Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (3) 1986, S. 237–251

Lösung semilinearer parabolischer Rand-Anfangswertprobleme durch monotone Iteration im Sobolevraum $W_2^{1,1}(Q_T)$

S. Carl

Die Methode der monotonen Iteration zur Konstruktion von Lösungen bei semilinearen parabolischen Rand-Anfangswertproblemen in ihrer klassischen Formulierung erfordert relativ starke Glattheitsbedingungen an die Eingangsdaten des Problems. In der Arbeit wird unter wesentlich schwächeren Glattheitsvoraussetzungen eine Erweiterung der Methode auf einen größeren Funktionenraum vorgenommen.

Метод монотонной итерации для решения полулинейных параболических начально-граничных задач в своей классической формулировке требует сравнительно сильных условий гладкости для известных функций, входящих в задачу. При существенно ослабленных предположениях в работе доказано обобщение метода монотонной итерации на более обширное пространство функции.

The method of monotone iteration for solving semilinear parabolic initial boundary value problems in its classical formulation only works under sufficient smooth conditions on the coefficients of the problem. In the paper an extension of this method into a wider function space is proved, that allows much weaker assumptions on the data of the problem.

1. Einführung

Die Methode der monotonen Iteration zur Konstruktion von Lösungen semilinearer parabolischer Rand-Anfangswertprobleme, wie sie in [13] begründet wurde und wie sie auch in der neueren Literatur bei der Anwendung auf Systeme benutzt wird (s. z.B. [3, 11]), setzte bisher relativ starke Glattheitsbedingungen an die Rand- und Anfangsdaten und an die Koeffizienten der Differentialgleichung voraus. Der Grund dafür liegt in der Behandlung der sich ergebenden linearen Teilprobleme im Rahmen der klassischen C^α-Lösbarkeitstheorie (Raum der hölderstetigen Funktionen, vgl. [9, 5]) und in der Verwendung des Maximumprinzips für klassische Lösungen. Diese Glattheitsvoraussetzungen sind jedoch bei einer Reihe von Anwendungen nicht erfüllt, z. B. in der Enzymkinetik [8, 17]. In der Arbeit wird gezeigt, daß die Methode der monotonen Iteration auch unter abgeschwächten Voraussetzungen an die Eingangsdaten durchgeführt werden kann, indem man eine Erweiterung auf einen größeren Funktionenraum, nämlich dem $W_2^{1,1}(Q_T)$, vornimmt (vgl. auch [2]). Wichtige Hilfsmittel dafür sind zum einen eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ober- und Unterlösung und zum anderen ein Maximumprinzip für verallgemeinerte Lösungen aus dem Raum $W_2^{1,1}(Q_T)$ der zugehörigen linearen Teilprobleme. Weiterhin wird ein Vergleichssatz für semilineare parabolische Differentialgleichungen bewiesen, mit dessen Hilfe man Unitätsaussagen erhält.

2. Problemstellung

Betrachtet werden Rand-Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t, u) \quad \text{in } Q_T, \\ &u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \\ &Bu|_{\Gamma_T} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sei B einer der Randoperatoren $Bu = u$ oder $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ sei beschränkt und im Sinne von [6: S. 31] *regulär* bzw. besitze *Kegel- und Segmenteigenschaft* (vgl. [1: S. 66]). Es sei $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ein zylindrisches Gebiet und $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$ der Zylindermantel. Der Differentialoperator L sei gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten μ und habe die Form

$$L = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ werde die Konormalenableitung bezeichnet, wobei ν die nach außen gerichtete Konormale sei; d. h. es ist

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\vec{n}, x_i), \quad \vec{n} \text{ — Außennormale an } \partial\Omega$$

(vgl. [15: S. 45]). Die Koeffizienten a_{ij}, b_i seien in Q_T meßbar und beschränkt, wobei die a_{ij} verallgemeinerte Ableitungen nach t besitzen mögen, für die $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in L_\infty(Q_T)$ gilt. Der Koeffizient $\beta = \beta(x, t)$ des Randoperators B sei stets nichtnegativ und in Γ_T ebenfalls meßbar und beschränkt. Die rechte Seite $f = f(x, t; u)$ sei zunächst lipschitzstetig in u mit $f(x, t, 0) \in L_2(Q_T)$. Wie später gezeigt wird, genügt es, unter gewissen Voraussetzungen lediglich *lokale* Lipschitzstetigkeit von f in u zu fordern. Die Anfangswerte φ seien im Falle $Bu = u$ aus $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ und im Falle $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$ aus $W_2^1(\Omega)$.

Im folgenden werden einige Funktionenräume eingeführt.

$W_2^k(\Omega)$ sei der Raum der in Ω definierten Funktionen, die zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen bis zur k-ten Ordnung zu $L_2(\Omega)$ gehören. Für Funktionen $u = u(x, t)$, die in Q_T definiert sind, werden weiterhin folgende Räume eingeführt: $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $V_2^{1,0}(Q_T)$. Der erste Index oben gibt an, bis zu welcher Ordnung die verallgemeinerten Ableitungen nach den räumlichen Variablen $x = (x_1, \ldots, x_m)$ existieren, und der zweite Index oben gibt die entsprechende Ableitungsordnung nach der Koordinate t an. Die Bezeichnung stimmt mit der in [9] gegebenen überein. Die Räume $W_2^{1,0}(Q_T)$ und $W_2^{1,1}(Q_T)$ sind insbesondere Hilberträume mit den Skalarprodukten

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_i}v_{x_i})\,dx\,dt$$

und

$$(u, v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_i}v_{x_i} + u_tv_t)\,dx\,dt.$$

$V_2^{1,0}(Q_T)$ ist ein Banachraum, der aus allen Elementen von $W_2^{1,0}(Q_T)$ besteht, die in t bezüglich der $L_2(\Omega)$-Metrik stetig sind. Seine Norm wird wie folgt definiert:

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{[0,T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}.$$

Dabei bedeutet

$$\|u_x\|_{L_2(Q_T)} = \Big(\int_{Q_T} (u_{x_i})^2\, dx\, dt\Big)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Für Funktionen aus den Räumen $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$ und $V_2^{1,0}(Q_T)$ sind die Spuren auf dem Rand Γ_T des Zylinders definiert. Die Unterräume $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$, $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ und $\mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)$ enthalten diejenigen Funktionen, die auf Γ_T die Spur Null besitzen. Entsprechend ist $\mathring{W}_2^k(\Omega) \subset W_2^k(\Omega)$ der Unterraum derjenigen Elemente, deren Ableitungen bis $(k-1)$-ter Ordnung die Spur Null auf $\partial\Omega$ besitzen.

Bei der nachfolgenden Definition der verallgemeinerten Lösung bzw. der verallgemeinerten Ober- und Unterlösung (vgl. [2]) werden je nach der Gestalt des Randoperators zwei Fälle unterschieden. Hierzu wird J als folgende Integralform eingeführt:

$$J(u, \chi) = \int_{Q_T} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\chi + a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \chi}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\chi - f(x, t, u)\,\chi\Big)\, dx\, dt.$$

Definition 1: Die Funktion $u = u(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T)$ heißt *verallgemeinerte Lösung* (*verallgemeinerte Oberlösung*) des Rand-Anfangswertproblems (1)

a) *im Falle* $Bu = u$, wenn sie der Integralrelation

$$J(u, \chi) = 0 \qquad (\geqq 0)$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ ($\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ und $\chi \geqq 0$) genügt und für die Rand-Anfangswerte — im Sinne der Spurbildung — die Relationen

$$u(x, 0) = \varphi(x)\ \big(\geqq \varphi(x)\big), \quad \text{sowie} \quad u|_{\Gamma_T} = 0 (\geqq 0)$$

erfüllt sind.

b) *im Falle* $Bu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$, wenn sie der Integralrelation

$$J(u, \chi) = -\int_{\Gamma_T} \beta u \chi\, ds\, dt \qquad \Big(\geqq -\int_{\Gamma_T} \beta u \chi\, ds\, dt\Big)$$

für alle $\chi \in W_2^{1,0}(Q_T)$ ($\chi \in W_2^{1,0}(Q_T)$ und $\chi \geqq 0$) genügt und für die Anfangswerte — im Sinne der Spurbildung — die Relation

$$u(x, 0) = \varphi(x)\ \big(\geqq \varphi(x)\big)$$

erfüllt ist.

Hinweis: Im Falle b) wird die Randbedingung durch die Integralrelation miterfaßt, da die Spur der ersten Ableitungen $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ für Funktionen aus $W_2^{1,1}(Q_T)$ im allgemeinen nicht definiert ist. Alle Ungleichungen zwischen Funktionen aus $L_2(Q_T)$ sind im Sinne von *fast überall* zu verstehen.

Bemerkung 1: Die entsprechende Definition für die *verallgemeinerte Unterlösung* erhält man, wenn man das Relationszeichen $\geqq$ außer in der Beziehung $\chi \geqq 0$ umkehrt.

Bemerkung 2: Auch in [4] findet man eine Verallgemeinerung des Begriffs von Ober- und Unterlösung. Jedoch haben die dort durchgeführten Betrachtungen nicht die Methode der monotonen Iteration zum Ziele.

3. Maximumprinzip und Vergleichssatz

3.1. Maximumprinzip

In diesem Abschnitt soll ein Maximumprinzip für verallgemeinerte Lösungen aus $W_2^{1,1}(Q_T)$ des folgenden linearen Rand-Anfangswertproblems bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + au + F(x,t), \\ u(x,0) &= \varphi_1(x), \\ Bu|_{\Gamma_T} &= \varphi_2(x,t). \end{aligned} \tag{2}$$

Über die Koeffizienten der Operatoren L und B gelten die in Kapitel 2 gemachten Voraussetzungen. Es sei $a = a(x,t) \in L_\infty(Q_T)$ und $F = F(x,t) \in L_2(Q_T)$.

Satz 1: *Es sei $u = u(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T)$ verallgemeinerte Lösung des Problems* (2). *Sind $a, F, \varphi_1, \varphi_2 \leqq 0$, so gilt auch für die Lösung u die Ungleichung $u \leqq 0$* in Q_T.

Zum Beweis von Satz 1 werden einige Hilfssätze benötigt.

Definition 2: Es sei $u = u(x,t)$ in Q_T definiert. Für reelles k definieren wir die *Menge*

$$A_u(k) = \{(x,t) \in Q_T \mid u(x,t) > k\}$$

und die *Funktion*

$$u^{(k)} = u^{(k)}(x,t), \; u^{(k)}(x,t) = \begin{cases} u - k & \text{für} \quad (x,t) \in A_u(k) \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Lemma 1 (vgl. [7: S. 244]): *Ist $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$, dann ist auch $u^{(k)} \in W_2^{1,1}(Q_T)$, wobei die Ableitungen von $u^{(k)}$ nach $x_1, \ldots, x_m$* bzw. $t =: x_{m+1}$ *wie folgt berechnet werden können:*

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \textit{für} \quad (x,t) \in A_u(k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1).$$

Lemma 2: *Falls $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ und $\operatorname{vraimax}_{\Gamma_T} u \leqq k_0$ ist, so gehört die Funktion $u^{(k)}$ für $k \geqq k_0$ zu $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$.*

Beweis: Diese Aussage ergibt sich als unmittelbare Folgerung aus [9: Kapitel II, Lemma 4.6.] ∎

Beweis von Satz 1: Wir unterscheiden entsprechend den Randbedingungen zwei Fälle:

a) *Sei* $Bu = u$. Die verallgemeinerte Lösung u des Problems (2) genügt der Integralrelation

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \chi \right) dx\, dt = \int_{Q_T} (au + F)\, \chi\, dx\, dt$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$. Nach Voraussetzung ist $\varphi_2 \leqq 0$, d. h.

$$\operatorname*{vraimax}_{\Gamma_T} u(x, t) = \operatorname*{vraimax}_{\Gamma_T} \varphi_2(x, t) \leqq 0.$$

Nach Lemma 2 ist damit $u^{(0)} \in \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Obige Integralrelation gilt somit insbesondere für $\chi = u^{(0)}$. Beachtet man die Definition der Funktion $u^{(k)}$, dann folgt mit Hilfe von Lemma 1 die Integralrelation

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} u^{(0)} + a_{ij} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} u^{(0)} \right) dx\, dt$$
$$= \int_{Q_T} (au^{(0)} \cdot u^{(0)} + Fu^{(0)})\, dx\, dt. \tag{3}$$

Wegen der gleichmäßigen Elliptizität des Operators L gilt

$$\mu \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} \right)^2 \leqq a_{ij} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Weiterhin gelten nach Voraussetzung und wegen $u^{(0)} \geqq 0$ die Ungleichungen

$$\int_{Q_T} a(u^{(0)})^2\, dx\, dt \leqq 0, \qquad \int_{Q_T} Fu^{(0)}\, dx\, dt \leqq 0. \tag{5}$$

Da $u^{(0)} \in W_2^{1,1}(Q_T)$ ist, gilt die Gleichung

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} u^{(0)}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_\Omega [u^{(0)}(\cdot, T)]^2\, dx - \int_\Omega [u^{(0)}(\cdot, 0)]^2\, dx \right\}.$$

Nach Voraussetzung ist $u(x, 0) = \varphi_1(x) \leqq 0$, und dies liefert $u^{(0)}(x, 0) = 0$, d. h. wir erhalten aus der letzten Integralbeziehung die folgende:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} u^{(0)}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \|u^{(0)}(\cdot, T)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{6}$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (4) und (5) sowie der Beziehung (6) ergibt sich schließlich aus der Integralrelation (3) die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \|u^{(0)}(\cdot, T)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu \left\| \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right\|^2_{L_2(Q_T)} \leqq \int_{Q_T} b_i \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} u^{(0)}\, dx\, dt. \tag{7}$$

Benutzt man die elementare, aber für viele Abschätzungen recht nützliche Ungleichung

$$2\, |ab| \leqq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \tag{8}$$

für $\varepsilon > 0$ und beliebige reelle a und b, so kann man die rechte Seite von (7) weiter abschätzen:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} b_i u^{(0)} \, dx \, dt \leqq \int_{Q_T} \left[\frac{2\mu}{2} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2(2\mu)} (b_i u^{(0)})^2 \right] dx \, dt .$$

Hierbei wurde $\varepsilon = 2\mu$ gewählt. Ist C_b eine nach Voraussetzung existierende Beschränktheitskonstante für die Beträge aller b_i, so gilt weiter

$$\int_{Q_T} b_i^2 (u^{(0)})^2 \, dx \, dt \leqq m \cdot C_b^2 T \cdot \max_{[0,T]} \int_{\Omega} [u^{(0)}(\cdot, t)]^2 \, dx .$$

Die rechte Seite von (7) kann somit insgesamt wie folgt abgeschätzt werden:

$$\int_{Q_T} b_i \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} u^{(0)} \, dx \, dt \leqq \mu \left\| \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{m C_b^2 T}{4\mu} \max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} . \tag{9}$$

Die Ungleichungen (7) und (9) liefern zusammen

$$\|u^{(0)}(\cdot, T)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq \frac{m C_b^2 T}{2\mu} \max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} . \tag{10}$$

Die Abschätzung (10) gilt völlig analog in jedem Teilzylinder $Q_t \subset Q_T$ für $0 \leqq t \leqq T$, d. h. es ist

$$\|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq \frac{t m C_b^2}{2\mu} \cdot \max_{[0,t]} \|u^{(0)}(\cdot, \tau)\|^2_{L_2(\Omega)} .$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung kann durch die rechte Seite von (10) weiter nach oben abgeschätzt werden. Damit gilt für alle $t \in [0, T]$ die Ungleichung

$$\|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq \frac{m C_b^2 T}{2\mu} \max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, \tau)\|^2_{L_2(\Omega)} ,$$

die insbesondere auch für das Maximum der linken Seite über dem Intervall $[0, T]$ gilt, d. h.

$$\max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq \frac{m C_b^2 T}{2\mu} \max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} . \tag{11}$$

Wählt man T so klein, daß $\dfrac{m C_b^2 T}{2\mu} < 1$ ist, so folgt hieraus

$$\max_{[0,T]} \|u^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)} = 0 .$$

Letzteres besagt aber, daß für $t \in [0, T]$ die Funktion $u^{(0)}(x, t) = 0$ (f. ü.) sein muß, was wiederum $u(x, t) \leqq 0$ zur Folge hat. Die obige Einschränkung an T läßt sich leicht beheben, indem man dieselbe Argumentation für das Intervall $[T, 2T]$ wiederholt usw. Schließlich ergibt sich die Behauptung für jedes Gebiet Q_T, in welchem die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.

b) *Sei* $Bu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$. Schreibt man die Integralrelation für die verallgemeinerte Lösung u insbesondere für die Testfunktion $\chi = u^{(0)}$ auf und berücksichtigt Lemma 1, dann ergibt sich die Beziehung

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} u^{(0)} + a_{ij} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} u^{(0)} \right) dx\, dt$$
$$= \int_{Q_T} (au^{(0)}u^{(0)} + Fu^{(0)})\, dx\, dt - \int_{\Gamma_T} (\beta u^{(0)}u^{(0)} - \varphi_2 u^{(0)})\, ds\, dt.$$

Wegen $u^{(0)} \geqq 0$ und auf Grund der Voraussetzungen über a, F und φ_2 ist die rechte Seite der letzten Gleichung nichtpositiv, d. h. man erhält

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} u^{(0)} + a_{ij} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} \right) dx\, dt \leqq \int_{Q_T} b_i \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_i} u^{(0)}\, dx\, dt.$$

Ausgehend von der letzten Ungleichung argumentiert man weiter wie im Fall a) und erhält die Behauptung ▮

Folgerung: *Sind $F, \varphi_1, \varphi_2 \geqq 0$, so ergibt sich unter Beibehaltung aller übrigen Voraussetzungen des Satzes* 1 *die Ungleichung* $u(x, t) \geqq 0$.

Zum Beweis gehe man von u zu $-u$ über und wende Satz 1 an ▮

3.2 Vergleichssatz

Wir betrachten nun das Problem (1), wobei die rechte Seite $f = f(x, t, u)$ lediglich der einseitigen Lipschitzbedingung bezüglich u

$$f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2) \leqq l(u_1 - u_2) \quad \text{falls} \quad u_1 \geqq u_2 \tag{12}$$

genügen soll. Für die in Kapitel 2 definierten verallgemeinerten Ober- und Unterlösungen gilt der folgende Vergleichssatz.

Satz 2: *Es seien $\Phi = \Phi(x, t)$ und $\Psi = \Psi(x, t)$ verallgemeinerte Ober- und Unterlösungen des Problems* (1) *und die rechte Seite $f = f(x, t, u)$ genüge der einseitigen Lipschitzbedingung* (12). *Dann gilt $\Phi \geqq \Psi$ in Q_T.*

Beweis: Wir betrachten hier lediglich den Fall a) $Bu = u$, da sich der Fall b) analog behandeln läßt. Die Differenz $w := \Psi - \Phi$ genügt den Ungleichungen

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \chi \right) dx\, dt$$
$$\leqq \int_{Q_T} \big(f(x, t, \Psi) - f(x, t, \Phi) \big) \chi\, dx\, dt \tag{13}$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ mit $\chi \geqq 0$ sowie $w(x, 0) \leqq 0$ und $w|_{\Gamma_T} \leqq 0$. Man erhält diese durch Differenzbildung der entsprechenden Ungleichungen für Φ und Ψ gemäß Definition 1. Die Integralungleichung (13) gilt insbesondere auch für $\chi = w^{(0)}$, denn es ist $w^{(0)} \in \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T) \subset \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ und $w^{(0)} \geqq 0$. Auf Grund der einseitigen Lipschitzbedingung (12) kann das Integral auf der rechten Seite von (13) wie folgt abgeschätzt werden:

$$\int_{Q_T} [f(x, t, \Psi) - f(x, t, \Phi)]\, w^{(0)}\, dx\, dt$$
$$\leqq l \int_{Q_T} (\Psi - \Phi)^{(0)}\, w^{(0)} (dx\, dt \leqq l \int_{Q_T} [w^{(0)}]^2\, dx\, dt.$$

Damit erhält man aus (13) die Ungleichung

$$\int\limits_{Q_T} \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} w^{(0)} + a_{ij} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x_i} \right) dx\, dt$$

$$\leqq l \int\limits_{Q_T} [w^{(0)}]^2 \, dx\, dt + \int\limits_{Q_T} b_i \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x_i} w^{(0)} \, dx\, dt. \tag{14}$$

Der Raum $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ ist stetig in den Raum $\mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)$ eingebettet und es gilt insbesondere die Ungleichung

$$\int\limits_{Q_T} [w^{(0)}]^2 \, dx\, dt \leqq T \cdot \max_{[0,T]} \|w^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

die auch schon beim Beweis von Satz 1 verwendet wurde. Dieselben Umformungen und Abschätzungen für die übrigen Integrale von (14) wie im Beweis von Satz 1 liefern schließlich

$$\|w^{(0)}(\cdot, T)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq T \left(2l + \frac{mC_b^2}{2\mu} \right) \max_{[0,T]} \|w^{(0)}(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{15}$$

Eine zum Beweis von Satz 1 analoge Argumentation ergibt $w^{(0)}(x, t) = 0$, d. h. $w(x, t) \leqq 0$. Letzteres bedeutet aber gerade die Behauptung des Satzes 2 ∎

Bemerkung 3: Ein analoger Vergleichssatz für klassische Ober- und Unterlösungen setzt die einseitige Beschränktheit nach oben der Ableitung von $f(x, t, u)$ nach u voraus (vgl. [12]). Nach Satz 2 genügt aber bereits eine einseitige Lipschitzbedingung in u der Form (12).

4. Verallgemeinerte Methode der monotonen Iteration im Sobolevraum $W_2^{1,1}(Q_T)$

Im folgenden soll die Durchführbarkeit der Methode der monotonen Iteration auch unter den in Kapitel 2 gemachten schwächeren Voraussetzungen an die Eingangsdaten des Problems (1) nachgewiesen werden. Dieses Verfahren liefert sowohl Existenzaussagen als auch Näherungslösungen, die sich iterativ als Lösungen eines linearen Problems berechnen lassen. Hierbei ist wesentlich, daß man bei jedem Iterationsschritt auf Grund der Monotonie eine verbesserte Näherungslösung erhält. Als Startelemente dienen dabei Ober- und Unterlösungen. Es wird sich zeigen, daß die geforderte Lipschitzstetigkeit an $f = f(x, t, u)$ bezüglich u unter gewissen Voraussetzungen an Ober- und Unterlösung nur lokal zu gelten braucht. Insbesondere wird dadurch eine Wachstumsbegrenzung bezüglich der Variablen u für die Funktion $f(x, t, u)$, wie sie bei Existenzaussagen (vgl. [9]) üblich ist, abgeschwächt.

Zunächst werden noch einige Hilfssätze, die beim Beweis von Satz 4 dieses Kapitels benötigt werden, formuliert.

Lemma 3: *Ist $f = f(x, t, u)$ in u gleichmäßig bezüglich $(x, t) \in Q_T$ lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten l, dann gibt es eine positive Konstante M, so daß die Funktion $F(x, t, u) := f(x, t, u) + Mu$ monoton wachsend in u wird.*

Beweis: Aus der Lipschitzstetigkeit folgt

$$-l\, |u_1 - u_2| \leqq f(\cdot, \cdot, u_1) - f(\cdot, \cdot, u_2) \leqq l\, |u_1 - u_2|.$$

Addiert man $M\,|u_1 - u_2|$ mit $M \geqq 0$, so erhält man insbesondere die Ungleichung

$$(M - l)\,|u_1 - u_2| \leqq f(\cdot,\cdot,u_1) - f(\cdot,\cdot,u_2) + M\,|u_1 - u_2|.$$

Wählt man $M \geqq l$, dann folgt die Behauptung, denn für $u_1 \geqq u_2$ gilt

$$0 \leqq (M - l)\,(u_1 - u_2) \leqq f(\cdot,\cdot,u_1) + Mu_1 - f(\cdot,\cdot,u_2) - Mu_2,$$

d. h. $0 \leqq F(\cdot,\cdot,u_1) - F(\cdot,\cdot,u_2)$ ▮

Lemma 4: *Es sei $f = f(x, t, u)$ lipschitzstetig in u, und es gelte $f(x, t, 0) \in L_2(Q_T)$. Dann ist die Abbildung $Fu = f(\cdot,\cdot,u) + Mu$ von $L_2(Q_T)$ in $L_2(Q_T)$ stetig und beschränkt ($M = const \geqq 0$).*

Beweis: a) *Stetigkeit:* Diese folgt aus der Ungleichung

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_{L_2(Q_T)} \leqq (l + M)\,\|u_1 - u_2\|_{L_2(Q_T)}.$$

b) *Beschränktheit:* Es sei K eine beschränkte Menge in $L_2(Q_T)$, d. h. $K = \{u \mid \|u\|_{L_2(Q_T)} \leqq C\}$. Dann gilt in der Norm von $L_2(Q_T)$

$$\begin{aligned}\|Fu\| &\leqq \|f(\cdot,\cdot,u)\| + M\,\|u\| \leqq (l + M)\,\|u\| + \|f(\cdot,\cdot,0)\|\\ &\leqq (l + M)\,C + \text{const}\end{aligned}$$

für $u \in K$. Damit ist das Bild von K beschränkt ▮

In [9: Kap. III] wurde für das lineare Problem (2) im Falle der Randbedingung $Bu = u$ die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im Raum $W_2^{1,1}(Q_T)$ nachgewiesen. In Analogie dazu kann man auch die Existenz und Eindeutigkeit des Problems für die Randbedingung $Bu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$ beweisen. In beiden Fällen und für homogene Randwerte wurde vom Autor die gleiche A-priori-Abschätzung (mit evtl. verschiedener Konstanten C) hergeleitet. Zusammengefaßt gilt mit $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ und $\varphi_2(x, t) = 0$ der

Satz 3: *Ist $\varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ im Falle $Bu = u$ sowie $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ im Falle $Bu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ des linearen Problems (2) und es gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} \leqq C(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|F\|_{L_2(Q_T)}), \tag{16}$$

wobei C eine von T und den Koeffizienten des Problem abhängige Konstante ist.

Lemma 5: *Es sei $G: L_2(Q_T) \to W_2^{1,1}(Q_T)$ diejenige Abbildung, die jeder rechten Seite $F \in L_2(Q_T)$ des Rand-Anfangswertproblems (2) die eindeutig bestimmte Lösung $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ zuordnet. Dann ist G ein stetiger und beschränkter Operator.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Abschätzung (16) ▮

Lemma 6 (vgl. [10: S. 62]): *Der Einbettungsoperator $I: W_2^{1,1}(Q_T) \to L_2(Q_T)$ ist kompakt.*

Als Folgerung aus den Lemmata 4, 5 und 6 ergibt sich

Lemma 7: *Der zusammengesetzte Operator* $Z := IGF: L_2(Q_T) \to L_2(Q_T)$ *ist kompakt und stetig.*

Lemma 8 (vgl. [14: S. 283]): *Ist* A *ein linearer und kompakter Operator, der einen Banachraum* B_1 *in einen Banachraum* B_2 *abbildet, und ist* x_n *schwach konvergent gegen* x_0, *dann konvergiert* Ax_n *stark gegen* Ax_0.

Die angestrebte Erweiterung der Methode der monotonen Iteration ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 4: *Es seien* $\Phi = \Phi(x, t)$ *und* $\Psi = \Psi(x, t)$ *verallgemeinerte Ober- und Unterlösungen aus dem Raum* $W_2^{1,1}(Q_T)$ *des Problems* (1). *Unter den in Kapitel* 2 *gemachten Voraussetzungen über die Koeffizienten existiert eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung* $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ *mit der Eigenschaft* $\Phi \geqq u \geqq \Psi$. *Diese Lösung kann man dabei in konstruktiver Weise als Grenzwert von fast überall monotonen Folgen von rekursiv definierten Funktionen* u_n *und* v_n *erhalten, die im* $L_2(Q_T)$ *gegen die Lösung von oben bzw. von unten konvergieren.*

Beweis: Wir führen den Beweis für den Fall a) der Randbedingung $Bu = u$, da derjenige für den Fall b) im wesentlichen analog verläuft. Nach Lemma 3 kann man eine positive Konstante M so wählen, daß die Funktion $F(x, t, u) := f(x, t, u) + Mu$ monoton in u wächst. Wir definieren folgende Iterationsvorschrift (vgl. [13]):

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - Lu_{n+1} + Mu_{n+1} = f(x, t, u_n) + Mu_n, \\ u_{n+1}(x, 0) = \varphi(x), \\ u_{n+1}|_{\Gamma_T} = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Diese stellt ein lineares Problem der Form (2) dar für die gesuchte Lösung u_{n+1}. Über die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems gibt der Satz 3 Auskunft. Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß man nach der Vorschrift (17) eine monoton fallende Folge von Funktionen erhält, wenn man als Startelement u_0 der Iteration die verallgemeinerte Oberlösung Φ wählt, d. h. $u_0 = \Phi$ setzt.

Hierzu beweisen wir als nächstes den Induktionsanfang $u_1 \leqq u_0$. Für den Startwert u_0 gelten die Ungleichungen

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right) dx\, dt \geqq \int_{Q_T} \left(b_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \chi + f(x, t, u_0)\, \chi\right) dx\, dt$$

für alle $\chi \geqq 0$ aus $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ sowie $u_0(x, 0) \geqq \varphi(x)$ und $u_0|_{\Gamma_T} \geqq 0$. Die erste Iterierte u_1 ist verallgemeinerte Lösung des Problems (17) und genügt damit der Integralrelation

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right) dx\, dt$$

$$= \int_{Q_T} \left(b_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \chi + f(x, t, u_0)\, \chi + M(u_0 - u_1)\, \chi\right) dx\, dt$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ und es gilt weiterhin $u_1(x, 0) = \varphi(x)$ und $u_1|_{\Gamma_T} = 0$. Die Integralrelation für u_1 gilt insbesondere auch für alle $\chi \geqq 0$. Aus den Integralrelationen für u_0

und u_1 folgt durch Differenzbildung für $w_1 := u_1 - u_0$ die Integralungleichung

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right) dx\, dt \leqq \int_{Q_T} \left(b_i \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \chi - M w_1 \chi\right) dx\, dt$$

für alle $\chi \geqq 0$ aus $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ sowie $w_1(x, 0) \leqq 0$ und $w_1|_{\Gamma_T} \leqq 0$. Folgt man dem Beweisgang von Satz 1, dann liefern obige Ungleichungen für w_1, wegen $-M \leqq 0$, die Ungleichung $w_1(x, t) \leqq 0$, d. h. $u_1 \leqq u_0$ in Q_T.

Wir zeigen nun den Induktionsschritt $u_{k+1} \leqq u_k$ unter der Voraussetzung, daß $u_k \leqq u_{k-1}$ gilt. Hierzu denke man sich die Gleichungen (17) für u_k und u_{k+1} aufgeschrieben und bilde anschließend die Differenz. Im Ergebnis erhält man dann für die Differenz $w_{k+1} := u_{k+1} - u_k$ das folgende Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} - L w_{k+1} + M w_{k+1} &= f(x, t, u_k) + M u_k - f(x, t, u_{k-1}) - M u_{k-1} \\ &= F(x, t, u_k) - F(x, t, u_{k-1}), \\ w_{k+1}(x, 0) &= 0, \\ w_{k+1}|_{\Gamma_T} &= 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der Monotonie der Funktion $F = F(x, t, u)$ in u und der Voraussetzung $u_k \leqq u_{k-1}$ ist die rechte Seite obiger Gleichung nichtpositiv, d. h. es gilt $F(x, t, u_k) - F(x, t, u_{k-1}) \leqq 0$. Satz 1 liefert damit $w_{k+1} \leqq 0$, d. h. $u_{k+1} \leqq u_k$ in Q_T.

Analog beweist man, daß durch die Vorschrift (17) eine monoton steigende Folge von Funktionen $\{v_k\}$ erzeugt wird, wenn man die Iteration mit dem Startelement $v_0 = \Psi$ (verallgemeinerte Unterlösung) beginnt. Es gilt weiterhin $v_n \leqq u_n$. Letzteres beweist man wieder mit Induktion, wobei der Induktionsanfang $v_0 \leqq u_0$ aus dem Vergleichssatz 2 folgt. Insgesamt erhält man die Ungleichungskette

$$v_0 \leqq v_1 \leqq \cdots \leqq v_n \leqq \cdots \leqq u_n \leqq \cdots \leqq u_1 \leqq u_0. \tag{18}$$

Mit den in Lemma 4 und 5 eingeführten Operatoren F und G schreiben sich die Glieder der Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ in der Form

$$u_{k+1} = GFu_k \quad \text{bzw.} \quad v_{k+1} = GFv_k. \tag{19}$$

Wegen $GF : L_2(Q_T) \to W_2^{1,1}(Q_T)$ kann man auf beiden Seiten von (19) den Einbettungsoperator $I : W_2^{1,1}(Q_T) \to L_2(Q_T)$ anwenden und erhält

$$u_{k+1} = Iu_{k+1} = IGFu_k = Zu_k \quad \text{bzw.} \quad v_{k+1} = Iv_{k+1} = IGFv_k = Zv_k. \tag{20}$$

Nach (18) sind die Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ L_2 — beschränkt. Damit besitzen die Bildfolgen $\{Zu_n\}$ und $\{Zv_n\}$ gemäß Lemma 7 in $L_2(Q_T)$ konvergente Teilfolgen $\{u_{n_j}\}$ bzw. $\{v_{n_j}\}$,

$$\lim_{j\to\infty} u_{n_j} = \tilde{u} \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} v_{n_j} = \tilde{v}. \tag{21}$$

Auf Grund der Monotonie der Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ muß die Grenzwerteigenschaft (21) für die ganzen Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ gelten, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \tilde{u} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \tilde{v} \quad \text{in } L_2(Q_T). \tag{22}$$

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ Lösungen des Problems (1) sind. Der Beweis wird nur für $\tilde{u}$ geführt, da er für $\tilde{v}$ analog verläuft. Hierzu gehen wir von der Iterationsvorschrift (17) aus. Als verallgemeinerte Lösungen des Problems (17) genügen die u_{n+1} der Integralrelation

$$\int\limits_{Q_T} \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} \chi + M u_{n+1} \chi\right) dx\, dt$$

$$= \int\limits_{Q_T} \left(f(x, t, u_n) \chi + M u_n \chi\right) dx\, dt \tag{23}$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ sowie $u_{n+1}(x, 0) = \varphi(x)$ und $u_{n+1}|_{\Gamma_T} = 0$. Gemäß Satz 3/(16) können die u_{n+1} wie folgt abgeschätzt werden:

$$\|u_{n+1}\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} \leqq C(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f(\cdot, \cdot, u_n) + M u_n\|_{L_2(Q_T)}). \tag{24}$$

Da die Folge $\{u_n\}$ in $L_2(Q_T)$ beschränkt ist, liefert Lemma 4 auch die $L_2(Q_T)$-Beschränktheit der Folge $\{f(\cdot, \cdot, u_n) + M u_n\}$. Dies hat aber gemäß (24) die Beschränktheit der Folge $\{u_n\}$ in $W_2^{1,1}(Q_T)$ zur Folge,

$$\|u_{n+1}\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} \leqq \text{const.} \tag{25}$$

Da die Kugel im Hilbertraum schwach kompakt ist, gibt es wegen (25) eine in $W_2^{1,1}(Q_T)$ schwach konvergente Teilfolge $\{u_{n_k}\}$, d. h. $u_{n_k} \rightharpoonup u^*$ in $W_2^{1,1}(Q_T)$. Weiterhin ist der Einbettungsoperator $I : W_2^{1,1}(Q_T) \to L_2(Q_T)$ kompakt und insbesondere linear, so daß die Anwendung von Lemma 8 mit $A := I$ die Konvergenz $u_{n_k} \to u^*$ in $L_2(Q_T)$ liefert. Auf Grund der Limesbeziehung (22) gilt andererseits auch $u_{n_k} \to \tilde{u}$ in $L_2(Q_T)$ und damit ist $\tilde{u} = u^*$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. (Man kann sogar zeigen, daß die ganze Folge $\{u_n\}$ schwach konvergent gegen $\tilde{u}$ in $W_2^{1,1}(Q_T)$ ist.) Damit kann man in der Integralrelation (23) wegen der Beschränktheit der Koeffizienten a_{ij} und b_i und auf Grund der Lipschitzstetigkeit von $f = f(x, t, u)$ in u zum Grenzwert ($n \to \infty$ bzw. $n_k \to \infty$) übergehen, und erhält

$$\int\limits_{Q_T} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \chi + a_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \chi + M \tilde{u} \chi\right) dx\, dt$$

$$= \int\limits_{Q_T} \left(f(x, t, \tilde{u}) \chi + M \tilde{u} \chi\right) dx\, dt$$

für alle $\chi \in \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ sowie $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$ und $\tilde{u}|_{\Gamma_T} = 0$. Subtrahiert man den Term

$$\int\limits_{Q_T} M \tilde{u} \chi\, dx\, dt$$

auf beiden Seiten, so besagen die letzten drei Gleichungen, daß $\tilde{u}$ verallgemeinerte Lösung des Problems (1) ist. In gleicher Weise zeigt man, daß auch $\tilde{v}$ verallgemeinerte Lösung ist. Aus dem Vergleichssatz (Satz 2) folgt dann zum einen $\tilde{u} \geqq \tilde{v}$ und zum anderen $\tilde{v} \geqq \tilde{u}$, d. h. $\tilde{u} = \tilde{v}$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung. Für die eindeutig bestimmte Lösung u gilt auf Grund der Ungleichungskette (18) die Einschließung $v_0 = \Psi \leqq u \leqq \Phi = u_0$. Der Satz 4 ist damit bewiesen ∎

Bemerkung 4: Da man für die Lösung u und deren nach (17) iterativ gewonnenen Näherungen u_n und v_n gemäß (18) die Einschließung $v_n \leqq u \leqq u_n$ hat, liefert die Differenz $u_n - v_n$ eine Fehlerabschätzung für u.

Bemerkung 5: Sind die verallgemeinerten Oberlösung Φ und Unterlösung Ψ sogar aus $L_\infty(Q_T)$, dann braucht man für die Gültigkeit des Satzes 4 lediglich lokale

Lipschitzstetigkeit von $f(x, t, u)$ bezüglich u zu fordern, insbesondere genügt die Lipschitzstetigkeit von f in u für das Intervall $\left[\operatorname{vraimin}_{Q_T} \Psi, \operatorname{vraimax}_{Q_T} \Phi\right]$.

Bemerkung 6: Die Erweiterung der Methode der monotonen Iteration auf einen größeren Funktionenraum, wie sie durch den Satz 4 dieses Kapitels vorgenommen wurde, läßt sich auch auf Systeme schwach gekoppelter semilinearer parabolischer Differentialgleichungen übertragen. Für den klassischen Fall findet man eine solche Übertragung in [3, 11].

5. Anwendung auf eine enzymkinetische Reaktion

Für die Beschreibung einer Enzym-Substrat-Reaktion in einer Membran unter Diffusionseinfluß wurde in [16] folgendes Modell aufgestellt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial t} = D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{k_1 \cdot E_0(x) \cdot \exp(-k_3 t)}{k_2 + S} \cdot S, \\ &S(x, 0) = S_0 = \text{const} > 0, \\ &\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{\Gamma_T} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Es ist dabei $x \in [-c, c]$ und $t \in [0, T)$. Die Differentialgleichung (26) wird im Gebiet $Q_T = (-c, c) \times (0, T)$ betrachtet. Der Umsatz des Substrats mit der Substratkonzentration $S = S(x, t)$ wird über ein Enzym E mit der Enzymkonzentration $E(x, t) = E_0(x) \cdot \exp(-k_3 t)$ gesteuert. In die Reaktionskonstanten $k_i \geqq 0$ gehen über das Arrheniusgesetz die Aktivierungsenergie und die Temperatur als Parameter ein. Die Funktion E_0 ist eine Sprungfunktion und wie folgt definiert:

$$E_0(x) = \begin{cases} a & \text{für } \ |x| \leqq b < c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung (26) sei f, d. h.

$$f = f(x, t, S) := -\frac{k_1 E_0(x) \exp(-k_3 t)}{k_2 + S} \cdot S.$$

Durch Einsetzen prüft man leicht nach, daß $\Phi(x, t) = S_0$ und $\Psi(x, t) = 0$ Ober- und Unterlösung des Problems (26) sind. Wegen der Unstetigkeit der rechten Seite $f = f(x, t, S)$ in x ist die klassische Version der Methode der monotonen Iteration, wie sie z. B. in [13] formuliert wurde, nicht anwendbar. Mit der durch Satz 4 gegebenen Verallgemeinerung erhält man dann

Satz 5: *Das Problem* (26) *besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung* $S = S(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T)$ *mit der Eigenschaft* $0 \leqq S(x, t) \leqq S_0$.

Das Iterationsverfahren zur Verbesserung der Schranken $\Phi = S_0$ und $\Psi = 0$ lautet

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} + MS_n = f(x, t, S_{n-1}) + MS_{n-1}, \\ &S_n(x, 0) = S_0 = \text{const}, \\ &\left.\frac{\partial S_n}{\partial x}\right|_{\Gamma_T} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Konstante $M \geqq 0$ des Problems (27) ist, wie im Beweis von Satz 4 gefordert, so zu wählen, daß die Funktion $F(x, t, S) := f(x, t, S) + MS$ monoton in S wächst. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial S} = -k_1 E_0(x) \exp\left(-k_3 t\right) \frac{k_2}{(k_2 + S)^2}.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\sup_{\bar{Q}_T \times [0, S_0]} \left| \frac{\partial f}{\partial S} \right| \leqq a \cdot \frac{k_1}{k_2}.$$

Als möglichen Wert für die Konstante M kann man jeden, der größer $a \cdot k_1/k_2$ ist, verwenden.

Bemerkung 7: Auch auf Modelle der Reaktortheorie mit nur stückweise stetigen Koeffizienten, die häufig auf Probleme der Form (1) führen, kann man nach Satz 4 die Methode der monotonen Iteration anwenden.

Herrn Professor W. Tutschke möchte ich für das fördernde Interesse und für einige kritische Hinweise zu dieser Arbeit recht herzlich danken.

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolev Spaces. New York—San Francisco—London: Academic Press 1975.

[2] Carl, S.: Konstruktion von Näherungslösungen für partielle Differentialgleichungen, insbesondere für semilineare parabolische Differentialgleichungen in einem Sobolevraum. Dissertation. Halle: Martin-Luther-Universität 1984.

[3] Chandra, J., Dressel, F. G., and P. D. Norman: A monotone method for a system of nonlinear parabolic differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 87 A (1981), 209 to 217.

[4] Deul, J.: Nichtlineare parabolische Randwertprobleme mit Unter- und Oberlösungen. Dissertation. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule 1976.

[5] Фридман, А.: Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Изд-во Мир 1968.

[6] Gajewski, H., Gröger, K., und K. Zacharias: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1974.

[7] Гущин, А. К.: Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения. Матем. Сб. 97 (1975), 242—261.

[8] Kühnau, R., and J. Lasch: An analytical solution to the evolution of presteady state substrate and product concentration profiles in spherical enzyme supports. J. theor. Biol. 84 (1980), 217—232.

[9] Ладыженская, О. А., Солоников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1967.

[10] Mazja, M.: Einbettungssätze für Sobolevsche Räume. Teil 1. Leipzig: BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1980.

[11] Norman, P. D.: A monotone method for a system of semilinear parabolic differential equations. Nonlin. Anal. 4 (1980), 203—206.

[12] Protter, M. H., and H. F. Weinberger: Maximum principles in differential equations. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall 1967.

[13] Sattinger, D. H.: Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 979—1000.

[14] SMIRNOV, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. V. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1962.
[15] TUTSCHKE, W.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Leipzig: BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978.
[16] WOLNA, P.: Ein funktionalanalytisches Modell für Diffusionsprozesse an membrangebundenen Enzymen unter Berücksichtigung der Enzyminaktivierung. Diplomarbeit. Halle: Martin-Luther-Universität 1980.

Manuskripteingang: 24. 08. 1984

VERFASSER:

Dr. SIEGFRIED CARL
Sektion Mathematik
der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“
DDR-4200 Merseburg, Otto-Nuschke-Straße