Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (3) 1986, S. 223–236

# Entartete lineare elliptische Differentialgleichungen und anisotrope Sobolewräume: Existenz schwacher Lösungen

H.-J. Herrler

Untersucht werden Dirichletsche Randwertprobleme zu entarteten linearen elliptischen Systemen in beschränkten Gebieten. Durch Verallgemeinerung der Bedingung der starken Elliptizität wird die Theorie schwacher Lösungen auf eine Klasse von Systemen ausgedehnt, bei denen die höchsten Ableitungen bezüglich verschiedener Variablen oder gesuchter Funktionen von verschiedener Ordnung sind. Für diese Systeme wird eine Gårdingsche Ungleichung über anisotropen Sobolewräumen hergeleitet. Daraus resultieren Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für schwache Lösungen.

Исследуются краевые задачи Дирихле для вырожденных линейных эллиптических систем в ограниченных областях. С помощью обобщения условия сильной эллиптичности удается распространить теорию обобщенных решений на класс систем, которые по отношению к некоторым координатам или неизвестным функциям имеют пониженный порядок. Для таких систем выводится неравенство Гординга в анизотропных пространствах Соболева. С помощью этого неравенства получены предложения о существовании и единственности обобщенных решений.

This paper deals with Dirichlet boundary value problems for degenerated linear elliptic systems in bounded domains. Generalising the condition of strong ellipticity we extend the theory of weak solutions to a class of certain systems. In these ones the highest derivatives with respect to several variables or to several unknowns have different orders. For such systems Gårding's inequality in anisotropic Sobolev spaces can be proved. In this way we get existence and uniqueness results for weak solutions.

## 1. Überblick

Gegenstand der Untersuchung sind schwache Dirichletprobleme für eine Klasse entarteter linearer elliptischer Differentialgleichungen in beschränkten Gebieten. Bekanntlich ist die starke Elliptizität eines linearen Differentialoperators unter gewissen Voraussetzungen äquivalent zur Gültigkeit der Gårdingschen Ungleichung. Stark anisotrope Operatoren — die höchsten Ableitungen weisen in den einzelnen Koordinatenrichtungen unterschiedliche Ordnung auf — sind jedoch nicht stark elliptisch. Beispiele solcher Gleichungen begegnen uns etwa in der Schalentheorie.

Im ersten Teil unserer Untersuchungen werden wir die Bedingung der starken Elliptizität verallgemeinern, so daß ihr eine große Klasse anisotroper Operatoren genügt. Neben dem Spezialfall elliptischer Operatoren lassen sich u. a. auch gewisse parabolisch entartete und total hyperbolische behandeln. Für diese Operatoren leiten wir unter einer zusätzlichen Vorausssetzung eine Gårdingsche Ungleichung über anisotropen Sobolewräumen her, woraus sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für schwache Lösungen ergeben.[1]) Die zusätzliche Voraussetzung betrifft die Schwan-

[1]) In einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift werden wir Resultate über die Regularität schwacher Lösungen angeben.

kung der Koeffizienten bei den höchsten Ableitungen und kann durch ein Gegenbeispiel motiviert werden. Unsere Ergebnisse umfassen den Fall variabler Koeffizienten. Sie gelten nicht nur für Gleichungen, sondern auch für Systeme. In der Darstellung werden wir uns aber auf den Fall einer Gleichung beschränken; die Übertragung auf Systeme bereitet keine neuen Schwierigkeiten.

Anregungen zu dieser Problemstellung und zu den eingesetzten Mitteln ergaben sich aus Arbeiten von A. KUFNER und J. RÁKOSNÍK, die anisotrope Operatoren im nichtlinearen Fall untersuchten. Als sehr fruchtbar für unsere Zwecke erwies sich eine Beschreibung der anisotropen Sobolewräume durch konvexe Mengen von Multiindizes, wie sie z. B. in [5] benutzt wurde. Resultate im linearen Fall finden wir auch bei S. M. NIKOL'SKII [4]. I. S. LOUHIVAARA und C. G. SIMADER betrachteten sogenannte stark $2t$-koerzitive Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten [3]. Zu diesen Untersuchungen gibt es einige Berührungspunkte.

In einem zweiten Teil behandeln wir mit Methoden der Theorie schwacher Lösungen gewisse anisotrope elliptische Systeme, bei denen die höchsten Ableitungen bezüglich verschiedener gesuchter Funktionen von verschiedener Ordnung sind. Solche Systeme wurden bereits 1964 von S. AGMON, A. NIRENBERG und A. DOUGLIS [1] als Beispiel elliptischer Systeme mit komplementären Randbedingungen im Zusammenhang mit der Herleitung Schauderscher Abschätzungen angegeben. Wir leiten hier die Gårdingsche Ungleichung her und zeigen darüber hinaus die Notwendigkeit der verallgemeinerten starken Elliptizität für die Gültigkeit derselben.

## 2. Physikalische Motivation

Wir führen als Beispiel die rippenversteifte orthotrope Schale an. Ihre Behandlung führt unter gewissen Annahmen auf anisotrope Gleichungen.

Nach A. S. WOLMIR [8] lauten die Grundgleichungen der biegsamen flachen orthotropen Schale bei Beschränkung auf die linearen Glieder, d. h., wenn die Schale im Anfangszustand frei von Mittelflächenkräften ist und nur kleine Durchbiegungen erfährt:

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{D_3}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{D_2}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{q}{h} + k_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\\ \delta_1\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\delta_3\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \delta_2\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} &= -k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei bedeuten:

| | |
|---|---|
| $w(x, y)$ | Durchbiegung der Schalenmittelfläche in $z$-Richtung, |
| $\varphi(x, y)$ | Spannungsfunktion der Schalenmittelfläche, |
| $q(x, y)$ | Intensität der Belastung in Normalenrichtung, |
| $h$ | Schalendicke, |
| $k_x$, $k_y$ | Hauptkrümmungen der Schalenmittelfläche. |

Die Orthotropie der Schale kann man sich dadurch entstanden denken, daß man eine (isotrope) Schale durch dicht angeordnete Rippen verstärkt. Dabei kann man die Steifigkeit der Rippen mit gewisser Näherung auf den Schalenquerschnitt verteilen. Verlaufen die untereinander gleichen Rippen parallel zur $x$-Richtung (s. Bild 1), ergeben sich nach [8] für die Koeffizienten $D_i$ im obigen System die Ausdrücke

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EJ}{l}, \qquad D_2 = D_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

wobei $J$ das Trägheitsmoment des Rippenquerschnitts (bezogen auf dessen Schwerachse), $l$ den Rippenabstand, $E$ den Elastizitätsmodul und $\mu$ die Poissonzahl bezeichnen. Im Falle konstanter Krümmungen (Zylinderschale $k_x = 1/R$, $k_y = 0$) läßt sich im System (2.1) die Spannungsfunktion $\varphi$ eliminieren. Es verbleibt eine Gleichung für die Durchbiegung $w$ (wir setzen jetzt $q = 0$):

$$a_1 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + a_2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6\, \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4\, \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2\, \partial y^6} + a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} + k_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{2.2}$$

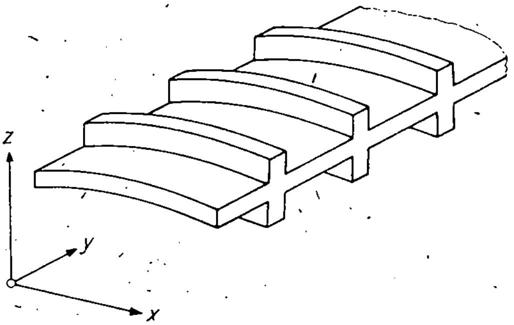


Abb. 1

Nimmt man dabei an, daß sich die Konstanten $\delta_i$ im System (2.1) in folgender Weise durch die isotropen Materialkonstanten $E$, $\mu$, $G$ (Schubmodul) ausdrücken lassen:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{E}, \qquad 2\delta_3 = \frac{1}{G} - 2\frac{\mu}{E},$$

so haben die Koeffizienten mit den Abkürzungen

$$A = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)}, \qquad B = \frac{J}{hl}$$

die Form

$$a_1 = A + B, \quad a_2 = 4A + 2B, \quad a_3 = 6A + B, \quad a_4 = 4A, \quad a_5 = A.$$

Falls sich die Terme

$$a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2\, \partial y^6} \text{ und } a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8}$$

gegenüber den übrigen vernachlässigen lassen, stellt (2.2) gerade eine der untersuchten anisotropen Gleichungen dar. Notwendig für die Vernachlässigung der beiden Terme ist $B \gg A$, d. h. eine gegenüber dem Trägheitsmoment der Rippen vernachlässigbare Biegesteifigkeit der unverstärkten Schale.

Die betrachteten Gleichungen galten bisher nur bei symmetrischer Anordnung der Rippen beidseitig der Schale. Werden die Verstärkungen jedoch nur auf einer Schalenseite angebracht, ergeben sich Korrekturen an den Koeffizienten, wie sie K. Trenks [6] für die Platte angegeben hat. Nimmt man an, daß sich seine Überlegungen auch auf unseren Fall der flachen Schale übertragen und verstärkt man dann die Schale einseitig durch zwei sich kreuzende, achsenparallele Rippensysteme unterschiedlicher Abmessungen, so können die Koeffizienten $a_4$ und $a_5$ bei geeignet gewählten Maßen trotz endlicher Biegesteifigkeit der Schale verschwinden.

## 3. Bezeichnungen

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seien $r$-dimensionale Multiindizes, deren Komponenten wir durch tiefstehende Indizes kennzeichnen: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Im Zusammenhang mit Fourierreihen sei $k$ ein ganzzahliger Vektor. Wir schreiben:

$$\alpha \leqq \beta \quad \text{falls} \quad \alpha_i \leqq \beta_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r;$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_r \text{ für die Länge eines Multiindex;}$$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}, \quad k^\alpha := k_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot k_r^{\alpha_r}, \quad 0^0 := 1, \; \theta \text{ Nullvektor.}$$

Positive Konstanten, deren konkreter Wert ohne Belang ist, bezeichnen wir meist — wie üblich — einheitlich mit $c$. Zur Vereinfachung verzichten wir bei Integrationen auf Angabe des Integrationsgebietes $\Omega$. Dieses (beschränkte) Gebiet $\Omega$ möge überdies in einem achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $2\pi$ enthalten sein, um Fourierentwicklungen einfacher notieren zu können. $\|\cdot\|_0$ ist die Norm im Funktionenraum $L_2(\Omega)$. Unter conv $A$ verstehen wir die konvexe Hülle der Menge $A$ im $\mathbf{R}^r$. $\nu$, $\mu$ seien Summationsindizes, die grundsätzlich die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ durchlaufen ($m$ ist dabei die Zahl der gesuchten Funktionen bei Differentialgleichungssystemen).

## 4. Problemstellung

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu - \lambda u = f, \qquad f \in L_2(\Omega), \qquad \lambda \text{ komplex} \tag{4.1}$$

in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^r (r \geqq 2)$ mit dem Differentialoperator

$$Lu := \sum_{\alpha,\beta\in E} D^\beta[b_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u(x)]. \tag{4.2}$$

Von den Koeffizienten $b_{\alpha\beta}$ setzen wir hinreichende Differenzierbarkeitseigenschaften voraus. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W_0^E(\Omega)$, d. h. mit dem formal adjungierten Operator $L^*$ soll

$$(u, L^*\varphi - \bar{\lambda}\varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \tag{4.3}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gelten. $E$ bezeichne dabei eine nichtleere, endliche Menge $r$-dimensionaler Multiindizes mit den Eigenschaften:

(E1) $E$ ist eine konvexe Menge (d. h. $E$ ist der Durchschnitt von conv $E$ mit der Menge aller Multiindizes).

(E2) Falls $\alpha \in E$ und $\beta \leqq \alpha$ ist, so ist $\beta \in E$.

(E3) $\{\alpha : |\alpha| \leqq 1\} \subset E$.

Wir definieren:

$$\|u\|_E := \sum_{\alpha\in E} \|D^\alpha u\|_0$$

und $W_0^E(\Omega)$ ist der Abschluß der Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_E$. Solche *anisotropen Sobolewräume* wurden bereits in [5] von J. RÁKOSNÍK definiert. Mit dem Skalarprodukt²)

$$(u, v)_E := \sum_{\alpha \in E} \int D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v}\, dx$$

ist $W_0^E(\Omega)$ ein Hilbertraum. Für Gebiete mit hinreichend guten Randeigenschaften (im einfachsten Fall etwa achsenparallele Quader) umfaßt der Raum $W_0^E(\Omega)$ gerade jene Funktionen mit verallgemeinerten Randwerten Null (vgl. im einzelnen dazu [5]).

Die Menge $E$ beschreibt die Struktur des Operators. Wir definieren weiter (s. auch Bild 2):

$$\tilde{E} := \{\alpha = \beta + \gamma : \beta, \gamma \in E\},$$

$$S := \{\alpha \in E : \lambda\alpha \notin \operatorname{conv} E \quad \text{für alle} \quad \lambda > 1\},$$

$$\tilde{S} := \{\alpha \in \tilde{E} : \lambda\alpha \notin \operatorname{conv} \tilde{E} \quad \text{für alle} \quad \lambda > 1\}.$$

$\tilde{S}$ charakterisiert gerade die „höchsten Ableitungen“. Im folgenden setzen wir eine weitere Eigenschaft von $E$ voraus:

(E4) Falls $\alpha \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$ ist, so gibt es ein $\beta \in E$ und ein $\gamma \in E \setminus S$ mit $\alpha = \beta + \gamma$.³)

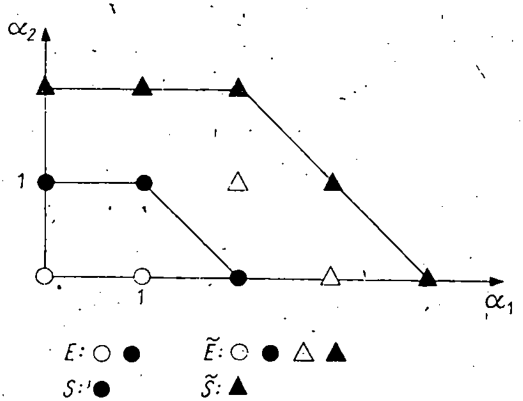


Abb. 2

## 5. Einige Hilfssätze

Wir formulieren zunächst einige Eigenschaften der Mengen $E$, $\tilde{E}$, $S$, $\tilde{S}$ und ihre Beziehungen untereinander als Hilfssätze. Für den 2- und 3-dimensionalen Raum lassen sich diese Aussagen leicht aus anschaulich geometrischen Überlegungen gewinnen. Im isotropen Fall sind sie elementar.

²) Dieses Skalarprodukt erzeugt die Norm $|||\cdot|||_E := \left(\sum_{\alpha \in E} \|D^\alpha \cdot\|_0^2\right)^{1/2}$. Unsere Norm $\|\cdot\|_E$ ist dazu äquivalent.

³) Herrn Dr. W. Berndt verdanke ich den Nachweis, daß diese Eigenschaft im Fall $r = 2$ eine Folge von (E1) und (E2) ist.

Lemma 5.1: (i) $\alpha \in \operatorname{conv} E$ *genau dann, wenn* $\alpha$ *konvexe Linearkombination von* $\theta$ *und Elementen aus* $S$ *ist.*

(ii) $\alpha \in \operatorname{conv} \tilde{E}$ *genau dann, wenn* $\alpha$ *konvexe Linearkombination von* $\theta$ *und Elementen aus* $2S$ *ist.*

Beweis: (i) $B \subset E$ sei eine minimale Menge von Multiindizes, die $\operatorname{conv} E$ aufspannen. Wir zeigen: Jedes $\beta^j \in B \setminus \{\theta\}$ gehört zu $S$. Gäbe es ein $\beta \in B \setminus \{\theta\}$, $\beta \notin S$, so würde nach Definition ein $\lambda > 1$ existieren mit $\lambda\beta \in \operatorname{conv} E$, d. h.

$$\lambda\beta = c\beta + \sum c_j\beta^j,$$

wobei über $j$ mit $\beta^j \neq \beta$ summiert wird und $c + \sum c_j \leqq 1$, $c_j \geqq 0$, $c \geqq 0$ ist. Dann gilt aber

$$\beta = (\lambda - c)^{-1} \sum c_j\beta^j.$$

Damit ist $\beta$ als konvexe Linearkombination der übrigen Elemente aus $B$ darstellbar im Widerspruch zur Minimalität.

(ii) Sei $\alpha \in \tilde{E}$. Dann ist $\alpha = \gamma + \delta$ mit $\gamma, \delta \in E$. Nach (i) gilt

$$\gamma = \sum c_j\beta^j \quad \text{und} \quad \delta = \sum d_j\beta^j$$

mit

$$\sum c_j = \sum d_j = 1, \qquad c_j \geqq 0, \qquad d_j \geqq 0, \qquad \beta^j \in S \cup \{\theta\}.$$

Also ist

$$\alpha = \sum \frac{c_j + d_j}{2}\, 2\beta^j$$

konvexe Linearkombination über $2S$ und $\theta$. In umgekehrter Richtung sind die Behauptungen trivial ▮

Wir weisen hier ausdrücklich darauf hin, daß die Beweise zu Lemma 5.1 und zu dem folgenden Lemma 5.2 keinen Gebrauch von der Ganzzahligkeit der Komponenten der Multiindizes machen. Also bleiben diese Lemmata gültig, falls man von den Komponenten der Multiindizes lediglich voraussetzt, daß sie nichtnegativ sind.

Lemma 5.2: (i) *Ist* $\alpha \in \operatorname{conv} E$, $\beta \leqq \alpha$, *so ist auch* $\beta \in \operatorname{conv} E$.

(ii) *Ist* $\alpha \in \operatorname{conv} \tilde{E}$, $\beta \leqq \alpha$, *so ist auch* $\beta \in \operatorname{conv} \tilde{E}$.

Der Beweis stützt sich auf die Eigenschaft (E2) und wird nicht ausgeführt ▮

Lemma 5.3: (i) *Ist* $\alpha \in E \setminus S$, $\beta \leqq \alpha$, *so ist auch* $\beta \in E \setminus S$.

(ii) *Ist* $\alpha \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$, $\beta \leqq \alpha$, *so ist auch* $\beta \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$.

Beweis: (i) Wegen $\lambda\alpha \in \operatorname{conv} E$ für ein gewisses $\lambda > 1$ und $\lambda\beta \leqq \lambda\alpha$ ist nach Lemma 5.2 $\lambda\beta \in \operatorname{conv} E$. (ii) beweist man analog ▮

Lemma 5.4: *Ist* $\alpha \in E$, $\beta \in E \setminus S$, *so ist* $\alpha + \beta \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$.

Beweis: Für ein gewisses $\lambda > 1$ gilt $\lambda\beta \in \operatorname{conv} E$. Damit gehört auch die konvexe Linearkombination

$$\delta := \frac{2}{\lambda + 1}(\lambda\beta) + \left(1 - \frac{2}{\lambda + 1}\right)\alpha$$

zu $\operatorname{conv} E$. Unter Beachtung von Lemma 5.1 erhält man:

$$\alpha + \delta = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}(\alpha + \beta) \in \operatorname{conv} \tilde{E} \quad \text{mit} \quad \frac{2\lambda}{\lambda + 1} > 1 \;▮$$

In Sobolewräumen mit Nullrandbedingungen kann man äquivalente Normen einführen, die nur die höchsten Ableitungen berücksichtigen. Wir werden diese bei isotropen Sobolewräumen bekannte Tatsache auf anisotrope Räume übertragen. Weiter leiten wir ein Analogon zum Ehrlingschen Lemma her. Grundlegend dafür und für weitere zahlreiche Abschätzungen ist die Konvexität der Potenzfunktion.

Lemma 5.5: *$k$, $\alpha$ und $\beta^i$ ($i = 1, \ldots, n$) seien $r$-dimensionale Vektoren mit nichtnegativen Komponenten, die bei $k$ zusätzlich ganzzahlig sein mögen. Weiter sei*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \beta^i \quad \textit{mit} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \qquad b_i \geqq 0.$$

*Dann gilt*

$$k^\alpha \leqq \sum_{i=1}^{n} b_i k^{\beta^i}. \tag{5.1}$$

Beweis: Zunächst seien alle $b_i$ positiv. Dann ist

$$k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \ldots k_r^{\alpha_r} = (k^{\beta^1})^{b_1} \ldots (k^{\beta^n})^{b_n} \leqq b_1 k^{\beta^1} + \cdots + b_n k^{\beta^n}.$$

Dabei haben wir die Ungleichung zwischen gewichtetem geometrischen und arithmetischen Mittel genutzt. Die Rechnung bleibt aber auch richtig, wenn einige der $b_i$ verschwinden ∎

Lemma 5.6: $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_S$[4]) *sind äquivalente Normen auf $W_0{}^E(\Omega)$.*

Beweis: Es genügt, die Ungleichung

$$\|\varphi\|_E \leqq c\, \|\varphi\|_S \text{ für } \varphi \in C_0{}^\infty(\Omega)$$

zu zeigen. Wir entwickeln $\varphi$ in eine Fourierreihe:

$$\varphi = (2\pi)^{-r/2} \sum_k d_k\, e^{ikx},$$

und haben

$$\|D^\alpha \varphi\|_0{}^2 = \sum_k |d_k|^2\, k^{2\alpha}. \tag{5.2}$$

Unter Beachtung der Ungleichung von Friedrichs gilt

$$\|\varphi\|_E{}^2 \leqq c \sum_{\alpha \in E \setminus \{\theta\}} \|D^\alpha \varphi\|_0{}^2. \tag{5.3}$$

$\alpha \in E \setminus \{\theta\}$ gestattet nach Lemma 5.1 die Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} b_i \beta^i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{n} b_i = 1, \quad b_i \geqq 0, \quad \beta^1, \ldots, \beta^n \in S \quad \text{und} \quad \beta^0 = \theta.$$

In unserem Fall ist Lemma 5.5 für beliebige $k$ anwendbar:

$$k^{2\alpha} \leqq \sum_{i=1}^{n} k^{2\beta^i} + 1.$$

---

[4]) In Analogie zur Definition von $\|\cdot\|_E$ sei $\|u\|_S := \sum_{\alpha \in S} \|D^\alpha u\|_0$.

Für $k = \theta$ ist $k^{2\alpha} = 0$, also haben wir

$$k^{2\alpha} \leqq 2 \sum_{\beta \in S} k^{2\beta}. \tag{5.4}$$

Ist hingegen $k \neq \theta$, so darf eine Komponente von $k$ nicht verschwinden, etwa $|k_{i^*}| \geqq 1$. Es gibt dazu einen Multiindex $\gamma \in S$ der Form $\gamma = (0, \ldots, 0, \gamma_{i^*}, 0, \ldots, 0)$ mit $\gamma_{i^*} \geqq 1$. Folglich ist

$$1 \leqq k_{i^*}^{2\gamma_{i^*}} = k^{2\gamma} \leqq \sum_{\beta \in S} k^{2\beta}.$$

Demnach gilt wieder (5.4). Zusammen mit (5.2) und (5.3) ergibt sich die Behauptung ∎

Lemma 5.7: *Zu jedem positiven $\varepsilon$ gibt es eine positive Konstante $c(\varepsilon)$, so daß für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\|\varphi\|^2_{E \setminus S} \leqq \varepsilon \, \|\varphi\|_E{}^2 + c(\varepsilon) \, \|\varphi\|_0{}^2.$$

Beweis: Wir entwickeln $\varphi$ wiederum in eine Fourierreihe. Wenn wir die Ungleichung

$$k^{2\alpha} \leqq \varepsilon \sum_{\beta \in S} k^{2\beta} + c(\varepsilon) =: J \tag{5.5}$$

für beliebige $k$ und $\alpha \in E \setminus S$ zeigen, ist damit das Lemma bewiesen. Zu $\alpha \in E \setminus S$ gibt es ein $\lambda > 1$ mit $\lambda \alpha \in \operatorname{conv} E$ und damit $2\lambda\alpha \in \operatorname{conv} \tilde{E}$. Wir setzen

$$K_0 := \max \left\{1 ; \varepsilon^{\frac{1}{1-\lambda}}\right\}, \qquad c(\varepsilon) := \max \{\varepsilon ; K_0\}. \tag{5.6}$$

$K_0$ und $c(\varepsilon)$ hängen über $\lambda$ von $\alpha$ ab. Da aber $E \setminus S$ endlich ist, kann man in (5.5) für alle $\alpha \in E \setminus S$ mit der gleichen Konstanten rechnen.

a) Sei $k^{2\alpha} \leqq K_0$. Dann gilt (5.5) wegen (5.6).

b) Sei $k^{2\alpha} > K_0$, d. h. $(k^{2\alpha})^{1-\lambda} < K_0{}^{1-\lambda} \leqq \varepsilon$. Dann ist

$$k^{2\alpha} = (k^{2\alpha})^\lambda \, (k^{2\alpha})^{1-\lambda} \leqq \left(\sum_{\beta \in S} k^{2\beta} + 1\right) \varepsilon \leqq J.$$

Hierbei haben wir uns auf die Lemmata 5.1 und 5.5 gestützt ∎

## 6. Stark elliptische Operatoren

Zunächst übertragen wir die bekannte Eigenschaft der starken Elliptizität auf von uns betrachtete anisotrope Operatoren.

Definition 6.1: Einen Differentialoperator (4.2) nennen wir *stark elliptisch*, falls es zu jedem $\alpha \in S$ eine positive Konstante $c_\alpha$ gibt, so daß die Relation

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha + \beta \in \tilde{S}} i^{|\alpha + \beta|} \, \xi^{\alpha+\beta} b_{\alpha\beta}(x) \right\} \geqq \sum_{\alpha \in S} c_\alpha{}^2 \xi^{2\alpha} \tag{6.1}$$

für alle reellen Vektoren $\xi \in \mathbf{R}^r$ und alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.[5]

Indem wir statt einer Elliptizitätskonstanten mit einem System $\{c_\alpha\}$ arbeiten, können wir die Bedingung $(\omega)$ (s. u.) besser ausschöpfen.

[5]) $\sum_{\alpha+\beta \in \tilde{S}}$ verstehen wir als Summation über alle $\alpha, \beta \in E$ mit $\alpha + \beta \in \tilde{S}$.

Beispiel 6.2: Es sei $r = 2$. Die Koeffizienten des Differentialoperators

$$Lu = a(x_1, x_2)\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + b(x_1, x_2)\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2} - c(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{6.2}$$

seien reell und mögen über $\Omega$ ein positives Infimum besitzen. Wählen wir $E = \{(0, 0), (1,0), (0,1), (2,0), 1,1)\}$, so ist $L$ stark elliptisch gemäß Definition 6.1. Es ist dann $S = \{(0,1), (2,0), (1,1)\}$ (vgl. Bild 2).

Einem Gegenbeispiel entnehmen wir, daß die starke Elliptizität allein im allgemeinen keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Gårdingschen Ungleichung ist. Aus diesem Grund formulieren wir eine zusätzliche Voraussetzung, die nur bei Operatoren mit variablen Koeffizienten und ,,kritischen Richtungen" eine gewisse Einschränkung an die Schwankung der höchsten Koeffizienten darstellt. Aus den Beweisen läßt sich entnehmen, daß diese Bedingung bei genauer Kenntnis der Struktur des Operators weiter abgeschwächt werden kann. Wir beginnen mit der Definition kritischer Richtungen.

Definition 6.3: Die Koordinatenrichtung $x_i$ nennen wir *kritisch*, falls es Multiindizes $\alpha, \beta \in S$ gibt, deren Differenz $\alpha - \beta$ der Einheitsvektor in $x_i$-Richtung ist.

In unserem Beispiel 6.2 erweist sich $x_1$ als kritische Richtung. Aus der Definition folgert man nachstehendes Lemma.

Lemma 6.4: *Gilt $\alpha \in S, \beta \in S, \alpha \geqq \beta, \alpha \neq \beta$, so hat $\alpha - \beta$ eine nichtverschwindende Komponente in kritischer Richtung.*

Gegenbeispiel 6.5: Wir betrachten wiederum den Operator (6.2) mit den dort getroffenen Voraussetzungen, die die starke Elliptizität gewährleisten. Darüber hinaus mögen die Koeffizienten folgende spezielle Gestalt haben:

$$a = \text{const} > 0, \quad b = b(x_1), \quad c = c(x_1).$$

Die Gårdingsche Ungleichung (vgl. Satz 7.1) lautet in diesem Fall

$$\operatorname{Re}\int Lu\cdot\bar u\,dx \geqq c_1\int\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right)dx - c_2\int|u|^2\,dx$$

mit positiven Konstanten $c_1, c_2$ für $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Setzen wir speziell

$$u(x_1, x_2) := \lambda^{-1}\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,e^{i\lambda x_1}$$

mit

$$\lambda > 0, \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty, \quad \operatorname{supp}(\varphi\cdot\psi) \subset \Omega, \quad \varphi, \psi \text{ reell}, \quad \varphi \geqq 0$$

in die Gårdingsche Ungleichung ein, führt der Grenzübergang $\lambda \to \infty$ zu

$$\int c(x_1)\,\varphi^2(x_1)\,dx_1 \geqq \int b(x_1)\,\varphi''(x_1)\,\varphi(x_1)\,dx_1\,.$$

Schwanken die Werte von $b$ in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $\varphi''$ hinreichend stark, ergibt sich hieraus ein Widerspruch.

Die nicht kritischen Koordinatenrichtungen wollen wir im folgenden mit $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $(0 \leqq s \leqq r)$ bezeichnen. $\mathcal{P}$ sei Projektionsoperator auf den Unterraum der nicht kritischen Richtungen:

$$x = (x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_r) \mapsto \mathcal{P}x = (x_1, \ldots, x_s)\,.$$

Bei $s = 0$ setzen wir $\mathcal{P}x \equiv 0$.

Bedingung ($\omega$): $L$ sei ein Differentialoperator (4.2), welcher stark elliptisch gemäß (6.1) ist. Wir sagen, *$L$ genügt der Bedingung* ($\omega$), falls es eine positive Konstante $\varepsilon$ gibt, so daß für alle $\alpha, \beta \in E$ mit $\alpha + \beta \in \tilde{S}$ und für alle $x, y \in \Omega$ mit $|\mathcal{P}x - \mathcal{P}y| < \varepsilon$ die Ungleichung

$$|b_{\alpha\beta}(x) - b_{\alpha\beta}(y)| \leqq q c_\alpha c_\beta B^{-1}$$

mit $\tilde{q} < 1$ erfüllt ist. $B$ ist dabei die Anzahl der Elemente der Menge $S$.

Grob gesprochen fordern wir also von den Koeffizienten vor den höchsten Ableitungen, daß ihre Schwankung in den kritischen Richtungen nicht zu groß wird (vgl. Bild 3).

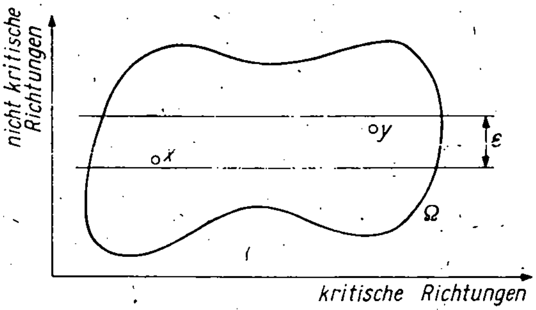


Abb. 3

## 7. Gårdingsche Ungleichung

Nunmehr sind wir in der Lage, eine Gårdingsche Ungleichung für anisotrope Operatoren herzuleiten:

Satz 7.1: *$L$ sei ein stark elliptischer Differentialoperator* (4.2), (6.1), *welcher der Bedingung* ($\omega$) *genügt. Dann gilt die Gårdingsche Ungleichung*

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 \geqq c \, \|u\|_E^2 - \tilde{c} \, \|u\|_0^2 \tag{7.1}$$

*mit positiven Konstanten $c$, $\tilde{c}$ für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$.*
Beweisskizze (im isotropen Fall vgl. hierzu [7]): A) Zunächst kann man, ausgehend von (6.1), mittels Fourierentwicklung für den Operator

$$L^0 := \sum_{\alpha+\beta \in \tilde{S}} b_{\alpha\beta}(x^0) \, D^{\alpha+\beta} \qquad (x^0 \in \Omega, \text{fest}) \tag{7.2}$$

die Beziehung

$$\operatorname{Re}(L^0 u, u)_0 \geqq \sum_{\alpha \in S} c_\alpha^2 \, \|D^\alpha u\|_0^2 \tag{7.3}$$

herleiten.

B) Im Fall $s \geqq 1$ setzen wir $\hat{\Omega} := \mathcal{P}\Omega$. $\{\hat{\Omega}_j\}$ sei eine endliche, offene Überdeckung von $\hat{\Omega}$ durch Kugeln vom Durchmesser $\varepsilon$ ($\varepsilon$ aus der Bedingung ($\omega$)) und $\{\hat{w}_j(x_1, \dots, x_s)\}$ eine zugehörige Zerlegung der Einheit mit $\hat{w}_j \in C_0^\infty(\hat{\Omega}_j)$, $0 \leqq \hat{w}_j \leqq 1$, $\sum \hat{w}_j^2 = 1$ in $\hat{\Omega}$. Weiter sei $\Omega_j := \{x \in \Omega : \mathcal{P}x \in \hat{\Omega}_j\}$, $w_j(x) := \hat{w}_j(\mathcal{P}x)$ für $x \in \Omega$. Wir betrachten jetzt den Operator (4.2), beschränken uns aber auf Funktionen $u$ mit supp $u \subset \Omega_j$ für ein

$j$, $x^0 \in \Omega_j$. Unter Beachtung von (7.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in S} c_\alpha^2 \|D^\alpha u\|_0^2 - \operatorname{Re}(Lu, u)_0 \\ &\leqq \operatorname{Re} \int \sum_{\alpha+\beta \in \tilde{S}} D^\beta \left[ \left( b_{\alpha\beta}(x^0) - b_{\alpha\beta}(x) \right) D^\alpha u \right] \bar{u}\, dx \\ &\quad - \operatorname{Re} \int \sum_{\alpha+\beta \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}} D^\beta \left( b_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u \right) \bar{u}\, dx. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Bezeichnen wir das erste Integral mit $J_1$, so können wir nach partieller Integration unter Einsatz der Bedingung ($\omega$) und der Umkehrung von Lemma 5.4 weiter abschätzen

$$J_1 \leqq q \sum_{\alpha \in S} c_\alpha^2 \|D^\alpha u\|_0^2 .$$

(E4) erlaubt, im zweiten Integral $J_2$ von (7.4) die partielle Integration so auszuführen, daß eine Ableitung zu $E \setminus S$, die andere zu $E$ gehört. Daher ist $J_2 \leqq c\, \|u\|_{E \setminus S}\, \|u\|_E$. Beachten wir die bekannte Ungleichung $a \cdot b \leqq \frac{\varepsilon}{2}\, a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\, b^2$, so gilt mit Lemma 5.7

$$J_2 \leqq \varepsilon' \, \|u\|_E^2 + c(\varepsilon')\, \|u\|_0^2$$

für beliebiges $\varepsilon' > 0$. Subtrahieren wir $J_1$ in (7.4) und nutzen die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_S$, erhalten wir schließlich

$$c\, \|u\|_E^2 - \operatorname{Re}(Lu, u)_0 \leqq \varepsilon' \, \|u\|_E^2 + c(\varepsilon')\, \|u\|_0^2 .$$

Wählen wir nun $\varepsilon'$ hinreichend klein, ist das gerade (7.1). Für $s = 0$ erübrigt sich eine Überdeckung und der Satz ist bewiesen.

C) Jetzt sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Es ist $\operatorname{supp} w_j u \subset \Omega_j$ und

$$\|u\|_E^2 \leqq c \sum_j \|w_j u\|_E^2 .$$

Mit den Ergebnissen von Teil B gilt also

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 &\leqq c \sum_j \operatorname{Re} \left( L(w_j u), w_j u \right)_0 + c \sum_j \|w_j u\|_0^2 \\ &= c \int \operatorname{Re} \sum_j \sum_{\alpha, \beta \in E} (-1)^{|\beta|}\, b_{\alpha\beta}(x) \sum_{\gamma \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma} w_j D^\gamma u \\ &\quad \times \sum_{\delta \leqq \beta} \binom{\beta}{\delta} D^{\beta-\delta} w_j D^\delta \bar{u}\, dx + c\, \|u\|_0^2 . \end{aligned}$$

Für $\gamma = \alpha$ und $\delta = \beta$ steht das Integral gerade für $\operatorname{Re}(Lu, u)_0$. Ist $\gamma \neq \alpha$ und $\gamma \in E \setminus S$ (oder $\delta \neq \beta$ und $\delta \in E \setminus S$), so läßt sich das Integral durch $c\, \|u\|_E\, \|u\|_{E \setminus S}$ abschätzen. Die verbleibenden Summanden mit $\alpha \in S$, $\gamma \in S$ und $\alpha \neq \gamma$ (bzw. $\beta \in S$, $\delta \in S$ und $\beta \neq \delta$) verschwinden, da $D^{\alpha-\gamma} w_j \equiv 0$ ist (vgl. Lemma 6.4). Folglich gilt

$$\|u\|_E^2 \leqq c \operatorname{Re}(Lu, u)_0 + c\, \|u\|_E\, \|u\|_{E \setminus S} + c\, \|u\|_0^2 .$$

Hierauf wird erneut das Lemma von Ehrling angewendet ∎

Auf der Grundlage der Gårdingschen Ungleichung, dem Darstellungssatz linearer stetiger Funktionale von Riesz und dem Theorem von Lax/Milgram lassen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für schwache Lösungen von Dirichletproblemen gewinnen. Wir geben hier nur ein Beispiel an.

Satz 7.2: *L sei ein stark elliptischer Differentialoperator* (4,2), (6.1), *welcher der Bedingung* ($\omega$) *genügt. Dann hat das Problem* (4.1) *für jedes* $\lambda$ *mit* $\operatorname{Re}\lambda \leqq -\bar{c}$, $\bar{c}$ *aus der Gårdingschen Ungleichung* (7.1), *genau eine schwache Lösung* $u \in W_0^E(\Omega)$.

In gewohnter Weise kann man auch Spektralaussagen ableiten.

## 8. Anisotrope Systeme

Wir geben im folgenden ein Resultat über anisotrope Differentialgleichungssysteme einer zweiten Art an, bei der die Ableitungen der einzelnen Funktionen bis zu unterschiedlichen Ordnungen im System auftreten. Wir stellen das schwache Dirichletproblem in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^r$ für einen Differentialoperator $L$ der Form

$$(Lu)_\nu = \sum_\mu \sum_{|\alpha| \leqq n_\mu + n_\nu} a_\alpha^{\nu\mu}(x)\, D^\alpha u_\mu(x), \qquad n_\mu \geqq 1, \text{ ganz.} \tag{8.1}$$

$(Lu)_\nu$ bezeichne dabei die $\nu$-te Komponente von $Lu$. Weiter sei $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, wobei nur $m \geqq 2$ interessant ist. Die Koeffizienten $a_\alpha^{\nu\mu}$ mögen bis zu einer hinreichend hohen Ordnung stetig differenzierbar sein.

Die Struktur des Systems läßt erwarten, daß die einzelnen Komponenten $u_\mu$ der Lösung $u$ verallgemeinerte Ableitungen bis zu unterschiedlicher Ordnung besitzen. Dementsprechend suchen wir die schache Lösung im Produktraum

$$W_0^{\mathfrak{n}}(\Omega) := \mathop{\times}_\mu W_0^{n_\mu}(\Omega) \quad \text{mit der Norm} \quad \|u\|_{\mathfrak{n}} := \sum_\mu \sum_{|\alpha| \leqq n_\mu} \|D^\alpha u_\mu\|_0 .$$

Es ist dabei $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ und die $W_0^k(\Omega)$ sind übliche Sobolewräume: Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der entsprechenden Norm. In $W_0^{\mathfrak{n}}(\Omega)$ ist $\sum_\mu \sum_{|\alpha| = n_\mu} \|D^\alpha u_\mu\|_0$ eine äquivalente Norm, die nur die jeweils höchsten Ableitungen berücksichtigt. Aus den bekannten Einbettungssätzen ergibt sich, daß die Einbettung von $W_0^{\mathfrak{n}}(\Omega)$ in $W_0^{\mathfrak{n}-\mathbf{1}}(\Omega)$ kompakt ist, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Die folgende Elliptizitätsbedingung wurde bereits in [1] in ähnlicher Form veröffentlicht.

Definition 8.1: Ein Differentialoperator der Form (8.1) heißt *stark elliptisch*, falls eine positive Konstante $c_0$ existiert, so daß für alle $x \in \Omega$, für alle reellen Vektoren $\xi \in \mathbf{R}^r$ und für alle komplexen Vektoren $\eta \in \mathbb{C}^m$ gilt:

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha| = n_\mu + n_\nu} i^{n_\mu + n_\nu} \xi^\alpha a_\alpha^{\nu\mu}(x)\, \eta_\mu \bar{\eta}_\nu\right\} \geqq c_0 \sum_\mu \sum_{|\alpha| = n_\mu} \xi^{2\alpha}\, |\eta_\mu|^2 . \tag{8.2}$$

Satz 8.2: *L sei ein Differentialoperator der Form* (8.1). *Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Gårdingschen Ungleichung*

$$\operatorname{Re}\,(Lu, u)_0 \geqq c\, \|u\|_{\mathfrak{n}}^2 - \bar{c}\, \|u\|_0^2 \tag{8.3}$$

*mit positiven Konstanten* $c, \bar{c}$ *für alle* $u \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^m$ *ist die starke Elliptizität von* $L$ *gemäß* (8.2).

Beweis: Er lehnt sich eng an die Ideen zum Beweis der bekannten Gårdingschen Ungleichung im isotropen Fall an.

*Notwendigkeit:* Es sei $x^0 \in \Omega$ und $Q$ eine hinreichend kleine Kugel um $x^0$, die ganz in $\Omega$ enthalten ist. Weiter sei $L^0$ ein Operator mit

$$(L^0 u)_\nu := \sum_\mu \sum_{|\alpha| = n_\mu + n_\nu} a_\alpha^{\nu\mu}(x^0)\, D^\alpha u_\mu . \tag{8.4}$$

Für $u \in (C_0^\infty(Q))^m$ haben wir

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 + \bar{c}\,\|u\|_0^2 - \operatorname{Re}(L^0u, u)_0$$
$$= \operatorname{Re}\int \sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha|=n_\mu+n_\nu} [a_\alpha^{\nu\mu}(x) - a_\alpha^{\nu\mu}(x^0)]\, D^\alpha u_\mu \bar{u}_\nu\, dx$$
$$+ \operatorname{Re}\int \sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha|<n_\mu+n_\nu} \hat{a}_\alpha^{\nu\mu}(x)\, D^\alpha u_\mu \bar{u}_\nu\, dx.$$

Dabei haben wir gesetzt: $\hat{a}_\alpha^{\mu\nu} = a_\alpha^{\nu\mu} + \bar{c}$ für $\nu = \mu$ und $\alpha = 0$, $\hat{a}_\alpha^{\nu\mu} = a_\alpha^{\nu\mu}$ sonst. Nach Ausführung der partiellen Integration läßt sich dieser Ausdruck mittels der Schwarzschen Ungleichung unter Ausnutzung der Beschränktheit der Koeffizienten und ihrer Ableitungen gegen

$$c_1\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2 + c_2\,\|u\|_{\mathfrak{n}}\,\|u\|_{\mathfrak{n}-1}$$

abschätzen. Die Poincarésche Ungleichung erlaubt schließlich die weitere Rechnung

$$\operatorname{Re}(Lu, u)_0 + \bar{c}\,\|u\|_0^2 - \operatorname{Re}(L^0u, u)_0 \leqq \frac{c}{2}\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2.$$

Die Konstante $c$ wird klein, sofern die Kugel $Q$ hinreichend klein ist: Bei uns soll $c$ gerade den Wert der gleichnamigen Konstanten in der Gårdingschen Ungleichung haben. Demnach gilt

$$\operatorname{Re}(L^0u, u)_0 \geqq \operatorname{Re}(Lu, u)_0 - \frac{c}{2}\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2 + \bar{c}\,\|u\|_0^2 \geqq \frac{c}{2}\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2. \tag{8.5}$$

Es sei jetzt $\xi \in \mathbf{R}^r$, $\eta \in \mathbf{C}^m$, $t > 0$ und $w \in C_0^\infty(Q)$, $\|w\|_0 > 0$. Wir setzen

$$v_\mu(x) := t^{-n_\mu}\eta_\mu w(x)\, e^{it\xi x};$$

folglich ist $v \in C_0^\infty(Q)$. (8.5) speziell für diese Funktion liefert mit dem Landauschen Symbol

$$\operatorname{Re}\int \sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha|=n_\mu+n_\nu} a_\alpha^{\nu\mu}(x^0)\, i^{n_\mu+n_\nu}\xi^\alpha \eta_\mu\bar{\eta}_\nu\, |w(x)|^2\, dx + O(t^{-1})$$
$$\geqq \frac{c}{2} \sum_\mu \sum_{|\alpha|=n_\mu} \int \xi^{2\alpha}\, |\eta_\mu|^2\, |w(x)|^2\, dx + O(t^{-1});$$

woraus bei $t \to \infty$ die Elliptizitätsbedingung (8.2) folgt, da die Konstante $c$ unabhängig von $x^0$ ist.

*Hinlänglichkeit:* Zunächst kann für einen Operator der Gestalt (8.4) und Funktionen $u \in (C_0^\infty(\Omega))^m$ mit Hilfe der Elliptizitätsbedingung (8.2) folgende Beziehung gezeigt werden:

$$\operatorname{Re}(L^0u, u)_0 \geqq c\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2. \tag{8.6}$$

Anschließend wird der Operator (8.1) betrachtet, vorerst jedoch angenommen, daß $\operatorname{supp} u$ hinreichend klein ist. Wegen (8.6) gilt dann

$$c\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2 - \operatorname{Re}(Lu, u)_0$$
$$\leqq \operatorname{Re}\int \sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha|=n_\mu+n_\nu} [a_\alpha^{\nu\mu}(x^0) - a_\alpha^{\nu\mu}(x)]\, D^\alpha u_\mu \cdot \bar{u}_\nu\, dx$$
$$- \operatorname{Re}\int \sum_{\nu,\mu} \sum_{|\alpha|<n_\mu+n_\nu} a_\alpha^{\nu\mu}(x)\, D^\alpha u_\mu \cdot \bar{u}_\nu\, dx$$
$$\leqq c_1\,\|u\|_{\mathfrak{n}}^2 + c\,\|u\|_{\mathfrak{n}}\,\|u\|_{\mathfrak{n}-1}.$$

Hier haben wir geeignet partiell integriert. Die Konstante $c_1$ wird klein, wenn supp $u$ klein ist. In diesem Fall verbleibt

$$c\,\|u\|_n^2 - \mathrm{Re}\,(Lu, u)_0 \leqq c\,\|u\|_n\,\|u\|_{n-1},$$

worauf das Ehrlingsche Lemma angewendet werden kann. Es ergibt sich

$$c\,\|u\|_n^2 - \mathrm{Re}\,(Lu, u)_0 \leqq c\,\|u\|_n\|\,u\|_0.$$

Daraus folgert man leicht (8.3). Von der Einschränkung an den Träger von $u$ löst man sich wie üblich durch eine Überdeckung mit zugeordneter Zerlegung der Einheit ▮

## LITERATUR


[1] AGMON, S., NIRENBERG, A., and A. DOUGLIS: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. Commun. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35–92.

[2] HERRLER, H.-J.: Einige Anwendungen anisotroper Sobolevräume in der Theorie elliptischer Differentialgleichungssysteme. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.

[3] LOUHIVAARA, I. S., und C. G. SIMADER: Fredholmsche verallgemeinerte Dirichletprobleme für koerzitive lineare partielle Differentialgleichungen. Proc. Rolf Nevanlinna Sympos. on Complex Analysis 1976. Publication of Math. Res. Inst. Istanbul 7 (1978), 47–57.

[4] Никольский, С. М.: Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения. Докл. Акад. Наук СССР 146 (1962), 767–769.

[5] RÁKOSNÍK, J.: Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I, II. Beiträge zur Analysis 13 (1979), 55–68 and 15 (1981), 127–140.

[6] TRENKS, K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten. Der Bauingenieur 29 (1954), 372–377.

[7] VOIGT, A., und J. WLOKA: Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren. Mannheim–Wien–Zürich: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag 1975.

[8] WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. Berlin: Verlag für Bauwesen 1962.


Manuskripteingang: 23. 08. 1984

VERFASSER:

Dr. rer. nat. HANS-JÜRGEN HERRLER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz