n - \eta - 1$

$$\mathscr{L}^+ \mathbf{u}_{\xi,\eta} := \Delta_y \mathbf{u}^+_{\xi,\eta} + \mathbf{D}^+_{\xi,\eta} \Delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^+_{\xi,\eta}, \qquad \mathscr{L}\mathbf{u}_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} \mathscr{L}^- \mathbf{u}_{\xi,\eta} \\ \mathscr{L}^+ \mathbf{u}_{\xi,\eta} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

und für $0 \leqq \eta \leqq n\tau - 1$

$$l\mathbf{u}_\eta := \Delta_y \mathbf{u}^+_{0,\eta} - \mathbf{R}_\eta \Delta_y \mathbf{u}^-_{0,\eta}. \tag{5.5}$$

Um die Funktionswerte von $\mathbf{u}$ gegen $|\mathscr{L}\mathbf{u}_{\xi,\eta}|$ und $|l\mathbf{u}_\eta|$ abschätzen zu können, stellen wir wie bei der Lösung des diskreten Goursat-Problems (3.1)—(3.4) die Beziehungen (5.3)—(5.5) so um, daß wir ein Rekursionssystem für $\mathbf{u}_{\xi,\eta}$ bez. η erhalten. Wählen wir nun wieder λ entsprechend der Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (3.8), nämlich $\lambda \|\mathbf{D}\|_{\mathfrak{B}^{\mathfrak{r}}} \leqq 1$, und beachten die Vorzeichen der D^i gemäß (1.5), so ergeben sich für die entsprechenden ξ, η die folgenden Abschätzungen.

Aus (5.3) folgt für $i = 1, \ldots, r$

$$\begin{aligned} |u^i_{\xi,\eta+1}| &\leqq k\,|\mathscr{L}^i \mathbf{u}_{\xi,\eta}| - \lambda D^i_{\xi,\eta}\,|u^i_{\xi+1,\eta}| + (1 + \lambda D^i_{\xi,\eta})\,|u^i_{\xi,\eta}| \\ &\leqq k \,\|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{u}^-\|_\eta, \end{aligned}$$

alls $\bar{\eta} \leqq n\tau - 1$ ist. Durch Induktion über η ergibt sich dann

$$\|\mathbf{u}^-\|_{\eta+1} \leqq k(\eta + 1)\,\|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{u}^-\|_0 \leqq k(\bar{\eta} + 1)\,\|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{u}\|_0 \tag{5.6}$$

für alle $\eta = 0, \ldots, \bar{\eta}$.

Analog gewinnen wir aus (5.4) für $l = r + 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} |u^l_{\xi,\eta+1}| &\leqq k\,|\mathscr{L}^l \mathbf{u}_{\xi,\eta}| + \lambda D^l_{\xi,\eta}\,|u^l_{\xi-1,\eta}| + (1 - \lambda D^i_{\xi,\eta})\,|u^l_{\xi,\eta}| \\ &\leqq k\,\|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{u}^+\|_\eta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Abschätzung von $|u^l_{0,\eta+1}|$ folgt aus (5.5). Dazu summieren wir alle Beziehungen (5.5) über η:

$$\sum_{\eta'=0}^{\eta} l\mathbf{u}_{\eta'} = \frac{1}{k}\left(\sum_{\eta'=0}^{\eta} \mathbf{u}^+_{0,\eta'+1} - \sum_{\eta'=0}^{\eta} \mathbf{u}^+_{0,\eta'}\right) - \sum_{\eta'=0}^{\eta} \mathbf{R}_{\eta'} \Delta_y \mathbf{u}^-_{0,\eta'},$$

woraus folgt

$$\mathbf{u}^+_{0,\eta+1} = k\left(\sum_{\eta'=0}^{\eta} l\mathbf{u}_{\eta'} - \sum_{\eta'=0}^{\eta} \Delta_y \mathbf{R}_{\eta'} \mathbf{u}^-_{0,\eta'+1}\right) + \mathbf{R}_{\eta+1}\mathbf{u}^-_{0,\eta+1} - \mathbf{R}_0 \mathbf{u}^-_{0,0} + \mathbf{u}^+_{0,0},$$

$$|\mathbf{u}^+_{0,\eta+1}| \leqq k(\bar{\eta} + 1)\,(\|l\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \beta_1 \|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}}) + (2\beta_1 + 1)\,\|\mathbf{u}\|_0.$$

Dabei haben wir die Ungleichung (5.6) benutzt und zur Abkürzung $r(\lambda \|\Delta_y \mathbf{R}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{R}\|_{0,\bar{\eta}+1}) =: \beta_1$ gesetzt. Zusammen mit (5.7) ergibt sich

$$\|\mathbf{u}^+\|_{\eta+1} \leqq \max\{k\,\|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathbf{u}^+\|_\eta,\ k(\bar{\eta} + 1)\,(\|l\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}} + \beta_1 \|\mathscr{L}\mathbf{u}\|_{0,\bar{\eta}}) + (2\beta_1 + 1)\,\|\mathbf{u}\|_0\}$$

für alle $\eta = 0, \ldots, \bar{\eta}$ (auf Grund analoger Überlegungen wie in Bemerkung 6, da (5.7) nur für $\eta = 0, \ldots, \min\{\bar{\eta}, n - 2\}$ gilt). Durch Induktion über η erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u^+\|_{\eta+1} &\leqq \max\{k(\eta+1)\|\mathcal{L}u\|_{0,\bar\eta} + \|u^+\|_0,\\ &\quad k(\bar\eta+1)\|l u\|_{0,\bar\eta} + \left(k\eta + k(\bar\eta+1)\beta_1\right)\|\mathcal{L}u\|_{0,\bar\eta} + (2\beta_1+1)\|u\|_0\}\\ &\leqq k(\bar\eta+1)\left(\|l u\|_{0,\bar\eta} + (\beta_1+1)\|\mathcal{L}u\|_{0,\bar\eta}\right) + 2(\beta_1+1)\|u\|_0,\end{aligned}$$

und mit (5.6) folgt dann die *diskrete A-priori-Abschätzung* für $\|u\|_\eta = \max\{\|u^-\|_\eta, \|u^+\|_\eta\}$.

Satz 6: *Für alle* $\eta = 0, \ldots, \bar\eta + 1$ $(\bar\eta \leqq n\tau - 1)$ *gilt*

$$\|u\|_\eta \leqq \left(\frac{\bar\eta+1}{n}\lambda(\|l u\|_{0,\bar\eta} + \|\mathcal{L}u\|_{0,\bar\eta}) + 2\|u\|_0\right)(r\lambda\|\Delta_y\bar{R}\|_{0,\bar\eta} + r\|\bar{R}\|_{0,\bar\eta+1} + 1). \tag{5.}$$

(Dabei sind $\mathcal{L}u_{n-\eta;\eta}$, $\mathcal{L}^+u_{0,\eta}$ *gemäß (4.2) und im Falle* $\bar\eta = n-1$ *noch* $\mathcal{L}^+u_{0,n-1} = \mathcal{L}^+u_{0,n-2}$ *zu setzen.)*

Folgerung 3: *Für eine Lösung* $\bar{u} \in C^1_m(\mathfrak{B}^\tau)$ *von* **HP** *gilt für alle* $\tau' \leqq \tau$

$$\|\bar{u}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}} \leqq \left(\tau'\lambda(\|\bar{H}\|_{[0,\tau'\lambda]} + \|F\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}}) + 2\|g\|\right)_{[0,1]}(r\lambda L_{\bar{R}} + r\|\bar{R}\|_{[0,\tau'\lambda]} + 1). \tag{5.9}$$

Beweis: Die Abschätzung (5.9) ergibt sich leicht aus der Ungleichung (5.8) für $\bar{u}$ mit $\bar\eta = [n\tau'] - 1$. Dazu führen wir ausgehend von $V^{(n)} \cap \mathfrak{B}^{\tau'}$ die Erweiterung für $\bar{u}_{\xi,\eta}$, $\mathcal{L}\bar{u}_{\xi,\eta}$, $l u_\eta$ auf ganz $\mathfrak{B}$ durch (s. Abschn. 4.1). Unter Beachtung von (4.6) folgt dann aus den Konsistenzeigenschaften unseres Differenzenverfahrens [7: S. 98—99; 12: S. 73] sowie aus Hilfssatz 4 nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ die Behauptung (Einzelheiten s. [7: S. 114—115]) ∎

Bemerkung 9: A-priori-Abschätzungen wie (5.9) gelten auch für Lösungen allgemeiner linearer Goursat-Probleme mit anderen Randbedingungen (s. [12: S. 73—77; 13: S. 437—438] bei $D^i \neq 0$ auf $\mathfrak{B}$ für alle $i = 1, \ldots, m$). Dabei werden jedoch die Rechnungen umfangreicher als in unserem Fall, in dem (5.1) und (5.2) u selbst nicht enthalten, sondern nur dessen Ableitungen.

5.2 Eindeutigkeitssätze

Wie Thomée [12] können wir den Existenzsatz zu **P I** durch folgenden Eindeutigkeitssatz ergänzen, indem wir die A-priori-Abschätzung (5.9) geeignet anwenden.

Satz 7: *Seien die Voraussetzungen* **V I** *erfüllt und* u_1, u_2 *zwei Lösungen von* **P I** *aus der Klasse* $C^1_m(\mathfrak{B}^\tau)$. *Dann gibt es ein* τ' *mit* $0 < \tau' \leqq \tau$, *so daß* $u_1 \equiv u_2$ *in* $\mathfrak{B}^{\tau'}$ *ist.*

Beweis: a) Wegen der Stetigkeit von $u_\varkappa$ und der Annahme der Anfangswerte (1.3) durch $u_\varkappa$ gibt es ein τ_1 mit $0 < \tau_1 \leqq \min\{\tau, \sigma/\lambda\}$, so daß $\left(x, y, u_\varkappa(x, y)\right) \in \bar{Q}$ für $(x, y) \in \mathfrak{B}^{\tau_1}$, $\varkappa = 1, 2$, gilt. Für eine Funktion $Z \in C^1(\bar{Q})$ ist dann $Z_\varkappa := Z[u_\varkappa] \in C^1(\mathfrak{B}^{\tau_1})$.[10]

b) Herleitung eines linearen Goursat-Problems für $w = T_1(u_1 - u_2) \in C^1_m(\mathfrak{B}^{\tau_1})$:

b1) In $\mathfrak{B}^{\tau_1}$ genügt w dem System

$$\frac{\partial w}{\partial y} + D_1\frac{\partial w}{\partial x} = F \tag{5.10}$$

[10]) s. Seite 206.

mit

$$\mathbf{F} := \left(\frac{d}{dy}\mathbf{T}_1 + \mathbf{D}_1\frac{d}{dx}\mathbf{T}_1\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \overline{\mathbf{F}}_1 - \overline{\mathbf{F}}_2 + (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1)\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} + (\mathbf{D}_2\mathbf{T}_2 - \mathbf{D}_1\mathbf{T}_1)\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x},$$

da $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ (4.15) erfüllen.

b2) Wir wollen nun für $\mathbf{w}$ Randbedingungen vom Typ (5.2) auf $[0, \tau_1\lambda]$ herleiten. Sei $x = 0$ und $\mathbf{N} = \mathbf{T}^{-1}$. Dann gilt

$$\mathbf{R}_1\mathbf{N}_1\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \tilde{\mathbf{H}} \tag{5.11}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{H}} := \mathbf{R}_1\mathbf{N}_1\frac{d}{dy}\mathbf{T}_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 + (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y}$$

wegen (4.16) für $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Nach [8: Hilfssatz 4] ist (5.11) auf $[0, \tau_1\lambda]$ gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial y} = \mathbf{T}_1^+\mathbf{M}_1\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial y}\\ \tilde{\mathbf{H}}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \mathbf{w}^+}{\partial y} - \overline{\mathbf{R}}\frac{\partial \mathbf{w}^-}{\partial y} = \overline{\mathbf{H}}. \tag{5.12}$$

Hierbei wurde

$$(\mathbf{M}', \mathbf{M}'') := \mathbf{M} = \mathbf{S}^{-1} \text{ (s. (4.17))}, \quad \overline{\mathbf{R}} := \mathbf{T}_1^+\mathbf{M}_1' \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{H}} := \mathbf{T}_1^+\mathbf{M}_1''\tilde{\mathbf{H}} \tag{5.13}$$

gesetzt.

b3) Auf Grund von (5.10), (5.12) und $\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{0}$ für $x \in [0, 1]$ (gemäß (1.3)) ist $\mathbf{w}$ eine Lösung eines linearen Goursat-Problems vom Typ **HP** in $\mathfrak{B}^{\tau_1}$. Somit gilt für $\mathbf{w}$ die A-priori-Abschätzung (5.9):

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}} \leqq \tau'\lambda C_1(\|\overline{\mathbf{H}}\|_{[0,\tau'\lambda]} + \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}}) \tag{5.14}$$

für $0 < \tau' \leqq \tau_1$, $C_1 = r\lambda L_{\overline{R}} + r\,\|\mathbf{R}\|_{[0,\tau_1\lambda]} + 1$.

c) Mit Hilfe der L-Stetigkeit der Koeffizienten von (4.15) auf $\overline{Q}$ und der Koeffizienten von (4.16) auf $\overline{Q}^0$ [11]) gelingt es, die Normen der rechten Seiten von (5.10) und (5.12) gegen $\|\mathbf{w}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}}$ abzuschätzen:

c1) Aus der Gestalt von $\mathbf{F}$ bzw. von $\overline{\mathbf{H}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ folgt mit geeigneten Konstanten C_2, C_3 für $(x, y) \in \mathfrak{B}^{\tau'}$

$$|\mathbf{F}(x, y)| \leqq C_2\,\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}} \tag{5.15}$$

bzw. für $y \in [0, \tau'\lambda]$

$$|\overline{\mathbf{H}}(y)| \leqq C_3\,|\mathbf{u}_1(0, y) - \mathbf{u}_2(0, y)| \leqq C_3\,\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}}. \tag{5.16}$$

c2) Einsetzen der beiden letzten Ungleichungen in (5.14) liefert unter Beachtung von $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{N}_1\mathbf{w}$

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}} \leqq \tau' C_4\,\|\mathbf{w}\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}}$$

---

[11]) Zunächst sind diese Koeffizienten aus $C^1(\overline{Q})$. Da aber $Q = \operatorname{int}\overline{Q}$ der *Bedingung* (S) genügt (zum Beweis s. [7: S. 45–47]), gilt die Einbettung $C^1(\overline{Q}) \subset C^{0,1}(\overline{Q})$ [10: S. 24]. Dieselbe Aussage gilt für $\overline{Q}^0$ (bei $k > 1$), da $\overline{Q}^0$ konvex ist.

mit $C_4 = \lambda C_1(C_2 + C_3)\, m\, \|N_1\|_{\mathfrak{B}^{\tau_1}}$. Wird nun $\tau' \leqq \min\{\tau_1, 1/2C_4\}$ gewählt, so ergibt sich $\|w\|_{\mathfrak{B}^{\tau'}} = 0$ und daraus die Behauptung ▮

Bemerkung 10: Wenn die entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind, können wir eine Lösung $\mathbf{u} \in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ von **P I** dadurch erhalten, indem wir das zu **P I** äquivalente Goursat-Problem **P II** in der Klasse $C_{2m}^{0,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ mittels des angegebenen Differenzenverfahrens lösen (s. Bemerkung 8, Folgerung 2 und [8: Sätze 5,6]). Satz 5 und (4.10) für eine solche Lösung von **P II** liefern schließlich für die entsprechende Lösung **u** von **P I** die Abschätzung [7: S. 118–119]

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{g}\|_{\mathfrak{B}^\tau} \leqq \varrho, \qquad \|\partial \mathbf{u}\|_{\mathfrak{B}^\tau} \leqq C \quad \left(\partial = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5.17}$$

mit einer geeigneten, von **u** unabhängigen Konstanten C. Betrachten wir zwei Lösungen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ von **P I** aus der Klasse $C_m^1(\mathfrak{B}^\tau)$, die zusätzlich (5.17) genügen, so kann das τ' in Satz 7 so gewählt werden, daß es nicht von $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ abhängt. Dieses Resultat folgt aus der Tatsache, daß für die Konstanten $C_1, \ldots, C_4$ im Beweis von Satz 7 in diesem Fall von $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ unabhängige Schranken gefunden werden können und in Teil a) $\tau_1 = \min\{\tau, \sigma/\lambda\}$ gesetzt werden kann.

5.3 Abhängigkeit der Lösung des Goursat-Problems P I von Parametern

Wir wollen jetzt annehmen, daß alle in **P I** vorgegebenen Koeffizienten von (4.15), (4.16) sowie die Anfangswerte (1.3) noch zusätzlich von q Parametern ω^h, $h = 1, \ldots, q$, abhängen. Dann wird im allgemeinen auch die Lösung **u** dieses Goursat-Problems $\mathbf{P\,I}_{(\omega)}$ von $\omega := (\omega^h)$ abhängen.

Wir stellen dabei an **T**, **D**, $\overline{\mathbf{F}}$, **R**, **H**, **g** folgende Voraussetzungen:

Es sei G ein nichtleeres beschränktes Gebiet des R^q. Für jedes feste $\omega \in \overline{G}$ gelten für die entsprechenden Funktionen $\mathbf{T}(\cdot\,;\omega)$, $\mathbf{D}(\cdot\,;\omega)$, ... die Voraussetzungen $\mathbf{V\,I}_{(\omega)}$ mit $k = 1$, wobei in $\overline{Q}$ und $\overline{Q}^0$ das **g** durch $\mathbf{g}(\cdot\,;\omega)$ zu ersetzen ist $\left(\overline{Q} = \overline{Q}(\omega), \overline{Q}^0 = \overline{Q}^0(\omega)\right)$. Zu allen auftretenden Maximumnormen und Lipschitzkonstanten für diese (von ω abhängigen) Funktionen und deren Ableitungen mögen Schranken existieren, die von ω unabhängig sind. Auf

$$\mathfrak{D} = \{(x, y, \mathbf{u}; \omega) \in \mathsf{R}^{2+m+q} \mid \omega \in \overline{G}, (x, y, \mathbf{u}) \in \overline{Q}(\omega)\}$$

bzw.

$$\mathfrak{D}^0 = \{(y, \mathbf{u}; \omega) \in \mathsf{R}^{1+m+q} \mid \omega \in \overline{G}, (y, \mathbf{u}) \in \overline{Q}^0(\omega)\}$$

seien **T**, **D**, $\overline{\mathbf{F}}$ bzw. **R**, **H** stetig; **g** sei stetig auf $[0,1] \times \overline{G}$. Die Diagonalelemente D^i von **D** sollen für alle $(x, y, \mathbf{u}; \omega) \in \mathfrak{D}$ der Anordnung (1.5) genügen.

Setzen wir noch voraus, daß für jedes $\omega \in \overline{G}$ die Kompatibilitätsbedingungen erster Ordnung[4]) zu $\mathbf{P\,I}_{(\omega)}$ erfüllt sind, dann besitzt dieses parameterabhängige Goursat-Problem zu beliebig vorgegebenem $\omega \in \overline{G}$ nach Folgerung 2, Satz 7 und Bemerkung 10 eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}(\cdot\,;\omega) \in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ mit den Abschätzungen (5.17) für hinreichend kleines τ, $0 < \tau \leqq 1$. Dabei sei $\lambda > 0$ so gewählt, daß es unabhängig von ω ist und daß $\lambda\, \|\mathbf{D}\|_{\mathfrak{D}} \leqq 1$ gilt. Beachten wir die Abhängigkeiten der Konstanten, die in den Abschätzungen in Abschnitt 3.2 auftreten, die Abhängigkeiten des $\tau = \tau_1/2$ aus Folgerung 1 sowie die des τ' aus Satz 7, Bemerkung 10, so können wir unter unseren

---

[4]) s. Seite 196.

Voraussetzungen obiges τ sogar unabhängig von ω wählen und zusätzlich so, daß

$$\|\mathbf{u}(\cdot;\omega)-\mathbf{g}(\cdot;\omega)\|_{\mathfrak{B}^\tau}\leqq\frac{\varrho}{2}\tag{5.18}$$

für alle $\omega\in\bar G$ gilt (durch Ersetzung von ϱ durch $\varrho/2$ in $\bar Q(\omega)$, $\bar Q^0(\omega)$).

Unsere Voraussetzungen an die Normen von $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{g}$ gestatten auch als Folgerung aus (5.17) die Abschätzung

$$\|\partial\mathbf{u}(\cdot;\boldsymbol{\omega})\|_{\mathfrak{B}^\tau}\leqq C^*\tag{5.19}$$

mit C^* unabhängig von $\boldsymbol{\omega}$ (s. dazu [7: S. 118—119]). Aus der A-priori-Abschätzung (5.9) folgt dann die stetige Abhängigkeit der Lösung $\mathbf{u}$ zu $\mathbf{P}\,\mathbf{I}_{(\omega)}$ von $\boldsymbol{\omega}$.

Satz 8: *Sei* $\mathbf{u}(\cdot;\boldsymbol{\omega})\in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ *die Lösung von* $\mathbf{P}\,\mathbf{I}_{(\omega)}$ *in* $\mathfrak{B}^\tau$ *(τ unabhängig von* $\boldsymbol{\omega}$*), für die* (5.18), (5.19) *gilt. Dann gibt es unter obigen Voraussetzungen ein von* $\boldsymbol{\omega}$ *unabhängiges* τ^* *mit* $0<\tau^*\leqq\tau$, *so daß* $\mathbf{u}$ *stetig auf* $\mathfrak{B}^{\tau^*}\times\bar G$ *ist.*

Beweis: a) Wir untersuchen analog zum Beweis von Satz 7 für zwei beliebige $\omega_1,\omega_2\in\bar G$ die modifizierte Differenz $\mathbf{w}=\mathbf{T}_1(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)$ der Lösungen $\mathbf{u}_\varkappa:=\mathbf{u}(\cdot;\omega_\varkappa)\in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ von $\mathbf{P}\,\mathbf{I}_{(\omega_\varkappa)}$, $\varkappa=1,2$, mit den geforderten Eigenschaften. Dabei wird für eine Funktion $Z=Z(x,y,\mathbf{u};\omega)$ zur Abkürzung

$$Z_\varkappa:=Z\big(\cdot,\cdot,\mathbf{u}_\varkappa(\cdot,\cdot);\omega_\varkappa\big)\tag{5.20}$$

gesetzt.

a1) Zunächst wählen wir ω_1, ω_2 so, daß $|\mathbf{g}(x;\boldsymbol{\omega}_1)-\mathbf{g}(x;\omega_2)|\leqq\varrho/2$ ist für alle $x\in[0,1]$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathbf{g}$ auf $[0,1]\times\bar G$ ist das für hinreichend kleinen Abstand $|\omega_1-\omega_2|$ möglich. Folglich ist für $(x,y)\in\mathfrak{B}^\tau$ wegen (5.18) neben $\big(x,y,\mathbf{u}_\varkappa(x,y);\omega_\varkappa\big)\in\mathfrak{D}$ auch $\big(x,y,\mathbf{u}_1(x,y);\omega_2\big)\in\mathfrak{D}$, da

$$\|\mathbf{u}_1-\mathbf{g}(\cdot;\omega_2)\|_{\mathfrak{B}^\tau}\leqq\|\mathbf{u}_1-\mathbf{g}(\cdot;\omega_1)\|_{\mathfrak{B}^\tau}+\|\mathbf{g}(\cdot;\omega_1)-\mathbf{g}(\cdot;\omega_2)\|_{\mathfrak{B}^\tau}\leqq\varrho$$

gilt. Wir haben dann für $Z\in C^0(\mathfrak{D})$, $Z(\cdot;\omega)\in C^{0,1}\big(\bar Q(\omega)\big)$ mit einer von ω unabhängigen Lipschitzkonstanten $L_Z{}^*$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&|Z_1(x,y)-Z_2(x,y)|\\
&\leqq\big|Z\big(x,y,\mathbf{u}_1(x,y);\omega_1\big)-Z\big(x,y,\mathbf{u}_1(x,y);\omega_2\big)\big|\\
&\quad+\big|Z\big(x,y,\mathbf{u}_1(x,y);\boldsymbol{\omega}_2\big)-Z\big(x,y,\mathbf{u}_2(x,y);\boldsymbol{\omega}_2\big)\big|\\
&\leqq\varepsilon+L_Z{}^*\,\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^\tau}
\end{aligned}\tag{5.21}$$

für alle $(x,y)\in\mathfrak{B}^\tau$ und $\varepsilon>0$, falls $|\omega_1-\omega_2|<\delta_Z(\varepsilon)$ ist (wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von Z auf $\mathfrak{D}$).

a2) Wie in Teil b) des Beweises von Satz 7 ergibt sich, daß $\mathbf{w}\in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}^\tau)$ dem linearen System (5.10) in $\mathfrak{B}^\tau$ und den Randbedingungen (5.12) auf $[0,\tau\lambda]$ genügt, wenn wir $\mathbf{T}_\varkappa$, $\mathbf{D}_\varkappa,\ldots$ entsprechend (5.20) auffassen. Weiterhin gilt für $x\in[0,1]$

$$\mathbf{w}(x,0)=\mathbf{T}\big(x,0,\mathbf{g}(x,\omega_1);\omega_1\big)\big(\mathbf{g}(x;\omega_1)-\mathbf{g}(x;\omega_2)\big)=:\bar{\mathbf{g}}(x).$$

Damit ist $\mathbf{w}$ wieder eine Lösung eines linearen Goursat-Problems vom Typ **HP** in $\mathfrak{B}^\tau$. Nach Folgerung 3 gilt für $\mathbf{w}$ die A-priori-Abschätzung (5.9), aus der dann

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}}\leqq\tau^*\lambda C_1{}^*(\|\bar{\mathbf{H}}\|_{[0,\tau^*\lambda]}+\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}})+2C_1{}^*\,\|\bar g\|_{[0,1]}\tag{5.22}$$

für $0<\tau^*\leqq\tau$ folgt.

a3) Als Abschätzungen von $\mathbf{F}$ und $\overline{\mathbf{H}}$ ergeben sich in der gleichen Weise wie (5.15), (5.16) unter Beachtung von (5.21)

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} \leqq C_2^*(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} + \varepsilon), \qquad \|\overline{\mathbf{H}}\|_{[0,\tau^*\lambda]} \leqq C_3^*(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} + \varepsilon),$$

falls $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist und $|\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2| < \delta(\varepsilon)$ mit

$$\delta = \min_{\substack{i,j=1,\ldots,m\\ l=r+1,\ldots,m}} \{\delta_{\overline{F}^i}, \delta_{T^{i,j}}, \delta_{D^lT^{i,j}}, \delta_{H^l}, \delta_{R^{i,j}}\}$$

gewählt wird. C_1^*, C_2^*, C_3^* sind geeignete von $\boldsymbol{\omega}$ unabhängige Konstanten, die sich aus C^* (s. (5.19)) und den von $\boldsymbol{\omega}$ unabhängigen Schranken für die Normen und Lipschitzkonstanten der auftretenden Funktionen ergeben. Werden diese beiden Abschätzungen in (5.22) eingesetzt, so gilt wegen $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{N}_1\mathbf{w}$ und $\mathbf{g} \in C_m^0([0, 1] \times \overline{G})$

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} < \tau^* C_4^* \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} + C_5^*\varepsilon,$$

falls $|\omega_1 - \omega_2| < \min\{\delta(\varepsilon), \delta_{g^1}(\varepsilon), \ldots, \delta_{g^m}(\varepsilon)\}$ ist (C_4^*, C_5^* unabhängig von ω). Für $\tau^* \leqq \min\left\{\tau, \dfrac{1}{2C_4^*}\right\}$ folgt dann für dieselben ω_1, ω_2

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}^{\tau^*}} \leqq C_5^*\varepsilon. \tag{5.23}$$

b) Die Ungleichung

$$|\mathbf{u}(x, y; \omega_1) - \mathbf{u}(\bar{x}, \bar{y}; \omega_2)| \leqq |u_1(x, y) - \mathbf{u}_1(\bar{x}, \bar{y})| + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{B}_{\tau^*}}$$

liefert die Stetigkeit von $\mathbf{u}$ auf $\mathfrak{B}^{\tau^*} \times \overline{G}$. Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite gilt (5.23), und für den ersten Summanden folgt mit dem Mittelwertsatz und (5.19) die Ungleichung $|\mathbf{u}_1(x, y) - \mathbf{u}_1(\bar{x}, \bar{y})| \leqq C^*(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)$ ∎

5.4 Das direkte Differenzenverfahren zu P I

Unser Differenzenverfahren aus Abschnitt 3 eignete sich gut zum Nachweis der Existenz einer Lösung für **P I**. Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur näherungsweisen Berechnung der Lösung hat es jedoch den Nachteil, daß es notwendig ist, zuvor den Übergang zum äquivalenten Goursat-Problem **P II** für das verlängerte System zu (4.15) durchzuführen. Das kann zusätzliche Schwierigkeiten für die numerische Anwendbarkeit mit sich bringen.

Um diesen Mangel zu beseitigen, betrachten wir ein zweites Differenzenverfahren zu **P I** (*direktes Differenzenverfahren*). Dazu führen wir wieder die bereits dargestellte Überdeckung der (x, y)-Ebene mit dem entsprechenden Maschengitter durch (s. Abschnitt 3.1) und diskretisieren unmittelbar (4.15), (1.3), (4.16) aus **P I**. Dies geschieht in der gleichen Weise wie für die entsprechenden Relationen von **P III** (s. (3.1)—(3.4)):

$$\mathbf{T}^-_{\xi,\eta}\Delta_y\mathbf{u}_{\xi,\eta} + \mathbf{D}^-_{\xi,\eta}\mathbf{T}^-_{\xi,\eta}\Delta_x\mathbf{u}_{\xi,\eta} = \overline{\mathbf{F}}^-_{\xi,\eta}$$
$$\text{für} \quad \eta = 0, \ldots, \eta_1; \quad \xi = 0, \ldots, n - \eta - 1; \tag{5.24}$$

$$\mathbf{T}^+_{\xi,\eta}\Delta_y\mathbf{u}_{\xi,\eta} + \mathbf{D}^+_{\xi,\eta}\mathbf{T}^+_{\xi,\eta}\Delta_x^-\mathbf{u}_{\xi,\eta} = \overline{\mathbf{F}}^+_{\xi,\eta}$$
$$\text{für} \quad \eta = 0, \ldots, \eta_2; \quad \xi = 1, \ldots, n - \eta - 1; \tag{5.25}$$

$$\mathbf{u}_{\xi,0} = \mathbf{g}_\xi \quad \text{für} \quad \xi = 0, \ldots, n; \tag{5.26}$$

$$\mathbf{R}_\eta\Delta_y\mathbf{u}_{0,\eta} = \mathbf{H}_\eta \quad \text{für} \quad \eta = 0, \ldots, \eta_1, \tag{5.27}$$

wobei wir dieselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 3 verwenden.

Die Lösung dieses diskreten Goursat-Problems ergibt sich wie die Lösung von (3.1) bis (3.4) wieder aus einem Rekursionssystem für $\mathbf{u}_{\xi,\eta}$ bez. η.

Wir können nämlich wegen $\operatorname{Det} \mathbf{T} \neq 0$ auf $\bar{Q}$ die Gleichungen (5.24), (5.25) nach $\mathbf{u}_{\xi,\eta+1}$ für $\xi = 1, \ldots, n - \eta - 1, \eta = 0, \ldots, \eta_2$ auflösen. Die fehlenden Werte $\mathbf{u}_{0,\eta+1}$ für $\eta = 0, \ldots, \eta_1$ ergeben sich aus (5.24) mit $\xi = 0$ und den diskretisierten Randbedingungen (5.27), da sich das System aus diesen Gleichungen wegen der Voraussetzung (4.17) nach $\mathbf{u}_{0,\eta+1}$ auflösen läßt.

Bemerkung 11: Das obige Differenzenverfahren verwenden auch PROUSE [11] sowie COURANT, ISAACSON und REES [3]. In [3] wird dann unter Voraussetzung der Existenz einer Lösung für das Anfangswertproblem zu (4.15) gezeigt, daß die Folge der Lösungen des diskretisierten Problems gegen diese Lösung konvergiert. Durch Übertragung einiger dabei verwendeter Schlußweisen werden wir dasselbe für die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe **P I** zeigen.

Mit Anwendung der diskreten A-priori-Abschätzung (5.8) gewinnen wir zunächst eine Aussage über die Größenordnung des Fehlers, d. h. der Abweichung der Lösung $\mathbf{u}_{\xi,\eta}^{(n)}$ des diskretisierten Problems (5.24)–(5.27) von der tatsächlichen Lösung des Ausgangsproblems **P I**, und daraus dann den gewünschten Konvergenzsatz.

Satz 9: *Sei* **V I** *erfüllt,* $\hat{\mathbf{u}} \in C_m^{1,1}(\mathfrak{B}')$ *die Lösung von* **P I** *und* $\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}^{(n)} = \hat{\mathbf{u}}(\xi h^{(n)}, \eta k^{(n)})$ *die zugehörige Gitterfunktion auf* $V^{(n)}$. *Dann gibt es von* n *unabhängige Konstanten* $\hat{\tau}$, $\hat{C}$ *mit* $0 < \hat{\tau} \leqq \tau$, *so daß bei hinreichend großem* n *für alle* $\eta \leqq n\hat{\tau}$ *gilt*

$$\|\mathbf{u}^{(n)} - \hat{\mathbf{u}}^{(n)}\|_\eta \leqq \frac{\hat{C}}{n}. \tag{5.28}$$

Beweis: a) Wie in [3] verwenden wir als Maß für die Abweichung von $\mathbf{u}_{\xi,\eta}$ zu $\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}$ die modifizierte Differenz (auch in Analogie zum Beweis von Satz 7)

$$\mathbf{w}_{\xi,\eta} = \mathbf{T}_{\xi,\eta-1}(\mathbf{u}_{\xi,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}) \tag{5.29}$$

für $\eta = 0, \ldots, \bar{\eta} + 1, \bar{\eta} = \min\{[\tau n] - 1, \eta_1\}$, $\xi = 0, \ldots, n - \eta$, $T_{\xi,-1} = T_{\xi,0}$. Auf $\mathbf{w}_{\xi,\eta}$ wenden wir $\mathscr{L}, l$ mit $\mathbf{D}_{\xi,\eta} = \mathbf{D}(\xi h, \eta k, \mathbf{u}_{\xi,\eta})$ und $\overline{\mathbf{R}}_\eta = \mathbf{T}_{0,\eta}^{\prime}\mathbf{M}_\eta^{\prime}$ (s. (5.13)) an. Wegen (1.3) für $\hat{\mathbf{u}}$ und (5.26) für $\mathbf{u}_{\xi,0}$ ist $\mathbf{w}_{\xi,0} = \mathbf{0}$, und wir erhalten aus (5.8) für $\bar{\eta} \leqq \hat{\eta} - 1$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}\|_{0,\bar{\eta}+1} \leqq \frac{\bar{\eta} + 1}{n} \lambda(\|l\mathbf{w}\|_{0,\bar{\eta}} + \|\mathscr{L}\mathbf{w}\|_{0,\bar{\eta}})\,(r\lambda\|\Delta_y\overline{\mathbf{R}}\|_{0,\bar{\eta}} + r\|\mathbf{R}\|_{0,\bar{\eta}+1} + 1). \tag{5.30}$$

b) Wir schätzen die rechte Seite von (5.30) gegen $\|\mathbf{w}\|_{0,\bar{\eta}} =: e_{\bar{\eta}}$ ab, so daß eine rekursive Ungleichung bez. $\bar{\eta}$ entsteht:

b1) Zunächst ist bei $Z \in C^{0,1}(\bar{Q})$ für $\eta = 0, \ldots, \hat{\eta} - 1, \xi = 0, \ldots, n - \eta - 1$

$$|\Delta_y Z_{\xi,\eta}| \leqq \frac{1}{k} L_Z \max\{k, (|\mathbf{u}_{\xi,\eta+1} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta+1}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta+1} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta} - \mathbf{u}_{\xi,\eta}|)\}$$
$$\leqq L_Z\left(1 + 2\frac{n}{\lambda} m \|\mathbf{N}\|_{\bar{Q}}\, e_{\eta+1} + L_{\hat{u}}\right) \tag{5.31}$$

und

$$|\Delta_x Z_{\xi,\eta}| \leqq \frac{1}{h} L_Z \max\{h, (|\mathbf{u}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta} - \mathbf{u}_{\xi,\eta}|)\}$$
$$\leqq L_Z(1 + 2nm\|\mathbf{N}\|_{\bar{Q}}\, e_\eta + L_{\hat{u}}), \tag{5.32}$$

wenn wir dabei die aus (5.29) folgende Abschätzung beachten. Mit $\hat{Z} = Z[\hat{\mathbf{u}}]$ [10]) folgt noch

$$|Z_{\xi,\eta} - \hat{Z}_{\xi,\eta}| \leqq L_Z\, |\mathbf{u}_{\xi,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}| \leqq m L_Z\, \|\mathbf{N}\|_{\bar{Q}}\, e_\eta. \tag{5.33}$$

b2) Da für $\mathbf{u}_{\xi,\eta}$ (5.24), (5.25) und für $\hat{\mathbf{u}}$ (4.15) speziell in den Gitterpunkten $\mathfrak{P}_{\xi,\eta} \in V \cap \mathfrak{V}'$ gilt, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^- \mathbf{w}_{\xi,\eta} &= \mathbf{T}^-_{\xi,\eta}(\Delta_y \mathbf{u}_{\xi,\eta} - \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}) + \Delta_y \mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1}(\mathbf{u}_{\xi,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}) \\ &\quad + \mathbf{D}^-_{\xi,\eta}\big(\mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1}(\Delta_x \mathbf{u}_{\xi,\eta} - \Delta_x \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}) + \Delta_x \mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1}(\mathbf{u}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta})\big) \\ &= \mathbf{F}^-_{\xi,\eta} - \hat{\mathbf{F}}^-_{\xi,\eta} + (\mathbf{I}^- + \lambda \mathbf{D}^-_{\xi,\eta})\, \Delta_y \mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1}(\mathbf{u}_{\xi,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}) \\ &\quad + \mathbf{D}^-_{\xi,\eta}(\Delta_x \mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1} - \lambda \Delta_y \mathbf{T}^-_{\xi,\eta-1})\, (\mathbf{u}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta}) + \mathbf{X}^-_{\xi,\eta}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^-_{\xi,\eta} &= (\hat{\mathbf{T}}^-_{\xi,\eta} - \mathbf{T}^-_{\xi,\eta})\, \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta} + \hat{\mathbf{T}}^-_{\xi,\eta}\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial y}\,(\xi h, \eta k) - \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}\right) \\ &\quad + (\hat{\mathbf{D}}^-_{\xi,\eta} \hat{\mathbf{T}}^-_{\xi,\eta} - \mathbf{D}^-_{\xi,\eta} \mathbf{T}^-_{\xi,\eta})\, \Delta_x \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta} + \hat{\mathbf{D}}^-_{\xi,\eta} \hat{\mathbf{T}}^-_{\xi,\eta}\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x}\,(\xi h, \eta k) - \Delta_x \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}\right).\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (5.33) und des Mittelwertsatzes für $\hat{\mathbf{u}}$ folgt dann

$$|\mathbf{X}^-_{\xi,\eta}| \leqq \frac{C_1}{n} + C_2 e_\eta$$

und mit (5.29), (5.31)—(5.33)

$$|\mathcal{L}^- w_{\xi,\eta}| \leqq \frac{C_3}{n} + C_4 e_\eta + n C_5 e_\eta^2 \tag{5.34}$$

für $\eta = 0, \ldots, \hat{\eta} - 1$; $\xi = 0, \ldots, n - \eta - 1$. Dabei sind $C_1, C_2, C_3, \ldots$ geeignete von n unabhängige Konstanten.

Dieselbe Abschätzung läßt sich für $\mathcal{L}^+ w_{\xi,\eta}$ erbringen, da in diesem Ausdruck gegenüber $\mathcal{L}^- w_{\xi,\eta}$ lediglich an einigen Stellen die Vorzeichen wechseln oder statt ξ der Index $\xi - 1$ steht.

b3) Für die Abschätzung von $l\mathbf{w}$ berechnen wir zunächst unter Beachtung von (5.27) und (4.16)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_\eta := \mathbf{R}_\eta \mathbf{N}_{0,\eta} \Delta_y \mathbf{w}_{0,\eta} &= \mathbf{R}_\eta(\Delta_y \mathbf{u}_{0,\eta} - \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{0,\eta}) + \mathbf{R}_\eta \mathbf{N}_{0,\eta} \Delta_y \mathbf{T}_{0,\eta-1}(\mathbf{u}_{0,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{0,\eta}) \\ &= \mathbf{H}_\eta - \hat{\mathbf{H}}_\eta + (\hat{\mathbf{R}}_\eta - \mathbf{R}_\eta)\, \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{0,\eta} \\ &\quad + \hat{\mathbf{R}}_\eta\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial y}\,(0, \eta k) - \Delta_y \hat{\mathbf{u}}_{0,\eta}\right) \\ &\quad + \mathbf{R}_\eta \mathbf{N}_{0,\eta} \Delta_y \mathbf{T}_{0,\eta-1}(\mathbf{u}_{0,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{0,\eta}).\end{aligned}$$

Durch Anwendung der gleichen Schlüsse wie in b2) folgt dann

$$|\tilde{\mathbf{H}}_\eta| \leqq \frac{C_6}{n} + C_7 e_\eta + n C_8 e_\eta^2 \tag{5.35}$$

für $\eta = 0, \ldots, \hat{\eta} - 1$. Nach [8: Hilfssatz 4) ist $\tilde{\mathbf{H}}_\eta = \mathbf{R}_\eta \mathbf{N}_{0,\eta} \Delta_y \mathbf{w}_{0,\eta}$ äquivalent mit

$$l\mathbf{w}_\eta = \Delta_y \mathbf{w}^+_{0,\eta} - \mathbf{T}^+_{0,\eta} \mathbf{M}'_\eta \Delta_y \mathbf{w}^-_{0,\eta} = \mathbf{T}^+_{0,\eta} \mathbf{M}_\eta'' \tilde{\mathbf{H}}_\eta \tag{5.36}$$

[10]) s. Seite 206.

(vgl. Umformung von (5.11) in (5.12) sowie (5.13)). Hieraus folgt mit (5.35) leicht die Abschätzung von $\|lw\|_{0,\bar\eta}$.

b4) Beachten wir für $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{T}^+(0,\cdot,\cdot)\,\mathbf{M}' \in C^{0,1}_{(m-r)\times r}(\bar{Q}^0)$ noch (5.31), so ergibt sich letztendich aus (5.30) mit (5.34)—(5.36) für $\bar\eta \leqq \hat\eta - 1$

$$e_{\bar\eta+1} \leqq (\bar\eta + 1)\, C_9 \left(\frac{1}{n} + e_{\bar\eta}\right)^2 (1 + ne_{\bar\eta+1}).$$

c) Aus dieser Ungleichung folgt durch Induktion über η, daß $e_\eta \leqq 1/n$ für alle $\eta \leqq \min\{n/8C_9, \hat\eta\}$ gilt. Wegen (5.29) erhalten wir daraus für dieselben η die Abschätzung

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_\eta \leqq m\,\|\mathbf{N}\|_{\bar Q} \cdot \frac{1}{n} =: \frac{\hat C}{n}. \tag{5.37}$$

d) Zur Bestimmung des $\hat\tau$ in der Behauptung des Satzes bemerken wir zunächst, daß $\|\varDelta_x \mathbf{u}\|_\eta$ gleichmäßig beschränkt ist für $\eta \leqq \min\{n/8C_9, \hat\eta\}$, denn es gilt mit (5.37)

$$|\varDelta_x \mathbf{u}_{\xi,\eta}| \leqq \frac{1}{h}\left(|\mathbf{u}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi+1,\eta} - \hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta}| + |\hat{\mathbf{u}}_{\xi,\eta} - \mathbf{u}_{\xi,\eta}|\right) \leqq 2\hat C + L_a.$$

Aus (5.24), (5.25), (5.27) ergibt sich für diese η auch die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\varDelta_y \mathbf{u}\|_\eta$.

Durch Übertragung der Überlegungen in Folgerung 1 folgt daraus die Existenz eines von n unabhängigen $\hat\tau > 0$ mit $n\hat\tau < \min\{n/8C_9, n\tau - 1, \eta_1\}$ für hinreichend großes n, so daß für alle $\eta \leqq n\hat\tau$ die Abschätzung (5.37) gilt ∎

Folgerung 4: *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt für die Fortsetzung* $\mathscr{E}^{(n)}\mathbf{u}^{(n)}$ *von* $\mathbf{u}^{(n)}_{\xi,\eta}$

$$\mathscr{E}^{(n)}\mathbf{u}^{(n)} \rightrightarrows \hat{\mathbf{u}} \quad \textit{auf } \mathfrak{V}^{\hat\tau} \quad \textit{für} \quad n \to \infty.\text{[9]}$$

Beweis: Von $V^{(n)} \cap \mathfrak{V}^{\hat\tau}$ ausgehend bilden wir für $\mathbf{u}^{(n)}_{\xi,\eta}$ und $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}_{\xi,\eta}$ gemäß (4.1) und (4.4) die entsprechenden Fortsetzungen auf $\mathfrak{V}$. Unter Beachtung von (4.6) erhalten wir

$$\|\mathscr{E}^{(n)}\mathbf{u}^{(n)} - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathfrak{V}^{\hat\tau}} \leqq \|\mathbf{u}^{(n)} - \hat{\mathbf{u}}^{(n)}\|_{0,[n\hat\tau]} + \|\mathscr{E}^{(n)}\hat{\mathbf{u}}^{(n)} - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathfrak{V}^{\hat\tau}},$$

woraus wegen (5.28) und der Konsistenzeigenschaft [12: Lemma 3.4] für $\hat{\mathbf{u}} \in C^0_m(\mathfrak{V}^{\tau})$ die Behauptung folgt ∎

Bemerkung 12: Unser Existenzsatz für **P I** ermöglicht auch die Anwendung anderer Differenzenverfahren als des hier dargestellten, insbesondere solcher mit krummlinigen Maschengittern (s. z. B. [3: S. 243—246]). Außerdem gestattet dieser Existenzsatz auch den Nachweis der Lösbarkeit von anderen gemischten Problemen. Wir können z. B. die Aufgabe betrachten, eine Lösung von (4.15) zu finden, die auf einer Anfangskurve $\mathfrak{A}$ vorgegebene Anfangswerte annimmt sowie auf zwei Randkurven $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, die vom Anfangs- bzw. Endpunkt von $\mathfrak{A}$ ausgehen, vorgeschriebene Randbedingungen erfüllt. Die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems in einem hinreichend kleinen Bereich um $\mathfrak{A}$, begrenzt durch $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ergibt sich durch zweimalige Anwendung unseres Resultats und aus dem Eindeutigkeitssatz für das Cauchysche Anfangswertproblem zu (4.15). Für solche gemischten Probleme, wie auch für unser Goursat-Problem **P I**, kann dann (unter Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit) das unbedingt stabile Differenzenverfahren von KELLER und THOMÉE aus [9] angewendet werden.

---

[9]) s. Seite 205.

LITERATUR

[1] Beckert, H.: Über quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Das Anfangswertproblem, die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe, das charakteristische Problem. Ber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. **97** (1950), 3–68.
[2] Courant, R., Friedrichs, K. O., und H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. **100** (1928), 32–74.
[3] Courant, R., Isaacson, E., and M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. Comm. Pure Appl. Math. **5** (1952), 243–255.
[4] Courant, R., and P. Lax: Nonlinear partial differential equations with two independent variables. Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), 255–273.
[5] Friedrichs, K. O.: Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables. Amer. J. Math. **70** (1948), 555–589.
[6] Friedrichs, K.O., und H. Lewy: Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen. Nachr. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **26** (1932), 135–143.
[7] Gittel, H.-P.: Das Goursat-Problem für quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für dessen Lösung mittels Differenzenverfahren. Diss. A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1981.
[8] Gittel, H.-P.: Über das Goursat-Problem für quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Z. Anal. Anw. **4** (1985), 65–83.
[9] Keller, H. B., and V. Thomée: Unconditionally stable difference methods for mixed problems für quasi-linear hyperbolic systems in two dimensions. Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 63–73.
[10] Kufner, A., John, O., and S. Fučik: Function spaces. Prague: Academia 1977.
[11] Prouse, G.: Sulla risoluzione del problema misto perle equazioni iperboliche non-lineari mediante le differenze finite. Ann. Mat. Pura Appl. (Serie 4) **46** (1958), 313–343.
[12] Thomée, V.: Difference methods for two dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems. Arch. Rational Mech. Anal. **8** (1961), 69–88.
[13] Thomée, V.: A mixed boundary-value problem for hyperbolic first order systems with derivatives in the boundary conditions. Arch. Rational Mech. Anal. **8** (1961), 435–443.
[14] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionslanalysis. I: Fixpunktsätze. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.

Manuskripteingang: 24. 08. 1984

VERFASSER:

Dr. Hans-Peter Gittel
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10