Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (4) 1986, S. 307–332

Ein System stationärer partieller Differentialgleichungen des Ladungsträgertransportes in Halbleitern

R. KLUGE und S. UNGER

Es werden verschiedene Randwertaufgaben für das System stationärer partieller Differentialgleichungen des Ladungsträgertransportes in Halbleitern in entsprechenden Unterräumen des Produktes $W_r^1(G) \times W_p^1(G) \times W_p^1(G)$ der Sobolev-Räume $W_q^1(G)$, $q = r$ bzw. $q = p$, mit beschränktem Gebiet $G \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ und im allgemeinen verschiedenen p und r behandelt. Neben dem Beweis der Existenz von Lösungen in der Skala $2n/(n+1) < p < +\infty$ mit den jeweiligen Beschränkungen an $r > 1$ geben wir Abschätzungen von oben für den Durchmesser der Lösungsmenge sowie Unitätsaussagen an.

Разные краевые задачи для системы стационарных уравнений в частных производных переноса носителей зарядов в полупроводниках исследуются в соответствующих подпространствах продукта $W_r^1(G) \times W_p^1(G) \times W_p^1(G)$ Соболевых пространств $W_q^1(G)$, $q = r$ и $q = p$. При этом область $G \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ ограничена и p и r в общем случае разные. Доказывается существование решений во всей шкале $2n/(n+1) < p < +\infty$ со соответствующими ограничениями на $r > 1$. Кроме того оценивается сверху диаметр множества решений и даются результаты единственности.

Different boundary value problems for the system of stationary partial differential equations for the carrier transport in semiconductors are considered in corresponding subspaces of the product $W_r^1(G) \times W_p^1(G) \times W_p^1(G)$ with Sobolev-spaces $W_q^1(G)$, $q = r$ and $q = p$. The domain $G \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ is supposed to be bounded and p and r are in general different. The paper contains the proof of the existence of solutions in the whole scale $2n/(n+1) < p < +\infty$ with corresponding restrictions for $r > 1$, estimations from above for the diameter of the solution set and some uniqueness results.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir verschiedene Randwertaufgaben für das System stationärer partieller Differentialgleichungen des Ladungsträgertransportes in Halbleitern (stationäre Gleichungen der inneren Elektronik). Der Lösungsvektor $[u_0, u_1, u_2]$ mit dem elektrostatischen Potential u_0, der Elektronendichte u_1 und der Löcherdichte u_2 wird in dem Randwerttyp entsprechenden Unterräumen des Produktes $W_r^1(G) \times W_p^1(G) \times W_p^1(G)$ der Sobolev-Räume $W_q^1(G)$, $q = r$ und $q = p$, mit dem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbf{R}^n$ $(n = \dim G = 1, 2, 3)$ und im allgemeinen verschiedenen p und r gesucht. Der Existenzbeweis erfolgt mittels der Theorie koerzitiver pseudomonotoner Operatoren ([2, 9], vgl. auch [5]). Dabei werden nichtlineare partielle Differentialoperatoren vom monotonen und gleichmäßig monotonen Typ im Sinne der Arbeit [6] eines der Autoren über nichtlineare Ansätze für den Dielektrizitätskoeffizienten und die Koeffizienten der Diffusion der Größen u_1 und u_2 benutzt. Neben dem Existenzbeweis der Lösung in der gesamten Skala $2n/(n+1) < p < +\infty$ mit dem jeweils entsprechenden $r > 1$ geben wir Abschätzungen von oben für den Durchmesser der Lösungsmenge sowie Unitätsaussagen.

Bezüglich des Falles $r = p = 2$ vgl. die Arbeit [3], in der ebenfalls das Konzept pseudomonotoner Operatoren im Gegensatz zur initiierenden Arbeit von M. S. MOCK [11] (vgl. auch die Monographie [12]) und deren Weiterführung für Dirichlet-Bedingungen durch T. I. SEIDman [14], die sich beide auf den Exponentialansatz für die Elektronen- und die Löcherdichten und auf das Maximum-Prinzip bzw. eine entsprechende Erweiterung stützen, benutzt wird. In [3] tritt an die Stelle der Koerzitivität der pseudomonotonen Abbildung das Konzept der Variationsungleichungen mit beschränkter Restriktionsmenge für $[u_1, u_2]$. Außerdem werden Regularitätsaussagen für u_0 einschließlich der Erfüllung der sogenannten „zweiten apriori-Abschätzung" für u_0 verwendet, die beide Einschränkungen an das Gebiet G und an die Wahl der Randbedingungen erforderlich machen.

In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls gezeigt, wie die erwähnte Regularitätstheorie für u_0 $(r = 2)$ genutzt werden kann.

In Punkt 1 wird die Aufgabenstellung formuliert und das Gleichungssystem auf normierte Größen geführt. Punkt 2 enthält einige analytische Hilfsmittel. Dazu gehören unter anderem Beispiele für gleichmäßig monotone Operatoren in Unterräumen des Sobolev-Raumes $W_q^1(G)$, $1 < q < +\infty$. In Punkt 3 wird der Lösungsbegriff eingeführt. Vor allem weisen wir jedoch die verstärkte Stetigkeit der Mehrzahl der entsprechend erzeugten Einzeloperatoren nach. Punkt 4 enthält die Aussagen für den Fall homogener Randbedingungen. In Punkt 5 werden die Ergebnisse auf den Fall inhomogener Dirichlet-Bedingungen auf einem Teilrand von G und auf den Fall der Randbedingungen dritter Art auf einem anderen Teilrand von G erweitert. In Anhang I und II geben wir Fälle von Differentialungleichungen an, die mit Sobolevschen Einbettungssätzen verbunden sind und in denen die Konstanten konkret angegeben werden. Diese Aussagen spielen bei Abschätzungen von oben für die Norm der Lösungen und den Durchmesser der Lösungsmenge sowie beim Unitätsbeweis eine Rolle.

1. Die Aufgabenstellung

1.1 Das Ausgangsproblem

Wir bezeichnen mit $\mathbf{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ den n-dimensionalen Euklidischen Raum, mit $s = (s_1, \ldots, s_n)$ einen beliebigen Punkt von $\mathbf{R}^n$ und mit $G \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das die partielle Integration und die Anwendung der Sobolevschen Einbettungssätze (Satz 2.1) zuläßt. Die im weiteren auftretenden Funktionen sind reellwertig und auf G bzw. ∂G, dem Rand von G, oder auf $\bar{G} \doteq G \cup \partial G$ erklärt. Nur derartige Funktionen können als Komponenten von Vektoren auftreten. Mit $D^\alpha v$ bezeichnen wir die klassische wie die Sobolevsche Ableitung

$$\frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial s_1^{\alpha_1} \ldots \partial s_n^{\alpha_n}} \quad \text{der Ordnung} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Die Symbole grad, div und Δ werden im üblichen Sinne benutzt.

Wir untersuchen die drei stationären Gleichungen der inneren Elektronik, die wahrscheinlich zuerst in [18] eingeführt wurden:

$$\operatorname{div} \vec{J}_0 = q(N - u_1 + u_2), \qquad \vec{J}_0 = -D^0 \operatorname{grad} u_0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{J}_1 + R(u_1, u_2) = 0, \qquad \vec{J}_1 = -(D^1 \operatorname{grad} u_1 - u_1\mu_1 \operatorname{grad} u_0), \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{J}_2 + R(u_1, u_2) = 0, \qquad \vec{J}_2 = -(D^2 \operatorname{grad} u_2 + u_2\mu_2 \operatorname{grad} u_0). \tag{1.3}$$

Dabei bezeichnen: u_0 — das elektrostatische Potential, $\vec{E} = -\operatorname{grad} u_0$ — die elektrische Feldstärke, D^0 — den Dielektrizitätskoeffizienten, $N = N_D - N_A$ — die Dotierung mit der Donatordichte N_D und der Akzeptordichte N_A, u_1 — die Elektronendichte, u_2 — die Löcherdichte, D^1, D^2 — die entsprechenden Diffusionskoeffizienten, μ_1, μ_2 — die betreffenden Beweglichkeiten und R — den Rekombinationsterm. N ist im allgemeinen eine Funktion von $s \in G$. Die Größe q ist konstant (Elementarladung): $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb.

Gleichung (1.1) beschreibt den Zustand des elektrostatischen Potentials u_0 in Abhängigkeit von der Dotierung N und den Konzentrationen von Elektronen u_1 und Löchern u_2, während (1.2) und (1.3) den Zustand von Elektronen- und Löcherdichten u. a. in Abhängigkeit vom Gradienten von u_0 beschreiben. Eine zusätzliche Kopplung der Größen u_1 und u_2 erfolgt über den Rekombinationsterm.

Für den Dielektrizitätskoeffizienten D^0 und die Diffusionskoeffizienten D^1 und D^2 nehmen wir im Prinzip folgende Ansätze an: a) Konstanz, b) Ortsabhängigkeit, c) Abhängigkeit vom Betrag des Gradienten der betreffenden Größe. Für D^0 gilt weiter: $D^0 = e_0 D_0$, $e_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-14}$ As/Vcm. Für konstantes D_0 setzen wir $D_0 = 4$ für SiO_2 und $D_0 = 12$ für Si.

Für die Beweglichkeiten μ_i ($i = 1, 2$) benutzen wir den Ansatz

$$\mu_i = \mu_i(|\text{grad } u_0|) = \mu_0^i/(1 + (|\text{grad } u_0|/E_0^i)^{\beta_i})^{1/\beta_i}$$

mit $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 1$ (vgl. [4, 15]). Dabei gilt weiter $65 \leqq \mu_0^1 \leqq 1330$ (cm²/Vs), $48 \leqq \mu_0^2 \leqq 495$ (cm²/Vs), $E_0^1 = 8 \cdot 10^3$ V/cm, $E_0^2 = 1{,}95 \cdot 10^4$ V/cm.

R wählen wir in der Form der Shockley-Read-Hall-Rekombination $R(u_1, u_2) = (|u_1 u_2| - n_i^2)/\tau$, $\tau = \tau_2(|u_1| + n_{10}) + \tau_1(|u_2| + n_{20})$. Dabei bedeuten n_i die Eigenleitungsdichte, $n_i = 1{,}45 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^{-3}$ (in Silizium bei 300°K), τ_j die Lebensdauer der u_j, $\tau_j = 1 \mu s$, und n_{j0} positive Konstanten, die oft in erster Näherung gleich n_i gesetzt werden ($j = 1, 2$).

Randbedingungen: Wir nehmen für alle drei Größen die gleichen gemischten Randbedingungen

$$u_i|_{\partial G_1} = z_i \quad \text{und} \quad \vec{J}_i \cdot \vec{n}|_{\partial G_2} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{1.4}$$

mit den Teilrändern ∂G_1 und ∂G_2 von ∂G an. Dabei gilt $\partial G_1 \cap \partial G_2 = \emptyset$ und $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$ mit mes $\partial G_1 > 0$ bezüglich des Randmaßes. Es werden zunächst homogene Randbedingungen untersucht und danach die inhomogenen auf den homogenen Fall zurückgeführt.

1.2 Zur Normierung der Gleichungen

Wir normieren die Gleichungen (1.1)—(1.3) durch Einführung von Normierungsfaktoren (vgl. die anschließende Tabelle) und beseitigen damit die unterschiedlichen Maßeinheiten.
Nach Einsetzen der normierten Größen in die Gleichungen (1.1)—(1.3) und Division durch die Faktoren vor den ersten Termen erhalten wir das Gleichungssystem

$$-\text{div }(D_0 \text{ grad } u_0) = k_0(N - u_1 + u_2), \tag{1.5}$$

$$-\text{div }(D_1 \text{ grad } u_1) + \text{div }(u_1 \mu_1 \text{ grad } u_0) + k_1 R(u_1, u_2) = 0, \tag{1.6}$$

$$-\text{div }(D_2 \text{ grad } u_2) - \text{div }(u_2 \mu_2 \text{ grad } u_0) + k_2 R(u_1, u_2) = 0, \tag{1.7}$$

Größe	Normierungsfaktor	Seine Größe	Dimensionslose Größe
u_0	$\varphi_T = kT/q$	0,025 V	u_0
D^0	e_0	$8{,}85 \cdot 10^{-14}$ As/Vcm	D_0
grad, div	$1/l$	10^4 cm^{-1}	grad, div
q	q	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ As	1
n_{10}, n_{20}, N; u_1, u_2, n_i	N_0	10^{10} cm^{-3}	n_{10}, n_{20}, N; u_1, u_2, a
D^1	$\mu_0{}^1\varphi_T$	34,375 cm^2/s	D_1
D^2	$\mu_0{}^2\varphi_T$	12,175 cm^2/s	D_2
μ_1	$\mu_0{}^1$	1375 cm^2/Vs	μ_1
μ_2	$\mu_0{}^2$	487 cm^2/Vs	μ_2
τ_2, τ_1	$\bar\tau$	10^{-6} s	b, c
$E_0{}^1, E_0{}^2$	φ_T/l	250 V/cm	E_{01}, E_{02}

mit

$$R(u_1, u_2) = \frac{|u_1u_2| - a^2}{b\,|u_1| + c\,|u_2| + d}, \quad d = bn_{10} + cn_{20}, \quad k_0 = qN_0l^2/(\varphi_T e_0)$$

$$= 7{,}24158 \cdot 10^{-3}, \quad k_1 = l^2/(\bar\tau\varphi_T\mu_0{}^1) = 2{,}90909 \cdot 10^{-4},$$

$$k_2 = l^2/(\bar\tau\varphi_T\mu_0{}^2)$$

$$= 8{,}21355 \cdot 10^{-4}, \quad \mu_i = \left(1 + (|\mathrm{grad}\, u_0|/E_{0i})^{\beta_i}\right)^{-1/\beta_i} \quad (i = 1, 2),$$

$$E_{01} = 32, \quad E_{02} = 78.$$

2. Einige analytische Hilfsmittel

Wir stellen hier einige Ergebnisse zusammen, die bei der Behandlung der Randwertaufgaben mehrfach verwendet werden. In Punkt 2.1 gehen wir auf die Einbettung des Sobolev-Raumes $W_q{}^1(G)$ in andere Funktionalräume ein. In Anhang I geben wir dafür konkrete Konstanten in den entsprechenden Differentialungleichungen an, die für den Nachweis auch qualitativer Aussagen von Bedeutung sind. Außerdem werden in Punkt 2.1 der Unterraum $\mathring{W}_q{}^1(G)$ und weitere Unterräume von $W_q{}^1(G)$ mit einer zur Sobolev-Norm äquivalenten Norm versehen. Auf dieser Basis und gestützt auf weitere Ergebnisse geben wir in Anhang II Präzisierungen hinsichtlich der Konstanten bei der Einbettung von $\mathring{W}_q{}^1(G)$ an. Punkt 2.2 enthält verschiedene funktionalanalytische Begriffe und einige Resultate, die in den weiteren qualitativen Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielen werden. Von besonderer Bedeutung ist Punkt 2.3, in dem Klassen von koerzitiven monotonen, vor allem jedoch von gleichmäßig monotonen Operatoren, die in der Regel ebenfalls Potentialoperatoren sind, aus [6] angegeben werden.

2.1 Zu einigen Funktionalräumen

Es sei G ein beschränktes sternförmiges Gebiet [17]. Mit $L_q(G)$, $q \geqq 1$, bezeichnen wir den Lebesgueschen Raum mit der Norm $\|\cdot\|_q$, mit $C^l(\bar G)$ die Menge aller l-mal bis zum Rande ∂G von G stetig differenzierbaren Funktionen auf $\bar G$, $C(\bar G) = C^0(\bar G)$ mit der Norm $\|\cdot\|_c$, mit $\dot C_\infty(G)$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit in G kompakten Trägern und mit $W_q{}^1(G)$ den Sobolev-Raum

$$W_q{}^1(G) = \{v \in L_q(G) \colon D^\alpha v \in L_q(G), 0 \leqq |\alpha| \leqq 1\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{1,q} = \left\{\int_G \left[|v|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v|^2\right]^{q/2} dG\right\}^{1/q}.$$

Dabei bezeichnet $D^\alpha v$ die im Sinne von Sobolev erklärte Ableitung der Ordnung $|\alpha|$. $W_q^1(G)$ ist die Vervollständigung von $C^1(\overline{G})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,q}$. Unter $\mathring{W}_q^1(G)$ verstehen wir die Vervollständigung von $C_\infty(G)$ in der $\|\cdot\|_{1,q}$-Norm.

Wir benutzen die Sobolevschen Sätze (vgl. z. B. [16]) über die (kompakte) Einbettung von $W_q^1(G)$ in geeignete andere Funktionalräume B:

$$\|v\|_B \leqq K_q^{\alpha(B)}\|v\|_{1,q}, \qquad v \in W_q^1(G), \tag{2.1}$$

mit einer von $v \in W_q^1(G)$ unabhängigen Konstanten $K_q^{\alpha(B)}$.

Satz 2.1: *Es sei $v \in W_q^1(G)$, $q > 1$. Dann gilt:*

1. *Für $q > n$ ist $v \in C(\overline{G})$ $(\alpha(B) = c)$.*
2. *Für $q \leqq n$ ist $v \in L_{q'}(G)$ mit $q' < qn/(n-q)$ $(\alpha(B) = q')$.*
3. *Für $q \leqq n$ ist $v \in L_{q''}(G_s)$ mit $1 < q'' < qs/(n-q)$ $(s > n-q)$ $(\alpha(B) = q'')$ mit der s-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit G_s in G.*

Dabei ist die Einbettung in allen Fällen kompakt.

Im weiteren betrachten wir zunächst das homogene Randwertproblem

$$v|_{\partial G_1} = 0, \tag{2.2}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n}|_{\partial G_2} = 0, \tag{2.3}$$

für die einzelnen Größen u_i $(i = 0, 1, 2)$. Dabei bezeichne $\vec{n}$ die äußere Normale an ∂G. Es wird $\partial G_1 \cap \partial G_2 = \emptyset$ und $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$ mit mes $\partial G_1 > 0$ bezüglich des Randmaßes vorausgesetzt. Die Randwertprobleme werden operatorentheoretisch auf einem entsprechenden Unterraum von $W_q^1(G)$ behandelt, mit $q > 1$ und abhängig von $i = 0, 1, 2$.

Wir bezeichnen die Abschließung von $\{v \in C^2(\overline{G}) : v|_{\partial G_1} = 0\}$ in der $\|\cdot\|_{1,q}$-Norm mit $W_q(G)$. Für $\partial G_1 = \partial G$ gilt $W_q(G) = \mathring{W}_q^1(G)$. Auf der Basis der Poincaréschen Ungleichung (vgl. z. B. [13]) folgt sofort die Aussage von

Lemma 2.2: *Das Gebiet G sei Lipschitz-stetig. Dann liefert*

$$\|v\|_{0,q} = \Big(\int_G |\text{grad } v|_n^q \, dG\Big)^{1/q}, \quad q > 1 \textit{ und } |\cdot|_n\textit{-Norm von } \mathbf{R}^n,$$

eine auf $W_q(G)$ zu $\|\cdot\|_{1,q}$ äquivalente Norm.

Aus (2.1) und der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{1,q}$ und $\|\cdot\|_{0,q}$ folgt

$$\|v\|_B \leqq H_q^{\alpha(B)} \|v\|_{0,q}, \qquad v \in W_q(G).$$

$H_q^{\alpha(B)}$ kann insbesondere für den Fall $W_q(G) = \mathring{W}_q^1(G)$ vertieft werden (vgl. Anhang II).

Mit W_i $(i = 0, 1, 2)$ bezeichnen wir im weiteren den Raum, in dem wir die Lösung u_i suchen. Der vollständige Lösungsvektor $u^3 = [u_0, u_1, u_2]$ ist Element von $W^3 = W_0 \times W_1 \times W_2$. Außerdem setzen wir $W = W_1 \times W_2$. In W wählen wir als Norm

$$\|v\|_{2,q} = (\|v_1\|_{0,q}^q + \|v_2\|_{0,q}^q)^{1/q}, \quad v = [v_1, v_2] \in W.$$

Weiter ist $W^* = W_1^* \times W_2^*$. Die Norm in W_i^* $(i = 0, 1, 2)$ werden wir nicht gesondert kennzeichnen. Für W^* wählen wir die sich mit dem adjungierten Index q', $1/q' + 1/q = 1$, aus den Normen von W_1^* und W_2^* ergebende Norm.

2.2 Funktionalanalytische Begriffe und Bezeichnungen

Es seien B_1 und B_2 reelle reflexive Banach-Räume und $(B_1 \to B_2)$ die Menge der Operatoren von ganz B_1 in B_2. Die Begriffe Beschränktheit und (sequentielle) starke und schwache Konvergenz für Folgen und Kompaktheit für Mengen bzw. Operatoren werden im üblichen Sinne verwendet. Bikompaktheit von Mengen bedeutet die gleichzeitige sequentielle Abgeschlossenheit und Kompaktheit. Die Menge aller linearen beschränkten Operatoren bezeichnen wir mit $[B_1 \to B_2]$. Für den reellen reflexiven Banach-Raum B sei B^* der adjungierte Raum und (b^*, b) der Wert des Funktionals $b^* \in B^*$ auf dem Element $b \in B$. Ein Operator $T \in (B \to B^*)$ heißt *monoton*, wenn

$$(Tb - Tc, b - c) \geqq 0 \quad \text{für} \quad b, c \in B$$

gilt, *gleichmäßig monoton*, wenn eine Funktion $\delta \in \big([0, +\infty) \to [0, +\infty)\big)$ mit $\delta(1) > 0$ derart existiert, daß

$$(Tb - Tc, b - c) \geqq \delta(\|b - c\|) \quad \text{für} \quad b, c \in B$$

mit der Norm $\|\cdot\|$ von B gilt und *stark monoton*, wenn T gleichmäßig monoton ist mit $\delta(r) = c(T)\, r^2$, $c(T) > 0$ fixiert. Die Abbildung $T \in (B_1 \to B_2)$ heißt *verstärkt stetig*, wenn T schwach in B_1 konvergente Elementefolgen in stark in B_2 konvergente Folgen abbildet. Jede lineare kompakte Abbildung $T \in [B_1 \to B_2]$ ist verstärkt stetig.

Lemma 2.3: *B_1 sei in B_2 linear und kompakt eingebettet und $T \in (B_1 \to B_1^*)$ sei im folgenden Sinne lokal Lipschitz-stetig:*

$$\|Tb - Tb_0\|_{B_1^*} \leqq f(T, b_0, \|b - b_0\|_{B_2}) \quad \textit{für} \quad b, b_0 \in B_1$$

mit f stetig im dritten Argument. Dann ist T verstärkt stetig.

Der Beweis ist analog zu einem Spezialfall in [3] ∎

Der Operator $T \in (B \to B^*)$ heißt *pseudomonoton*, wenn für jede schwach in B gegen $b \in B$ konvergente Folge $\{b_n\}$ mit $\overline{\lim}\,(Tb_n, b_n - b) \leqq 0$ gilt $(Tb, b - c) \leqq \underline{\lim}\,(Tb_n, b_n - c)$ für alle $c \in B$. Jeder verstärkt stetige Operator ist pseudomonoton und die Summe zweier pseudomonotoner Operatoren ist wieder pseudomonoton. Desgleichen ist jeder stetige monotone Operator pseudomonoton. $T \in (B \to B^*)$ heißt *vom Typ* (S_+), wenn für jede schwach konvergente Folge $b_n \rightharpoonup b$ mit $Tb_n \rightharpoonup b^*$ und $(Tb_n, b_n) \to (b^*, b)$ folgt $\|b_n - b\| \to 0$.

Lemma 2.4: *$T_1 \in (B \to B^*)$ sei stetig und gleichmäßig monoton mit δ derart, daß aus $\delta(r) = 0$ folgt $r = 0$, und $T_2 \in (B \to B^*)$ sei verstärkt stetig. Dann ist $T_1 + T_2$ pseudomonoton und vom Typ* (S_+).

Ein Operator $T \in (B \to B^*)$ besitzt die *(m, k)-Eigenschaft* mit der Funktion $g \in (\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+)$, $g(r)/r \to +\infty$ für $r \to +\infty$, wenn T stetig, strikt monoton (die Ungleichung in der Monotonie-Definition ist für $b \neq c$ strikt erfüllt) und koerzitiv mit $(Tb, b) \geqq g(\|b\|)$ für $b \in B$ ist. Besitzt T die (m, k)-Eigenschaft, dann ist T eine eindeutig umkehrbare Abbildung auf ganz B^*.

2.3 Gleichmäßig monotone Operatoren auf $W_q(G)$

Wir betrachten auf dem n-fachen Produkt $L_q{}^n(G)$ von $L_q(G)$ mit sich selbst zwei äquivalente Normen:

$$\|y\|_{q,n} = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^n (y_i(s))^2\right)^{q/2} dG\right)^{1/q}, \qquad y \in L_q{}^n(G),$$

und

$$\|y\|_{q,n,0} = \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|_q{}^q\right)^{1/q}, \qquad y \in L_q{}^n(G),$$

mit der Norm $\|\cdot\|_q$ von $L_q(G)$, $q > 1$. Es gilt

$$I_1 \|y\|_{q,n,0} \leqq \|y\|_{q,n} \leqq I_2 \|y\|_{q,n,0}, \qquad y \in L_q{}^n(G),$$

mit

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{für } q \in [2, +\infty) \\ n^{(q-2)/2q} & \text{für } q \in (1, 2) \end{cases} \quad \text{und} \quad I_2 = \begin{cases} n^{(q-2)/2q} & \text{für } q \in [2, +\infty) \\ 1 & \text{für } q \in (1, 2). \end{cases}$$

Für $Lv = \operatorname{grad} v$, $v \in W_q(G)$, haben wir $\|Lv\|_{q,n} = \|v\|_{0,q}$. Im Falle $W_q(G) = \mathring{W}_q{}^1(G)$ gilt dann $L^* = -\operatorname{div}$. Mit $D_0 \in \left(L_q{}^n(G) \to L_p{}^n(G)\right)$, $q > 1$ und $p = q/(q-1)$, erhalten wir Operatoren der Form $Dv = L^*D_0(Lv)$, $v \in W_q(G)$.

Wir sagen, daß die Funktion $d \in (\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+)$ der (E_0)-*Eigenschaft* genügt und schreiben $d \in (\mathrm{E}_0)$, wenn sie stetig und monoton nicht fallend mit $d_1 \geqq d(r) \geqq d_0 > 0$ für $r \in \mathbf{R}_+$ ist. Falls nicht extra definiert, werden wir im weiteren für alle Funktionen mit der (E_0)-Eigenschaft mit dem Index 0 die untere Grenze der Funktion bezeichnen.

Satz 2.5 [6]: *Es gilt in den Fällen* 1, 2 *und* 5 *bezüglich der* $\|L\cdot\|_{q,n,0}$-*Norm und in den Fällen* 3, 4 *und* 6 *bezüglich der* $\|\cdot\|_{0,q}$-*Norm die gleiche Aussage für* D *wie für* D_0 *bezüglich der* $\|\cdot\|_{q,n,0}$-*Norm bzw. der* $\|\ \|_{q,n}$-*Norm mit den gleichen Funktionen* g *und* δ:

1. $$(D_0y)(s) = (D_q{}^n y)(s) = \left(d^1(|y_1(s)|)\, |y_1(s)|^{q-2}\, y_1(s), \ldots, d^n(|y_n(s)|)\, |y_n(s)|^{q-2}\, y_n(s)\right)$$

mit $d^i \in (\mathrm{E}_0)$ *besitzt die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = d_0 r^q$, $d_0 = \min d_0{}^i$, *und ist für* $q \geqq 2$ *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = (d_0 2^{2-q}/q)\, r^q$.

2. $$(D_0y)(s) = (D_q{}^{n,\beta} y)(s) = d(\|y\|_{q,n,0})\left(\|y_1\|_q{}^{\beta-q}\, |y_1(s)|^{q-2}\, y_1(s), \ldots, \|y_n\|_q{}^{\beta-q}\, |y_n(s)|^{q-2}\, y_n(s)\right)$$

mit $d \in (\mathrm{E}_0)$ *besitzt für* $\beta \geqq q$ *die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = d_0 r^\beta$ *und ist für* $\beta \geqq q + \alpha$, $\alpha = 0$ *für* $q \geqq 2$ *und* $\alpha = q(2-q)/(q-1)$ *für* $1 < q < 2$, *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = \left(d_0 2^{2-\beta}/(\beta n^{\beta/q-1})\right) r^\beta$.

3. $$(D_0y)(s) = (F_q{}^n y)(s) = d\left(|y(s)|_n\right) |y(s)|_n{}^{q-2} \left(y_1(s), \ldots, y_n(s)\right)$$

mit $d \in (\mathrm{E}_0)$ *besitzt die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = d_0 r^q$ *und ist für* $q \geqq 2$ *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = (d_0 2^{2-q}/q)\, r^q$.

4. $$(D_0y)(s) = (F_q{}^{n,\beta} y)(s) = d(\|y\|_{q,n})\, \|y\|_{q,n}^{\beta-q}\, |y(s)|_n{}^{q-2} \left(y_1(s), \ldots, y_n(s)\right)$$

mit $d \in (\mathrm{E}_0)$ *besitzt für* $\beta \geqq q$ *die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = d_0 r^\beta$ *und ist für* $\beta \geqq q \geqq 2$ *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = \left(d_0 2^{2-\beta}/(\beta q^{\beta/q})\right) r^\beta$.

5. $(D_0y)(s) = (D_q{}^n y)(s)\,w(s)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ *mit* w_i *meßbar und* $0 < w_{i2} \leqq w_i(s) \leqq w_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *für konstante* w_{i1} *und* w_{i2}, *besitzt die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = w_0 d_0 r^q$, $w_0 = \min w_{i2}$, *und ist für* $q \geqq 2$ *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = (w_0 d_0 2^{2-q}/q)\,r^q$.

6. $(D_0y)(s) = (F_q{}^n y)(s)\,w(s)$, *mit* w *meßbar und* $0 < \underline{w}_2 \leqq w(s) \leqq \underline{w}_1$, *besitzt die* (m, k)-*Eigenschaft mit* $g(r) = \underline{w}_2 d_0 r^q$ *und ist für* $q \geqq 2$ *gleichmäßig monoton mit* $\delta(r) = (\underline{w}_2 d_0 2^{2-q}/q)\,r^q$.

Auf $\mathring{W}_q{}^1(G)$ besitzen die den Fällen 1—4 von Satz 2.5 entsprechenden Operatoren D die Gestalt:

$$D_1 y = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_j}\left[d^j\left(\left|\frac{\partial y}{\partial s_j}\right|\right)\left|\frac{\partial y}{\partial s_j}\right|^{q-2}\frac{\partial y}{\partial s_j}\right],$$

$$D_2 y = -d(\|\text{grad } y\|_{q,n,0}) \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial y}{\partial s_j}\right\|_q^{\beta-q}\frac{\partial}{\partial s_j}\left(\left|\frac{\partial y}{\partial s_j}\right|^{q-2}\frac{\partial y}{\partial s_j}\right),$$

$$D_3 y = -\text{div}\left(d(|\text{grad } y|_n)\,|\text{grad } y|_n{}^{q-2}\,\text{grad } y\right),$$

$$D_4 y = -d(\|y\|_{0,q})\,\|y\|_{0,q}^{\beta-q}\,\text{div}\,(|\text{grad } y|_n{}^{q-2}\,\text{grad } y).$$

3. Erzeugung der Operatoren und der abstrakten Gleichungen

Wir betrachten die homogenen Randwertprobleme (2.2)—(2.3) für das System (1.5)—(1.7). In Punkt 3.1 wird der Lösungsbegriff als Lösung der Aufgabe in einem Produkt geeigneter Funktionalräume eingeführt. Auf diesen Räumen werden mittels der einzelnen Glieder der Differentialgleichungen Operatoren erzeugt, mit deren Hilfe die Aufgabe als System von Operatorgleichungen funktionalanalytisch formuliert wird (Punkt 3.7). Dieses System wird in Punkt 4 auf Existenz von Lösungen und Eigenschaften der Lösungsmenge untersucht. In Punkt 5 werden die Ergebnisse auf die entsprechenden inhomogenen Randwertaufgaben (1.4) erweitert.

3.1 Zum Lösungsbegriff

Wir setzen $W_0 = W_r(G)$ und $W_1 = W_2 = W_p(G)$. Dabei entsprechen die Räume $W_r(G)$ und $W_p(G)$ jeweils den homogenen Randbedingungen (2.2). Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$I_0(v, w) = \int_G D_0 \text{ grad } v \text{ grad } w\, dG, \qquad v, w \in W_0, \tag{3.1}$$

$$I_1(v, w) = \int_G k_0(v_1 - v_2)\, w\, dG, \qquad I_2(w) = \int_G k_0 N w\, dG, \tag{3.2}$$

$w \in W_0$ und $v = [v_1, v_2] \in W$,

$$I_i{}^A(v, w) = \int_G D_i \text{ grad } v \text{ grad } w\, dG, \qquad v, w \in W_i \quad (i = 1, 2), \tag{3.3}$$

$$I_i{}^B(v, v_0, w) = (-1)^i \int_G v\mu_i(|\text{grad } v_0|) \text{ grad } v_0 \text{ grad } w\, dG, \tag{3.4}$$

$v_0 \in W_0$ und $v, w \in W_i$ $(i = 1, 2)$,

$$I_i{}^{\bar{R}}(v, w) = \int_G \bar{R}(v_1, v_2)\, w\, dG, \qquad \bar{R}(v_1, v_2) = \frac{|v_1 v_2|}{b\,|v_1| + c\,|v_2| + d}, \tag{3.5}$$

$v \in W$ und $w \in W_i$ $(i = 1, 2)$,

$$I_i^{R_0}(v, w) = \int_G R_0(v_1, v_2)\, w\, dG, \qquad R_0(v_1, v_2) = \frac{a^2}{b\,|v_1| + c\,|v_2| + d}, \tag{3.6}$$

$v \in W$ und $w \in W_i$ $(i = 1, 2)$.

Wir multiplizieren (1.5)—(1.7) mit beliebigen Elementen $w^3 \in W^3$, integrieren die entstehenden Gleichungen mit den Produkten über G, führen mit den in divergenter Form eingehenden Differentialausdrücken die partielle Integration durch und erhalten das System

$$I_0(u_0, w_0) + I_1(u, w_0) = I_2(w_0), \tag{3.7}$$

$$I_1^A(u_1, w_1) + I_1^B(u_1, u_0, w_1) + k_1 I_1^{\bar{R}}(u, w_1) = k_1 I_1^{R_0}(u, w_1), \tag{3.8}$$

$$I_2^A(u_2, w_2) + I_2^B(u_2, u_0, w_2) + k_2 I_2^{\bar{R}}(u, w_2) = k_2 I_2^{R_0}(u, w_2). \tag{3.9}$$

Definition 3.1: Das Tripel $u^3 = [u_0, u_1, u_2] \in W^3$ heißt *Lösung des Randwertproblems* (2.2), (2.3) für das System (1.5)—(1.7), wenn alle Integrale in (3.7)—(3.9) endliche Werte annehmen und u^3 Lösung des Systems der drei Identitäten (3.7)—(3.9) bezüglich $w^3 \in W^3$ ist.

Wir erzeugen im weiteren über (3.1)—(3.6) Operatoren auf den Räumen $W_r(G)$ und $W_p(G)$, so daß (3.7)—(3.9) äquivalent in der Form eines entsprechenden Systems von Operatorgleichungen geschrieben werden kann.

3.2 Die Operatoren A_0 und B_0

Wir betrachten $I_0(v, w)$ aus (3.1) auf $W_r(G)$. Die Voraussetzungen an D_0 seien derart, daß der erzeugte Operator $A_0 \in (W_0 \to W_0^*)$, $(A_0 v, w)_r = I_0(v, w)$ für $v, w \in W_0$, auf $W_r(G)$ ein gleichmäßig monotoner Operator von einem der Typen 1—6 aus Satz 2.5 ist. Dabei sei $\delta(t) = c_0 t^{\beta(r)}$. Wir untersuchen weiter $I_1(v, w)$ aus (3.2) auf $W_r(G)$. Im Falle $p \leqq n$ sei $p' < np/(n-p)$ und im Falle $r \leqq n$ sei $r' < nr/(n-r)$. Weiter setzen wir

$$\alpha(q) = \begin{cases} c & \text{für} \quad q > n \\ q' & \text{für} \quad q \leqq n \text{ mit } q' < nq/(n-q). \end{cases}$$

Lemma 3.2: *Es existiert (im Falle $p \leqq n$ und $r \leqq n$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $1/p' + 1/r' \leqq 1$) ein Operator $B_0 \in [W \to W_0^*]$ derart, daß $I_1(v, w) = (B_0 v, w)_r$ ist für $v \in W$ und $w \in W_0$,*

$$\|B_0 v\| \leqq k_0 H_r^{\alpha(r)} (\text{mes } G)^\delta \, \|v_1 - v_2\|_{\alpha(p)} \tag{3.10}$$

mit

$$\delta = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad r > n \quad \textit{und} \quad p > n \\ (p'-1)/p' & \textit{für} \quad r > n \quad \textit{und} \quad p \leqq n \\ (r'-1)/r' & \textit{für} \quad r \leqq n \quad \textit{und} \quad p > n \\ (p'-t')/p't' & \textit{für} \quad r \leqq n \quad \textit{und} \quad p \leqq n \end{cases} \qquad (1/r' + 1/t' = 1)$$

und

$$\|B_0 v\| \leqq 2^{(p-1)/p} k_0 H_r^{\alpha(r)} H_p^{\alpha(p)} (\text{mes } G)^\delta \, \|v\|_{2,p}^{\prime}. \tag{3.11}$$

Beweis: Es ist für $v \in W$ und $w \in W_0$

$$|I_1(v, w)| \leqq k_0 \int_G |v_1 - v_2|\, |w|\, dG \leqq \begin{cases} k_0 \|w\|_c \|v_1 - v_2\|_1, & r > n \\ k_0 \|w\|_{r'} \|v_1 - v_2\|_{t'}, & r \leqq n \end{cases}$$

$$\leqq \begin{cases} k_0 H_r{}^c \|v_1 - v_2\|_1 \|w\|_{0,r}, & r > n \\ k_0 H_r{}^{r'} \|v_1 - v_2\|_{t'} \|w\|_{0,r}, & r \leqq n \end{cases}$$

$$\leqq \begin{cases} k_0 \|v_1 - v_2\|_c (\mathrm{mes}\, G)\, H_r{}^c \|w\|_{0,r}, & r > n, \quad p > n, \\ k_0 \|v_1 - v_2\|_{p'} (\mathrm{mes}\, G)^{(p'-1)/p'} H_r^c \|w\|_{0,r}, & r > n, \quad p \leqq n, \\ k_0 \|v_1 - v_2\|_c (\mathrm{mes}\, G)^{(r'-1)/r'} H_r{}^{r'} \|w\|_{0,r}, & r \leqq n, \quad p > n, \\ k_0 \|v_1 - v_2\|_{p'} (\mathrm{mes}\, G)^{(p'-t')/p't'} H_r{}^{r'} \|w\|_{0,r}, & r \leqq n, \quad p \leqq n \end{cases}$$

mit $1/r' + 1/t' = 1$, wobei die Bedingung für die letzte der Ungleichungen $p' \geqq t' = r'/(r' - 1)$ unmittelbar aus $1/p' + 1/r' \leqq 1$ folgt. (3.11) resultiert aus (3.10) durch Einbettung der entsprechenden Räume W_i in $C(\overline{G})$ bzw. $L_{p'}(G)$ $(i = 1, 2)$ und dem anschließenden Übergang zur Norm in W über die Ungleichung $a^q + b^q \leqq (a + b)^q \leqq 2^{q-1}(a^q + b^q)$ für $a, b \geqq 0$ und $q > 1$ ∎

Im Falle $p \leqq n$ und $r \leqq n$ existieren Zahlen $p' < np/(n - p)$ und $r' < nr/(n - r)$ mit $1/p' + 1/r' \leqq 1$, falls

$$r > \frac{np}{n(p-1) + 2p} \quad \text{bzw.} \quad p > \frac{nr}{n(r-1) + 2r} \tag{3.12}$$

ist. Für $n = 1, 2$ ist (3.12) immer für $p, r > 1$ erfüllt, für $n = 3$ bedeutet (3.12) $r > 3p/(5p - 3)$ bzw. $p > 3r/(5r - 3)$.

3.3 Der Operator S_g

Wir betrachten zunächst $I_2(w)$ aus (3.2) auf W_0.

Lemma 3.3: *Es sei $N \in L_{\alpha'}(G)$, $\alpha' = 1$ für $r > n$ und $\alpha' = r'/(r' - 1)$ für $r \leqq n$. Dann existiert ein $g \in W_0{}^*$ mit*

$$\|g\| \leqq k_0 H_r{}^{\alpha(r)} \|N\|_{\alpha'}. \tag{3.13}$$

Beweis: Es ist

$$|I_2(w)| \leqq k_0 \int_G |N|\, |w|\, dG \leqq \begin{cases} k_0 \|w\|_c \|N\|_1 & \text{für} \quad r > n \\ k_0 \|w\|_{r'} \|N\|_{r'/(r'-1)} & \text{für} \quad r \leqq n \end{cases} ∎$$

Wir können nun (3.7) äquivalent in der Form der Operatorgleichung

$$A_0 u_0 + B_0 u = g \tag{3.14}$$

schreiben. Aus den Ergebnissen der Monotonietheorie (vgl. z. B. [9]) folgt sofort

Lemma 3.4: *Unter den Voraussetzungen der Lemmata 3.2 und 3.3 und den obigen Bedingungen an D_0 existiert für fixiertes $g \in W_0{}^*$ und jedes $u \in W$ genau eine Lösung u_0 von (3.14).*

Wir bezeichnen die nach Lemma 3.4 garantierte Lösung u_0 mit $S_g u$: $u_0 = S_g u$. Für $S_g \in (W \to W_0)$ gilt die Aussage von

Lemma 3.5: *Es ist*

$$\|S_g v\|_{0,r} \leqq \delta_0^{-1}\left(\frac{k_0 H_r^{\alpha(r)}}{g_0}\left(\|N\|_{\alpha'} + 2^{(p-1)/p} H_p^{\alpha(p)}(\operatorname{mes} G)^{\delta}\, \|v\|_{2,p}\right)\right)$$

für $v \in W$ *mit* $\delta_0^{-1}(t) = t^{1/(\beta(r)-1)}$.

Beweis: Er folgt sofort aus (3.11), (3.13) und der Koerzitivität von A_0 mit $g(t) = g_0 t^{\beta(r)}$ ∎

Lemma 3.6: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.4 gilt für alle* $v, w \in W$

$$\|S_g v - S_g w\|_{0,r} \leqq \delta_0^{-1}\left(\frac{k_0 H_r^{\alpha(r)}}{c_0} (\operatorname{mes} G)^{\delta} \{\|v_1 - w_1\|_{\alpha(p)} + \|v_2 - w_2\|_{\alpha(p)}\}\right)$$

und

$$\|S_g v - S_g w\|_{0,r} \leqq \delta_0^{-1}\left(k_0 \frac{2^{(p-1)/p}}{c_0} (\operatorname{mes} G)^{\delta} H_r^{\alpha(r)} H_p^{\alpha(p)} \|v - w\|_{2,p}\right). \tag{3.15}$$

Korollar 3.7: *In den Voraussetzungen von Lemma 3.4 ist* S_g *verstärkt stetig.*

3.4 Die Operatoren R und R_0

Lemma 3.8: *Unter der zusätzlichen Voraussetzung* $p', p'/(p'-1) < np/(n-p)$ *im Falle* $p \leqq n$ *existiert ein* $R_i \in (W \to W_i^*)$ *derart, daß*

$$(R_i v, w)_p = I_i^{\bar{R}}(v, w) \quad \text{und} \quad \|R_i v\| \leqq \alpha_0 \|v\|_{2,p}$$

für $v \in W$ *ist* $(i = 1, 2)$ *mit*

$$\alpha_0 = 2^{-1/p} \max\left\{\frac{1}{c}, \frac{1}{b}\right\} H_p^{\alpha_1} H_p^{\alpha_2} (\operatorname{mes} G)^{\beta_0},$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = c$ *und* $\beta_0 = 1$ *für* $p > n$ *und* $\alpha_1 = p'$, $\alpha_2 = p'/(p'-1)$ *und* $\beta_0 = 0$ *für* $p \leqq n$.

Die Bedingung $p', p'/(p'-1) < np/(n-p)$ im Falle $p \leqq n$ bedeutet $p > 2n/(n+2)$, wodurch für $n = 3$ die zusätzliche Forderung $p > 6/5$ erhoben werden muß. Für $n = 1$ und $n = 2$ garantiert $p > 1$ die Existenz der R_i.

Beweis von Lemma 3.8: Nach [3] ist für $w, v_i \in W_i$ $(i = 1, 2)$ im Falle $p > n$

$$\begin{aligned} |I_i^{\bar{R}}(v, w)| &\leqq \left[\frac{1}{2c}\|v_1\|_c + \frac{1}{2b}\|v_2\|_c\right] (\operatorname{mes} G)\, \|w\|_c \\ &\leqq \frac{1}{2} (\operatorname{mes} G)\, (H_p^c)^2 \max\left\{\frac{1}{c}, \frac{1}{b}\right\} 2^{(p-1)/p} \|v\|_{2,p}\, \|w\|_{0,p} \end{aligned}$$

und im Falle $p \leqq n$

$$\begin{aligned} |I_i^{\bar{R}}(v, w)| &\leqq \left(\frac{1}{2c}\|v_1\|_{q'} + \frac{1}{2b}\|v_2\|_{q'}\right) \|w\|_{p'} \\ &\leqq H_p^{p'} H_p^{q'} \|w\|_{0,p} \left(\frac{1}{2c}\|v_1\|_{0,p} + \frac{1}{2b}\|v_2\|_{0,p}\right) \\ &\leqq \frac{1}{2} \max\left\{\frac{1}{c}, \frac{1}{b}\right\} 2^{(p-1)/p} H_p^{p'} H_p^{q'} \|v\|_{2,p}\, \|w\|_{0,p} \end{aligned}$$

mit $q' = p'/(p'-1)$ ∎

Korollar 3.9: *Für den Operator* $R = [k_1 R_1, k_2 R_2] \in (W \to W^*)$ *gilt für alle* $v \in W$

$$\|Rv\| \leqq \alpha_0 k_3 \|v\|_{2,p} \quad mit \quad k_3 = \left((k_1)^q + (k_2)^q\right)^{1/q} \quad und \quad 1/p + 1/q = 1\,.$$

Lemma 3.10: *Es existiert ein* $R_{i0} \in (W \to W_i^*)$ *derart, daß* $(R_{i0}v, w)_p = I_i^{R_0}(v, w)$ *und*

$$\|R_{i0}v\| \leqq (a^2/d)\, H_p^{\alpha(p)} (\text{mes } G)^{\bar\beta_1} \quad \text{für} \quad v \in W \tag{3.16}$$

ist $(i = 1, 2)$ *mit* $\bar\beta_1 = 1$ *für* $p > n$ *und* $\bar\beta_1 = (p' - 1)/p'$ *für* $p \leqq n$. *Für* $R_0 = [k_1 R_{10}, k_2 R_{20}]$ *gilt weiter*

$$\|R_0 v\| \leqq (a^2/d)\, H_p^{\alpha(p)} (\text{mes } G)^{\bar\beta_1} k_3 \quad \text{für} \quad v \in W. \tag{3.17}$$

Beweis: Es gilt (vgl. [3]) $|I_i^{R_0}(v, w)| \leqq (a^2/d) \int_G |w|\, dG$ und damit (3.16), woraus sofort (3.17) folgt. ∎

Wir gehen auf die Lipschitz-Stetigkeit von R und R_0 ein. Dabei benutzen wir

Lemma 3.11 [3]: *Die Funktionen* $\bar R$ *und* R_0 *sind auf* $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ *Lipschitz-stetig. Es gilt für* $v, w \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$

$$|\bar R(v) - \bar R(w)| \leqq (1/c)\, |v_1 - w_1| + (1/b)\, |v_2 - w_2|, \tag{3.18}$$

$$|R_0(v) - R_0(w)| \leqq (a^2/d^2) \max\{b, c\}\, (|v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|). \tag{3.19}$$

Lemma 3.12: *Für* R *gilt (im Falle* $p \leqq n$ *unter der zusätzlichen Voraussetzung* $p > 2n/(n + 2)$ *für* $v, w \in W$

$$\|Rv - Rw\| \leqq \delta_1 \delta_3 (\|v_1 - w_1\|_{\alpha_2} + \|v_2 - w_2\|_{\alpha_2}) \tag{3.20}$$

und

$$\|Rv - Rw\| \leqq \delta_2 \delta_3 \|v - w\|_{2,p} \tag{3.21}$$

mit

$$\delta_1 = \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} H_p^{\alpha_1}, \qquad \delta_2 = \delta_1 2^{(p-1)/p} H_p^{\alpha_2}, \qquad \delta_3 = k_3 (\text{mes } G)^{\beta_0}.$$

Beweis: Für $p \leqq n$ mit $1/p' + 1/q' = 1$ gilt wegen (3.18) zunächst

$$\begin{aligned} |(R_i v - R_i w, z)_p| &\leqq \frac{1}{c} \|v_1 - w_1\|_{p'} \|z\|_{p'} + \frac{1}{b} \|v_2 - w_2\|_{q'} \|z\|_{p'} \\ &\leqq H_p^{p'} \|z\|_{0,p} \left(\frac{1}{c} \|v_1 - w_1\|_{q'} + \frac{1}{b} \|v_2 - w_2\|_{q'}\right) \\ &\leqq H_p^{p'} H_p^{q'} \|z\|_{0,p} \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} 2^{(p-1)/p} \|v - w\|_{2,p}, \end{aligned}$$

damit

$$\|R_i v - R_i w\| \leqq H_p^{p'} \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} (\|v_1 - w_1\|_{q'} + \|v_2 - w_2\|_{q'})$$

und außerdem

$$\|R_i v - R_i w\| \leqq 2^{(p-1)/p} H_p^{p'} H_p^{q'} \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} \|v - w\|_{2,p}.$$

(3.20) und (3.21) sind Konsequenzen dieser beiden letzten Abschätzungen. Im Falle $p > n$ ist

$$\|R_i v - R_i w\| \leqq H_p^c \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} (\text{mes } G)\, (\|v_1 - w_1\|_c + \|v_2 - w_2\|_c)$$

und

$$\|R_i v - R_i w\| \leqq 2^{(p-1)/p} \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} (H_p{}^c)^2 (\text{mes } G) \|v - w\|_{2,p} \blacksquare$$

Korollar 3.13: *R ist verstärkt stetig.*

Analog beweisen wir auf der Basis von (3.19)

Lemma 3.14: *Für R_0 gilt für $v, w \in W$*

$$\|R_0 v - R_0 w\| \leqq \begin{cases} \delta_4\delta_3(\|v_1 - w_1\|_{\alpha_2} + \|v_2 - w_2\|_{\alpha_2}) \\ \delta_5\delta_3 \|v - w\|_{2,p} \end{cases}$$

mit $\delta_4 = (a^2/d^2) \max\{b, c\} H_p{}^{\alpha_1}$, $\delta_5 = \delta_4 2^{(p-1)/p} H_p{}^{\alpha_2}$.

Korollar 3.15: *R_0 ist verstärkt stetig.*

3.5 Der Operator *B*

Lemma 3.16 [3]: *Die Funktionen μ_i und $\lambda_i = \mu_i \operatorname{grad} u_0$ sind in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{R}^n$ beschränkt:*

$$|\mu_i| \leqq 1, \qquad |\lambda_i|_n \leqq E_{0i} \qquad (i = 1, 2).$$

Außerdem ist λ_i Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L(\lambda_i) = 1$.

Wir betrachten $I_i{}^B(v, v_0, w)$ aus (3.4) auf $W_i \times W_0$ $(i = 1, 2)$. Es gilt

Lemma 3.17: *Es existiert (im Falle $p \leqq n$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $2n/(n+1) < p$) ein $B_i \in (W_i \times W_0 \to W_i{}^*)$ derart, daß $(B_i(v, v_0), w)_p = I_i{}^B(v, v_0, w)$ ist und für $v_0 \in W_0$ und $v \in W_i$ die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$\|B_i(v, v_0)\| \leqq E_{0i} H_p{}^{p/(p-1)} \|v\|_{0,p} \quad \text{für} \quad 2n/(n+1) < p \leqq n,$$

$$\|B_i(v, v_0)\| \leqq E_{0i} H_p{}^c (\text{mes } G)^{(p-1)/p} \|v\|_{0,p} \quad \text{für} \quad p > n.$$

Beweis: Es ist

$$|I_i{}^B(v, v_0, w)| \leqq \int_G |v| \, |\mu_i(|\operatorname{grad} v_0|)| \, |\operatorname{grad} v_0| \, |\operatorname{grad} w| \, dG$$

und damit für $p > n$

$$|I_i{}^B(v, v_0, w)| \leqq E_{0i} \|v\|_c \int_G |\operatorname{grad} w| \, dG \leqq E_{0i} H_p{}^c \|v\|_{0,p} (\text{mes } G)^{(p-1)/p} \|w\|_{0,p}$$

und für $p \leqq n$

$$|I_i{}^B(v, v_0, w)| \leqq E_{0i} \int_G |v| \, |\operatorname{grad} w| \, dG \leqq E_{0i} \|v\|_q \|w\|_{0,p} \quad \text{mit} \quad q = p/(p-1) \blacksquare$$

Korollar 3.18: *Mit $B = [B_1, B_2] \in (W \times W_0 \to W^*)$ und $E_0 = \max E_{0i}$ gilt*

$$\|B(v, v_0)\| \leqq 2^{(p-1)/p} E_0 (\text{mes } G)^{(p-1)/p} H_p{}^c \|v\|_{2,p} \quad \text{für} \quad p > n$$

und

$$\|B(v, v_0)\| \leqq 2^{(p-1)/p} E_0 H_p{}^{p/(p-1)} \|v\|_{2,p} \quad \text{für} \quad 2n/(n+1) < p \leqq n.$$

Wir untersuchen B auf Lipschitz-Stetigkeit.

Lemma 3.19: *Für $v_0, w_0 \in W_0$ und $v, w \in W_i$ $(i = 1, 2)$ gilt*

a) *bei $p > n$ und $r \geqq p/(p-1) = q$*

$$\|B_i(v, v_0) - B_i(w, w_0)\| \leqq H_p{}^c \|v\|_{0,p} \|v_0 - w_0\|_{0,q} + E_{0i}(\text{mes } G)^{1/q} \|v - w\|_c, \tag{3.22}$$

b) *bei $2n/(n+1) < p \leqq n$, $1/p + 1/p' + 1/t = 1$ und $r \geqq t > np/\big(p(n+1) - 2n\big)$*

$$\|B_i(v, v_0) - B_i(w, w_0)\| \leqq H_p{}^{p'} \|v\|_{0,p} \|v_0 - w_0\|_{0,t} + E_{0i} \|v - w\|_q. \tag{3.23}$$

Beweis: Im Falle a) ist

$$\left|(B_i(v, v_0) - B_i(w, w_0), z)_p\right| \leqq \int_G |v| \,|\text{grad}\,(v_0 - w_0)| \,|\text{grad}\, z| \, dG$$

$$+ \int_G |v - w| \,\left|\mu_i(|\text{grad}\, w_0|)\right| \,|\text{grad}\, w_0| \,|\text{grad}\, z| \, dG$$

$$\leqq \|v\|_c \|v_0 - w_0\|_{0,q} \|z\|_{0,p} + E_{0i} \|v - w\|_c \,(\text{mes } G)^{(p-1)/p} \|z\|_{0,p}$$

und im Falle b) ist

$$\left|(B_i(v, v_0) - B_i(w, w_0), z)_p\right| \leqq \|v\|_{p'} \|v_0 - w_0\|_{0,t} \|z\|_{0,p} + E_{0i} \|v - w\|_q \|z\|_{0,p} \ ▮$$

Korollar 3.20: *Unter den Voraussetzungen an r und t in Lemma 3.19 gilt für $p > n$*

$$\|B(v, v_0) - B(w, w_0)\|$$

$$\leqq 2^{(p-1)/p} H_p{}^c \|v\|_{2,p} \|v_0 - w_0\|_{0,q} + E_0(\text{mes } G)^{1/q} (\|v_1 - w_1\|_c + \|v_2 - w_2\|_c) \tag{3.24}$$

und für $p \leqq n$

$$\|B(v, v_0) - B(w, w_0)\|$$

$$\leqq 2^{(p-1)/p} H_p{}^{p'} \|v\|_{2,p} \|v_0 - w_0\|_{0,t} + E_0(\|v_1 - w_1\|_q + \|v_2 - w_2\|_q). \tag{3.25}$$

Beweis: Für $p > n$ ist

$$\|B(v, v_0) - B(w, w_0)\|$$

$$= (\|B_1(v_1, v_0) - B_1(w_1, w_0)\|^q + \|B_2(v_2, v_0) - B_2(w_2, w_0)\|^q)^{1/q}$$

$$\leqq \|B_1(v_1, v_0) - B_1(w_1, w_0)\| + \|B_2(v_2, v_0) - B_2(w_2, w_0)\|$$

$$\leqq H_p{}^c \|v_0 - w_0\|_{0,q} (\|v_1\|_{0,p} + \|v_2\|_{0,p}) + E_0(\text{mes } G)^{1/q} (\|v_1 - w_1\|_c + \|v_2 - w_2\|_c)$$

$$\leqq 2^{(p-1)/p} H_p{}^c \|v_0 - w_0\|_{0,q} \|v\|_{2,p} + E_0(\text{mes } G)^{1/q} (\|v_1 - w_1\|_c + \|v_2 - w_2\|_c).$$

Für $p \leqq n$ gehen wir analog vor ▮

Korollar 3.21: *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 3.19. Dann gilt für $p > n$*

$$\|B(v, v_0) - B(w, w_0)\|$$

$$\leqq 2^{(p-1)/p} H_p{}^c (\|v\|_{2,p} \|v_0 - w_0\|_{0,q} + E_0(\text{mes } G)^{1/q} \|v - w\|_{2,p}) \tag{3.26}$$

und für $2n/(n+1) < p \leqq n$

$$\|B(v, v_0) - B(w, w_0)\|$$

$$\leqq 2^{(p-1)/p} (H_p{}^{p'} \|v\|_{2,p} \|v_0 - w_0\|_{0,t} + E_0 H_p{}^q \|v - w\|_{2,p}). \tag{3.27}$$

3.6 Der Operator B_g

Wir setzen $B_g v = B(v, S_g v)$, $v \in W$. Es gilt $B_g \in (W \to W^*)$.

Lemma 3.22: *Es sei* $2n/(n+1) < p$, $r \geqq p/(p-1)$ *für* $p > n$ *und* $r > pn/\big(p(n+1) - 2n\big)$ *für* $p \leqq n$, *und* $N \in L_{\alpha'}(G)$. *Dann ist* B_g *verstärkt stetig.*

Beweis: Nach Korollar 3.7 ist S_g verstärkt stetig. In (3.24) und (3.25) können die Glieder $\|v_0 - w_0\|_{0,q}$ und $\|v_0 - w_0\|_{0,t}$ durch $\|v_0 - w_0\|_{0,r}$ abgeschätzt werden. Die anderen Ausdrücke in diesen Abschätzungen sind von der Art, daß die Kompaktheit der Einbettung von W in $(C(\overline{G}))^2$ und in $(L_q(G))^2$ den Beweis vervollständigt ∎

Lemma 3.23: *Bei* $p > n$ *und* $r \geqq p/(p-1)$ *sowie bei* $2n/(n+1) < p \leqq n$, $1/p + 1/p' + 1/t = 1$ *und* $r \geqq t > np/(p(n+1) - 2n)$ *und* $N \in L_{\alpha'}(G)$ *gilt:*

$$\|B_g v - B_g w\| \leqq \varepsilon_1\varepsilon_3 \|v\|_{2,p} \|v - w\|_{2,p}^{1/(\beta(r)-1)} + \varepsilon_2\varepsilon_4 \|v - w\|_{2,p}$$

für $v, w \in W$ *mit*

$$\varepsilon_1 = 2^{(p-1)/p} \left(H_r^{\alpha(r)} H_p^{\alpha(p)} 2^{(p-1)/p} \frac{k_0}{c_0} (\text{mes } G)^\delta\right)^{1/(\beta(r)-1)}, \qquad \varepsilon_2 = 2^{(p-1)/p} E_0,$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} H_p^c (\text{mes } G)^{(r-q)/rq} & \text{für } p > n \\ H_p^{p'} (\text{mes } G)^{(r-t)/rt} & \text{für } p \leqq n, \end{cases} \qquad \varepsilon_4 = \begin{cases} H_p^c (\text{mes } G)^{1/q} & \text{für } p > n \\ H_p^q & \text{für } p \leqq n. \end{cases}$$

Beweis: Wir setzen (3.15) in (3.26) und (3.27) ein und nutzen die Ungleichung $\|v_0 - w_0\|_{0,s} \leqq (\text{mes } G)^{(r-s)/rs} \|v_0 - w_0\|_{0,r}$, $r \geqq s$ ∎

3.7 Das System der Operatorgleichungen

Wir betrachten $I_i^A(v, w)$ aus (3.3) auf W_i, $i = 1, 2$. Die D_i mögen Voraussetzungen von der Art genügen, daß die entsprechend erzeugten Operatoren $A_i \in (W_i \to W_i^*)$: $(A_i v, w)_p = I_i^A(v, w)$ für $v, w \in W_i$, auf W_i eine der beiden Bedingungen erfüllen:

(M) A_i besitzt die (m, k)-Eigenschaft mit $g(t) = g_i t^\beta$, $\beta \geqq p$.
(gM) A_i ist gleichmäßig monoton mit $\delta(t) = c_i t^\beta$, $\beta \geqq \max\{p, p/(p-1)\}$.

Lemma 3.24: *Für* $A = [A_1, A_2]$ *gilt unter der Voraussetzung* (M) ((gM)): A *besitzt die* (m, k)*-Eigenschaft mit* $g(t) = 2^{1-\beta/p} \min g_i t^\beta$ (A *ist gleichmäßig monoton mit* $\delta(t) = 2^{1-\beta/p} \min c_i t^\beta$).

Damit sind alle Einzeloperatoren erzeugt. Unter den formulierten Bedingungen können wir daher die Aufgabe (3.7)—(3.9) in der äquivalenten Form des folgenden Systems von Operatorgleichungen schreiben:

$$A_0 u_0 + B_0 u = g, \tag{3.28}$$

$$A_1 u_1 + B_1(u_1, u_0) + k_1 R_1(u) = k_1 R_{01}(u), \tag{3.29}$$

$$A_2 u_2 + B_2(u_2, u_0) + k_2 R_2(u) = k_2 R_{02}(u). \tag{3.30}$$

Die Untersuchung der Existenz von Lösungen für (3.28)—(3.30) reduziert sich über die Darstellung $u_0 = S_g u$ auf die Untersuchung des Systems

$$A_1 u_1 + B_1(u_1, S_g u) + k_1 R_1(u) = k_1 R_{01}(u),$$

$$A_2 u_2 + B_2(u_2, S_g u) + k_2 R_2(u) = k_2 R_{02}(u).$$

Wir setzen $T_g = A + B_g + R - R_0 \in (W \to W^*)$. Dann ist dieses System durch

$$T_g u = o, \qquad u \in W \tag{3.31}$$

darstellbar. Elemente $[S_g\psi, u]$ mit der Lösung u von (3.31) fallen mit den Lösungen von (3.28)—(3.30) zusammen. Wir untersuchen (3.31) in Punkt 4 auf Existenz von Lösungen. In einigen Fällen gelingt uns die Abschätzung des Durchmessers der Lösungsmenge von oben. Unter speziellen Voraussetzungen wird die Unität der Lösung nachgewiesen.

4. Aussagen im homogenen Fall

Wir beweisen in Punkt 4.1 die für uns wichtigen Eigenschaften der Abbildung T_g. Auf ihrer Basis treffen wir dann in Punkt 4.2 die Aussagen hinsichtlich der Lösungen von (3.31).

4.1 Der Operator T_g

Lemma 4.1: *A_0 und N mögen den Bedingungen von Lemma 3.4 genügen. Dann gilt:*

1. *Für $p > n$ sei $r \geqq p/(p-1)$ und für $p \leqq n$ zusätzlich $p > 2n/(n+1)$ und weiter $r > pn/(p(n+1) - 2n)$. Wenn die A_i $(i = 1, 2)$ die Bedingung* (M) *erfüllen, dann ist T_g pseudomonoton.*
2. *Erfüllen die Operatoren A_i $(i = 1, 2)$ zusätzlich zu den Voraussetzungen von Teil 1 die Bedingungen* (gM), *dann ist T_g vom Typ (S_+).*

Beweis: Alle erzeugten Operatoren sind stetig. A ist im Falle 1 monoton und im Falle 2 gleichmäßig monoton. Durch die Voraussetzungen an A_0 ist S_g verstärkt stetig. Daraus resultiert die verstärkte Stetigkeit von B_g. Die Operatoren R und R_0 sind ebenfalls verstärkt stetig (Korollare 3.13 und 3.15) ∎

Lemma 4.2: 1. *Es seien alle Voraussetzungen von Teil 1 aus Lemma 4.1 gegeben. Weiter sei*

$$\varrho_1 = 2^{(p-1)/p} E_0 \cdot \begin{cases} (\text{mes } G)^{(p-1)/p} H_p{}^c, & p > n \\ H_p{}^{p/(p-1)}, & p \leqq n, \end{cases} \quad \varrho_2 = \alpha_0 k_3, \quad \varrho_3 = \varrho_1 + \varrho_2,$$

$$\varrho_4 = (a^2/d)\, H_p{}^{\alpha(p)} (\text{mes } G)^{\beta_1} k_3, \quad g = \min g_i \eta, \quad c = \min c_i \eta, \quad \alpha = \frac{\beta(r)}{\beta(r) - 1},$$

$\eta = 2^{1-\beta/p}$, $\gamma = \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \delta_2 \delta_3 + \delta_5 \delta_3$ (vgl. Punkt 3) und $\varepsilon, \delta, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ positive Konstanten. Dann ist der Operator T_g für $\beta > 2$ in jedem Fall und für $\beta = 2$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $g > \varrho_3$ koerzitiv. Dabei gilt im Falle $\beta > 2$

$$(T_g v, v)_p \geqq \delta \, \|v\|_{2,p} \quad \text{für} \quad \|v\|_{2,p} \geqq \max \left\{ \left(\frac{\varepsilon + \varrho_3}{g} \right)^{1/(\beta-2)}, \frac{\delta + \varrho_4}{\varepsilon} \right\} \tag{4.1}$$

und im Falle $\beta = 2$

$$(T_g v, v)_p > 0 \quad \text{für} \quad \|v\|_{2,p} > \frac{\varrho_4}{g - \varrho_3}. \tag{4.2}$$

2. *Es sei im Resultat von Aussage 1 $\|v\|_{2,p} \leqq$ R. Weiter mögen die A_i $(i = 1, 2)$ die Bedingungen von Teil 2 aus Lemma 4.1 erfüllen. Dann gilt:*

a) *Im Falle $\beta > 2$ ist T_g für Elemente $v, w \in W$ mit*

$$\|v - w\|_{2,p} \geqq \max \left\{ \left(\frac{\varepsilon_5 + \gamma}{c} \right)^{1/(\beta-2)}, \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \underline{R} + \varepsilon_6}{\varepsilon_5} \right)^{1/(2-\alpha)} \right\} \quad \text{für} \quad \beta(r) > 2$$

bzw.

$$\|v - w\|_{2,p} \geqq \left\{ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \underline{R} + \gamma + \varepsilon_6}{c} \right\}^{1/(\beta-2)} \quad \text{für} \quad \beta(r) = 2$$

gleichmäßig monoton mit $\delta(t) = \varepsilon_6 t^\alpha$.

b) *Im Falle* $\beta = 2$, $\beta(r) > 2$ *und* $c > \gamma$ *ist* T_g *für Elemente* $v, w \in W$ *mit*

$$\|v - w\|_{2,p} \geqq \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R} + \varepsilon_7}{c - \gamma}\right)^{1/(2-\alpha)}$$

gleichmäßig monoton mit $\delta(t) = \varepsilon_7 t^\alpha$.

c) *Für* $\beta = \beta(\dot{r}) = 2$ *(d. h.* $p = r = 2$*) und* $c > \gamma + \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}$ *ist* T_g *stark monoton mit* $c(T_g) = c - (\gamma + \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R})$.

Beweis: Wir konstatieren, daß alle Abbildungen unter den formulierten Voraussetzungen erzeugt sind.

1. Zunächst gilt mit $\sigma = \|v\|_{2,p}$

$$(T_g v, v)_p \geqq g\sigma^\beta - \varrho_3\sigma^2 - \varrho_4\sigma = \sigma[\sigma(g\sigma^{\beta-2} - \varrho_3) - \varrho_4].$$

Für $\varepsilon, \delta > 0$ sowie

$$\sigma \geqq \left(\frac{\varepsilon + \varrho_3}{g}\right)^{1/(\beta-2)} \quad \text{und} \quad \sigma \geqq \frac{\varrho_4 + \delta}{\varepsilon}$$

gilt dann (4.1). Damit ist die Aussage im Falle $\beta > 2$ bewiesen. Im Falle $\beta = 2$ ist für $\sigma > \varrho_4/(g - \varrho_3)$ die Abschätzung (4.2) garantiert.

2. Wir haben mit $\sigma = \|v - w\|_{2,p}$

$$\begin{aligned}(T_g v - T_g w, v - w)_p &\geqq c\sigma^\beta - \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}\sigma^\alpha - (\varepsilon_2\varepsilon_4 + \delta_2\delta_3 + \delta_5\delta_3)\,\sigma^2 \\ &= \sigma^\alpha[\sigma^{2-\alpha}(c\sigma^{\beta-2} - \gamma) - \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}].\end{aligned}$$

Für $\beta > 2$ ist mit

$$\sigma \geqq \left(\frac{\varepsilon_5 + \gamma}{c}\right)^{1/(\beta-2)} \quad \text{und} \quad \sigma \geqq \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R} + \varepsilon_6}{\varepsilon_5}\right)^{1/(2-\alpha)} \quad \text{für } \alpha < 2$$

bzw. mit

$$\sigma \geqq \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R} + \gamma + \varepsilon_6}{c}\right)^{1/(\beta-2)} \quad \text{für } \alpha = 2$$

die Abschätzung $(T_g v - T_g w, v - w)_p \geqq \varepsilon_6\sigma^\alpha$ erfüllt. Für $\beta = 2$ gilt im Falle $\beta(\dot{r}) > 2$ und $c > \gamma$ für $\sigma \geqq [(\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R} + \varepsilon_7)/(c - \gamma)]^{1/(2-\alpha)}$ die Abschätzung $(T_g v - T_g w, v - w)_p \geqq \varepsilon_7\sigma^\alpha$ und im Falle $\beta(\dot{r}) = 2$ sowie $c > \gamma + \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}$ gilt $(T_g v - T_g w, v - w)_p \geqq \left(c - (\gamma + \varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R})\right)\sigma^2$ ∎

4.2 Aussagen für den homogenen Fall

Wir betrachten das Problem

$$T_g u = o, \qquad u \in W. \tag{4.3}$$

Satz 4.3: 1. *Die Voraussetzungen seien wie in Teil 1 von Lemma 4.2. Dann besitzt (4.3) wenigstens eine Lösung u. Für jede solche Lösung gilt mit beliebigen positiven Konstanten* ε *und* δ

$$\|u\|_{2,p} < \max\left\{\left(\frac{\varepsilon + \varrho_3}{g}\right)^{1/(\beta-2)}, \frac{\delta + \varrho_4}{\varepsilon}\right\} \quad \textit{für} \quad \beta > 2 \quad \textit{und} \quad \|u\|_{2,p} \leqq \frac{\varrho_4}{g - \varrho_3}$$

für $\beta = 2$.

Die Lösungsmenge ist schwach abgeschlossen.

2. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Teil 1 seien die Bedingungen von Teil 2 aus Lemma 4.1 erfüllt. Dann ist die Lösungsmenge von (4.3) stark bikompakt. Sind weiter die Voraussetzungen von Teil 2 aus Lemma 4.2 gegeben, dann ist der Durchmesser der Lösungsmenge von (4.3) von oben durch*

$$\max\left\{\left(\frac{\varepsilon_5+\gamma}{c}\right)^{1/(\beta-2)},\ \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3 R+\varepsilon_6}{\varepsilon_5}\right)^{1/(2-\alpha)}\right\}\quad \text{für}\quad \beta>2,\quad \beta(r)>2,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}+\gamma+\varepsilon_6}{c}\right)^{1/(\beta-2)}\quad \text{für}\quad \beta>2,\quad \beta(r)=2,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}+\varepsilon_7}{c-\gamma}\right)^{1/(2-\alpha)}\quad \text{für}\quad \beta=2,\quad \beta(r)>2,\quad c>\gamma$$

mit den positiven Konstanten ε_5, ε_6, ε_7 abschätzbar. Im Falle $\beta=\beta(r)=2$ $(p=r=2)$ und $c>\gamma+\varepsilon_1\varepsilon_3\underline{R}$ existiert genau eine Lösung von (4.3).

Beweis: 1. T_g ist pseudomonoton und koerzitiv; die Aussage folgt dann aus [5: Satz 2.7/S. 197] und weiter aus Teil 1 von Lemma 4.2. 2. T_g ist vom Typ (S_+). Die Abschätzung ist Ergebnis der Aussagen von Teil 2 aus Lemma 4.2 ∎

Wir interessieren uns weiter dafür, welchen Einfluß die Regularität der Lösung der Poisson-Gleichung und eine entsprechende zweite A-priori-Abschätzung für die Lösung u_0 auf die Lösbarkeit des Problems (4.3) besitzt. Auf den Spezialfall $p=2$ sind wir bereits in [3] eingegangen. Wir formulieren die Bedingung

(R) Das Gebiet G und die Randbedingungen an u_0 erlauben für die schwache Lösung u_0 aus dem entsprechenden Unterraum von $W_2{}^1(G)$ der Gleichung $-\Delta u_0=f$ die Regularitätsaussage, daß für $f\in L_{q'}(G)$ gilt $u_0\in W_{q'}^2(G)$ und $\|u_0\|_{W_{q'}^2(G)} \leqq c\,\|f\|_{q'}$.

Unter ihr verfügen wir über eine Abschätzung für $|\text{grad}\, u_0|_n$ in der $W_{q'}^1(G)$-Norm. Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen folgt, daß $|\text{grad}\, u_0|_n\in C(\overline{G})$ für $q'>n$ gilt.

Wir betrachten nun die Gleichung (1.5) für $r=2$:

$$-\Delta u_0=(k_0/D_0)\,(\overline{N}-u_1+u_2)\quad\text{mit}\quad u_i\in W_i\qquad (i=1,2).$$

Lemma 4.4: *Es sei $p>2n/(n+1)$ und $u_i\in W_p(G)$. Dann ist $u_i\in L_{p'}(G)$ mit $p'>n$, und zwar für jedes $p'>n$ im Falle $p>n$ und für $p'<pn/(n-p)$ im Falle $p\leqq n$.*

Beweis: Für $p>n$ ist wegen $u_i\in W_p(G)$ nach den Sobolevschen Einbettungssätzen $u_i\in C(\overline{G})$ und damit $u_i\in L_{p'}(G)$ für jedes $p'>n$. Für $p\leqq n$ können wir uns auf $n=2,3$ beschränken. Die Bedingung $p>2n/(n+1)$ hat dann wegen $2n/(n+1)\geqq n/2$ die Relation $2p>n$ zur Konsequenz. Damit ist $n<np/(n-p)$ erfüllt. Andererseits erlauben die Sobolevschen Einbettungssätze die Aussage $u_i\in L_{p'}(G)$ mit $p'<pn/(n-p)$. Für alle p' mit $n<p'<np/(n-p)$ ist damit $u_i\in L_{p'}(G)$ ∎

Lemma 4.5: *Das Gebiet G genüge* (R). *Außerdem sei $p>2n/(n+1)$, $u_1,u_2\in W_p(G)$ und $N\in L_{p'}(G)$ mit $p'>n$ im Fall $p>n$ und $n<p'<np/(n-p)$ im Falle $p\leqq n$. Dann ist $|\text{grad}\, u_0|_n\in C(\overline{G})$ und mit $c_1=(k_0/D_0)\,K_p{}^c c$ gilt*

$$\|\text{grad}\, u_0\|_c' \leqq c_1(\|N\|_{p'}+2^{(p-1)/p}H_p{}^{p'}\,\|u\|_{2,p}).$$

Daraus folgt sofort

Lemma 4.6: *B_g ist lokal Lipschitz-stetig und verstärkt stetig.*

Beweis: Wir haben

$$\|B_{gi}u - B_{gi}v\| \leqq \|u_i\|_q \|u_i - v_i\|_{0,p} \|\mathrm{grad}\,(S_g u - S_g v)\|_c + E_{0i} \|u_i - v_i\|_q \|u_i - v_i\|_{0,p}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}&\|B_g u - B_g v\| \\ &\leqq 2^{(p-1)/p} \|u\|_{2,p} H_p{}^q c_1 \{\|u_1 - v_1\|_{p'} + \|u_2 - v_2\|_{p'}\} + E_0 \{\|u_1 - v_1\|_q + \|u_2 - v_2\|_q\} \\ &\leqq 2^{(p-1)/p} H_p{}^q \|u - v\|_{2,p} \{2^{(p-1)/p} c_1 H_p{}^{p'} \|u\|_{2,p} + E_0\}:\end{aligned}$$

Hieraus folgt die lokale Lipschitz-Stetigkeit mit

$$L(B_g, \|u\|_{2,p}) = H_p{}^q\, 2^{(p-1)/p} \{2^{(p-1)/p} c_1 H_p{}^{p'} \|u\|_{2,p} + E_0\}$$

und nach Lemma 2.3 die verstärkte Stetigkeit von B_g ∎

Wir erhalten

Satz 4.7: *Es sei $r = 2$ und das Gebiet G und die Randbedingungen an u_0 genügen* (R). *Außerdem sei $p > 2n/(n + 1)$, für A_1 und A_2 sei* (M) *erfüllt und $N \in L_{p'}(G)$. Dann besitzt* (4.3) *wenigstens eine Lösung u, die Norm der Lösung ist von oben abschätzbar und die Lösungsmenge ist schwach abgeschlossen. Ist zusätzlich für A_1 und A_2 die Bedingung* (gM) *erfüllt, dann ist die Lösungsmenge von* (4.3) *stark bikompakt und der Durchmesser der Lösungsmenge ist von oben abschätzbar.*

Die Regularitätsergebnisse von Lemma 4.5 erlauben es, die Aussagen von Satz 4.3 von $p > n$ für $n = 2, 3$ bzw. $p \geqq 2$ für $n = 1$ auf den Fall $p > 2n/(n + 1)$ zu erweitern.

5. Das inhomogene Problem

In diesem Punkt untersuchen wir zunächst die Gleichungen (1.5)–(1.7) mit den inhomogenen Randbedingungen (1.4) und verallgemeinern dann die Randbedingungen für das elektrostatische Potential, indem wir auf einem Teil des Randes die Erfüllung von Randbedingungen 3. Art fordern.

Zunächst betrachten wir anstelle von (2.2) mit $v = v^3 = [v_0, v_1, v_2] \in W^3$ das allgemeinere Problem: Die Gleichungen (1.5)–(1.7) mit den Lösungen $[v_0, v_1, v_2]$, die den inhomogenen Randbedingungen

$$v_i|_{\partial G_1} = \underline{z}_i \quad \text{und} \quad \vec{J}_i(v^3) \cdot \vec{n}|_{\partial G_2} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2)$$

genügen. ∂G_1 und ∂G_2 sind Teilränder von G mit den Eigenschaften mes $\partial G_1 > 0$, $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$ und $\partial G_1 \cap \partial G_2 = \emptyset$. Wir setzen voraus, daß Elemente $z_0 \in W_r{}^1(G)$ und $z_1, z_2 \in W_p{}^1(G)$ derart existieren, daß $z_i|_{\partial G_1} = \underline{z}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ ist. Wir schreiben $u_i = v_i - z_i$. Dann gilt

$$u_i|_{\partial G_1} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{J}_i(u^3 + z^3) \cdot \vec{n}|_{\partial G_2} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{5.1}$$

Nun können wir das inhomogene Problem auf die in Punkt 4 behandelte homogene Aufgabe zurückführen. Zur Herleitung der entsprechenden Operatorgleichungen setzen wir $v^3 = u^3 + z^3$ in die ursprünglichen Gleichungen (1.5)–(1.7) ein. Danach formen wir diese Gleichungen zu Gleichungen in u^3 um, so daß wir wieder Operatorgleichungen in $W_r(G)$ bzw. $W_p(G)$ erzeugen können. Wir erhalten so zusätzlich zu (5.1):

$$\begin{aligned}&-\mathrm{div}\,\big(D_0(|\mathrm{grad}\,(u_0 + z_0)|)\,\mathrm{grad}\,(u_0 + z_0)\big) = k_0(N + u_2 - u_1) + f_0, \\ &f_0 = k_0(z_2 - z_1),\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$-\operatorname{div}\left(D_1(|\operatorname{grad}(u_1+z_1)|)\operatorname{grad}(u_1+z_1)\right)$$
$$+\operatorname{div}\left((u_1+z_1)\,\mu_1(|\operatorname{grad}(u_0+z_0)|)\operatorname{grad}(u_0+z_0)\right)+k_1R(u+z)=0, \quad (5.3)$$
$$-\operatorname{div}\left(D_2(|\operatorname{grad}(u_2+z_2)|)\operatorname{grad}(u_2+z_2)\right)$$
$$-\operatorname{div}\left((u_2+z_2)\,\mu_2(|\operatorname{grad}(u_0+z_0)|)\operatorname{grad}(u_0+z_0)\right)+k_2R(u+z)=0. \quad (5.4)$$

Wir betrachten (5.2)—(5.4) unter (5.1) wie die Gleichungen (1.5)—(1.7) unter (2.2), (2.3). Es werden wieder Abbildungen auf $W_r(G)$ bzw. $W_p(G)$ erzeugt und deren Eigenschaften nachgewiesen. Dazu setzen wir:

$$I_0{}^G(v,w)=\int_G D_0\left(|\operatorname{grad}(v+z_0)|\right)\operatorname{grad}(v+z_0)\operatorname{grad}w\,dG,\quad v,w\in W_0,$$

$I_1(v,w)$ wie in (3.2),

$$I_3(w)=k_0\int_G(N+z_2-z_1)\,w\,dG,\quad w\in W_0,$$

$$I_i{}^G(v,w)=\int_G D_i\left(|\operatorname{grad}(v+z_i)|\right)\operatorname{grad}(v+z_i)\operatorname{grad}w\,dG,\quad v,w\in W_i$$

$(i=1,2)$,

$$I_i{}^E(v,v_0,w)=(-1)^i\int_G(v+z_i)\,\mu_i\left(|\operatorname{grad}(v_0+z_0)|\right)\operatorname{grad}(v_0+z_0)\operatorname{grad}w\,dG,$$

$v_0\in W_0$ und $v,w\in W_i$ $(i=1,2)$,

$$I_i{}^{\bar F}(v,w)=\int_G\bar R(v+z)\,w\,dG,\quad \bar R(v+z)=\frac{|v_1+z_1|\,|v_2+z_2|}{b\,|v_1+z_1|+c\,|v_2+z_2|+d},$$

$v\in W$ und $w\in W_i$ $(i=1,2)$,

$$I_i{}^{F_0}(v,w)=\int_G R_0(v+z)\,w\,dG,\quad R_0(v+z)=\frac{a^2}{b\,|v_1+z_1|+c\,|v_2+z_2|+d},$$

$v\in W$ und $w\in W_i$ $(i=1,2)$.

Wie in Punkt 3 definieren wir nun die Lösung $u^3=[u_0,u_1,u_2]$ von (5.1)—(5.4) als Lösung der Identitäten ($w^3\in W^3$ beliebig)

$$I_0{}^G(u_0,w_0)+I_1(u,w_0)=I_3(w_0), \quad (5.5)$$
$$I_1{}^G(u_1,w_1)+I_1{}^E(u_1,u_0,w_1)+k_1I_1{}^{\bar F}(u,w_1)=k_1I_1{}^{F_0}(u,w_1), \quad (5.6)$$
$$I_2{}^G(u_2,w_2)+I_2{}^E(u_2,u_0,w_2)+k_2I_2{}^{\bar F}(u,w_2)=k_2I_2{}^{F_0}(u,w_2). \quad (5.7)$$

Den Operator B_0 haben wir schon in Punkt 3 aus $I_1(v,w)$ erzeugt. Wegen ihrer gleichen Struktur untersuchen wir die Integrale $I_i{}^G(v,w)$ $(i=0,1,2)$ gleichzeitig. Es werden die gleichen Bedingungen an D_i wie in Punkt 3 beibehalten. Wir finden

$$|I_i{}^G(v,w)|\leqq\int_G\left|D_i(|\operatorname{grad}(v+z_i)|)\operatorname{grad}(v+z_i)\right|\,|\operatorname{grad}w|\,dG$$
$$\leqq c\,\|v+z_i\|_{1,q}^{\zeta-1}\,\|w\|_{0,q}\leqq c\xi(\|v\|_{0,q}^{\zeta-1}+\|z_i\|_{1,q}^{\zeta-1})\,\|w\|_{0,q}$$

mit

$$q = \begin{cases} r, & i = 0 \\ p, & i = 1, 2, \end{cases} \quad \zeta = \begin{cases} \beta(r), & i = 0 \\ \beta, & i = 1, 2, \end{cases} \quad \xi = \begin{cases} 1, & \zeta \leqq 2 \\ 2^{\zeta-2}, & \zeta > 2. \end{cases}$$

Damit existieren Operatoren $G_i \in (W_i \to W_i^*)$ derart, daß $I_i^G(v, w) = (G_i v, w)_q$ und $\|G_i v\| \leqq c\xi(\|v\|_{0.q}^{\zeta-1} + \|z_i\|_{1.q}^{\zeta-1})$, $v \in W_i$ $(i = 0, 1, 2)$ gilt. Wir untersuchen die G_i auf Koerzitivität und gleichmäßige Monotonie.

Lemma 5.1: *A_i $(i = 0, 1, 2)$ besitze die Eigenschaft* (M) *(die Eigenschaft* (gM)*). Dann besitzen auch G_i und folglich $G = [G_1, G_2]$ die Eigenschaft* (M) *(die Eigenschaft* (gM)).

Beweis: Die Operatoren A_i $(i = 0, 1, 2)$ sind unter den an die z_i formulierten Voraussetzungen auch in $v + z_i$ als Operatoren auf W_i erzeugbar, d. h. $G_i v$ kann auch als $A_i(v + z_i)$ verstanden werden. Damit sind die Aussagen offensichtlich ∎

Wir betrachten $I_3(w)$ auf W_0. Die z_i sind wie die u_i in $W_p^1(G)$ für $i = 1, 2$. Nach Lemma 3.3 existiert unter den gleichen Voraussetzungen an N ein $f \in W_0^*$ derart, daß $I_3(w) = (f, w)_r$ gilt. Wir können folglich sinngemäß die Lemmata 3.4—3.6 und Korollar 3.7 anwenden und erhalten einen verstärkt stetigen Lösungsoperator S_f der Gleichung $G_0 u_0 + B_0 u = f$, die (5.5) äquivalent ist. Aus den algebraischen Abschätzungen für $\bar{R}(v + z)$ und $R_0(v + z)$ folgt sofort die Existenz von verstärkt stetigen Operatoren $F_i \in (W \to W_i^*)$ und $F_{i0} \in (W \to W_i^*)$ mit $(F_i v, w)_p = I_i^{\bar{F}}(v, w)$ und $(F_{i0} v, w)_p = I_i^{F_0}(v, w)$. Gleichermaßen existieren beschränkte stetige Operatoren $E_i \in (W_i \times W_0 \to W_i^*)$ derart, daß $I_i^E(v, v_0, w) = \big(E_i(v, v_0), w\big)_p$ gilt. Das folgende System von Operatorgleichungen:

$$G_0 u_0 + B_0 u = f, \tag{5.8}$$

$$G_1 u_1 + E_1(u_1, u_0) + k_1 F_1 u = k_1 F_{10} u, \tag{5.9}$$

$$G_2 u_2 + E_2(u_2, u_0) + k_2 F_2 u = k_2 F_{20} u \tag{5.10}$$

ist dann (5.5)—(5.7) äquivalent. Wir setzen $G = [G_1, G_2]$, $E_f = [E_1, E_2]$, $F = [k_1 F_1, k_2 F_2]$ und $F_0 = [k_1 F_{10}, k_2 F_{20}]$. Nach Substitution von $u_0 = S_f u$ in (5.9) und (5.10) reduziert sich die Untersuchung der Existenz von Lösungen für (5.8)—(5.10) auf

$$T_f u = o, \quad u \in W, \quad \text{mit } T_f = G + E_f + F - F_0 \in (W \to W^*). \tag{5.11}$$

Satz 5.2: *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.3 *und den zu Beginn dieses Punktes an die Elemente z_i $(i = 0, 1, 2)$ gestellten Bedingungen existiert mindestens eine Lösung von* (5.11). *Genügen die G_i $(i = 0, 1, 2)$ zusätzlich der Bedingung* (gM), *dann ist die Lösungsmenge stark bikompakt und ihr Durchmesser von oben abschätzbar.*

Im folgenden sei das Gebiet G Lipschitz-stetig. Weiter bestehe der Rand ∂G aus den Teilrändern ∂G_i $(i = 1, 2, 3)$ mit $\partial G_i \cap \partial G_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2 \cup \partial G_3$ und mes $\partial G_1 > 0$ bezüglich des Randmaßes. Wir untersuchen das System (1.5)—(1.7) unter den Randbedingungen

$$v_i|_{\partial G_1} = z_i, \quad \vec{n} \cdot \vec{J}_i(v^3)|_{\partial G_2} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{J}_j(v^3)|_{\partial G_3} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2;\ j = 1, 2),$$

$$\left.\left\{\sigma_1(s)\, D_0 \frac{\partial v_0}{\partial \vec{n}} + \|v_0\|_{3.r}^{\beta(r)-r} |v_0|^{r-2}\, v_0\right\}\right|_{\partial G_3} = \sigma_2(s)$$

mit $z_0 \in L_r(\partial G)$ und $z_1, z_2 \in L_p(\partial G)$, σ_1 meßbar und $0 < \sigma \leqq \sigma_1(s) \leqq \sigma_0 < \infty$, $\sigma_2 \in L_t(\partial G)$ und

$$\|v_0\|_{3.r} = \left[\int_{\partial G_3} |v_0|^r \, d\Gamma\right]^{1/r} \quad \text{mit } 1/r + 1/t = 1.$$

Es existiere ein $z^3 = [z_0, z_1, z_2]$ mit $z_0 \in W_r^1(G)$ und $z_1, z_2 \in W_p^1(G)$ derart, daß $z^3|_{\partial G_1} = \bar{z}^3$ und $z_0|_{\partial G_2} = 0$ gilt. Wir setzen $u^3 = v^3 - z^3$ und erhalten (5.2)—(5.4) unter den Randbedingungen

$$u_i|_{\partial G_1} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{J}_i(u^3 + z^3)|_{\partial G_2} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{J}_j(u^3 + z^3)|_{\partial G_2} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2; \ j = 1, 2),$$

$$\left.\left\{\sigma_1(s)\, D_0 \frac{\partial(u_0 + z_0)}{\partial \vec{n}} + \|u_0\|_{3,r}^{\beta(r)-r} |u_0|^{r-2} u_0\right\}\right|_{\partial G_2} = \sigma_2(s).$$

Wir behandeln (5.2)—(5.4) wie zu Beginn dieses Punktes. Dabei erhalten wir (5.6) und (5.7) in der gleichen Form. In (5.5) haben wir auf der linken Seite zusätzlich folgende Integrale zu berücksichtigen:

$$\int_{\partial G_2} \frac{1}{\sigma_1(s)} \|u_0\|_{3,r}^{\beta(r)-r} |u_0|^{r-2} u_0 w_0 \, d\Gamma - \int_{\partial G_2} \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} w_0 \, d\Gamma.$$

Sie erzeugen einen monotonen beschränkten Operator:

$$|(G_0{}^0 u_0, w_0)_r| = \left| \int_{\partial G_2} \frac{1}{\sigma_1(s)} \|u_0\|_{3,r}^{\beta(r)-r} |u_0|^{r-2} u_0 w_0 \, d\Gamma - \int_{\partial G_2} \frac{\sigma_2(s)}{\sigma_1(s)} w_0 \, d\Gamma \right|$$
$$\leqq \frac{c}{\sigma} \|u_0\|_{3,r}^{\beta(r)-1} \|w_0\|_{0,r} + c_1 \|w_0\|_{0,r} \|\sigma_2\|_{3,t},$$

$$(G_0{}^0 u_0 - G_0{}^0 v_0, u_0 - v_0)_r$$
$$= \int_{\partial G_2} \frac{1}{\sigma_1(s)} \left(\|u_0\|_{3,r}^{\beta(r)-r} |u_0|^{r-2} u_0 - \|v_0\|_{3,r}^{\beta(r)-r} |v_0|^{r-2} v_0, u_0 - v_0\right) d\Gamma \geqq 0.$$

Damit haben wir in der Poisson-Gleichung zusätzlich einen monotonen Operator $G_0{}^0$: $G_0{}^0 u_0 + G_0 u_0 + B_0 u = f$. Der Lösungsoperator $S_f{}^0$ dieser Gleichung ist wieder verstärkt stetig. Wir erhalten sofort

Satz 5.3: *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.3 *und den an* σ_1, σ_2 *und* z^3 *gestellten Bedingungen existiert wenigstens eine Lösung des Systems* (5.9), (5.10) *und* $G_0 u_0 + G_0{}^0 u_0 + B_0 u = f$. *Die Lösungsmenge ist schwach abgeschlossen. Genügen* G_1 *und* G_2 *zusätzlich der Bedingung* (gM), *dann ist die Lösungsmenge stark bikompakt und ihr Durchmesser von oben abschätzbar.*

Anhang I: Zur Einbettung von $W_p^1(G)$

Lemma A.1: *Es sei G streng Lipschitz-stetig und $v \in W_p^1(G)$ mit $p > n$. Dann gilt*

$$\|v\|_c \leq c(n, p, G) \, (\text{mes } G)^{-1/p} \left\{\|v\|_p + \frac{p}{p-n} (\text{diam } G) \, \|\text{grad } v\|_{p,n}\right\}. \tag{A.1}$$

Ist dabei G konvex, dann kann $c(n, p, G) = 1$ gesetzt werden.

Beweis: Vgl. [13; S. 78] ∎

Korollar A.2: *In den Voraussetzungen von Lemma* A.1 *kann*

$$K_p{}^c = \alpha' 2^{(p-1)/p} c(n, p, G) \, (\text{mes } G)^{-1/p} \max\left\{1, \frac{p}{p-n} (\text{diam } G)\right\}$$

mit $\alpha' = 1$ für $p \geqq 2$ und $\alpha' = 2^{(2-p)/2p}$ für $p < 2$ gesetzt werden.

Beweis: Wir verwenden die Ungleichung

$$(a^q + b^q)^{1/q} \leqq a + b \leqq 2^{(q-1)/q} (a^q + b^q)^{1/q} \qquad (q \geqq 1; \ a, b \geqq 0). \tag{A.2}$$

In beiden Fällen ist

$$(\|v\|_p^p + \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}^p)^{1/p}\, 2^{(p-1)/p} \geqq \|v\|_p + \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}.$$

Im Falle $p \geqq 2$ gilt (linke Seite der Ungleichung (A.2) mit $q = p/2$)

$$\|v\|_p^p + \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}^p = \int_G \left[(|v|^2)^{p/2} + \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v|^2\right)^{p/2}\right] dG$$

$$\leqq \int_G \left[|v|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v|^2\right]^{p/2} dG$$

und im Fall $p < 2$ (rechte Seite von (A.2) mit $q = 2/p$)

$$\|v\|_p^p + \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}^p \leqq 2^{(2-p)/2} \int_G \left[|v|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v|^2\right]^{p/2} dG \blacksquare$$

Korollar A.3: *Es sei G ein (offener) Quader, dessen Kanten mit den Längen a_i ($i = 1, \ldots, n$) entsprechend auf den positiven Halbachsen des Kartesischen Koordinatensystems ($s_1, \ldots, s_n$) liegen und dessen einer Eckpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Dann gilt für $p > n$ und $v \in W_p{}^1(G)$*

$$\|v\|_c \leqq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{-1/p} \left[\|v\|_p + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \frac{p}{p-n} \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}\right].$$

Beweis: Das Gebiet G ist konvex und damit streng Lipschitz-stetig. Die Aussage folgt dann direkt aus Lemma A.1 mit $c(n, p, G) = 1$ ∎

Lemma A.4: *Das Gebiet G genüge der Kegelbedingung. Dann gilt für $p > n$ und $v \in W_p{}^1(G)$*

$$\|v\|_c \leqq (\mathrm{mes}\, C_x)^{-1/p} \left\{\|v\|_p + \frac{h}{n^{1/p}} \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{(p-1)/p} \|\mathrm{grad}\, v\|_{p,n}\right\}$$

mit der Höhe h des Kegels C_x.

Beweis: Vgl. [1: S. 107/108] ∎

Korollar A.5: *Es sei $n = 1$, $p > 1$ und $G = (0, a)$, $a > 0$. Dann gilt*

$$\|v\|_c \leqq \frac{2^{1/p}}{a^{1/p}} \left[\|v\|_p + \frac{a}{2} \|\mathrm{grad}\, v\|_p\right].$$

(Für $p = 2$ vgl. [3: Anhang].)

Lemma A.6: *Es sei G ein Quader wie in Korollar A.3, $p < n$ ($n = 2, 3$) und $p' = np/(n-p)$. Dann gilt*

$$\|v\|_{p'} \leqq \sqrt{n+1}\, \frac{2^{(p-1)/p}}{(\mathrm{mes}\, G)^{1/n}} \frac{(n-1)\, p}{n-p} \max\,\{2, a_1, \ldots, a_n\}\, \|v\|_{1,p}.$$

Beweis: Er folgt nach Adams [1: S. 103/104] und für $p' = 4$ nach [3: Anhang II] ∎

Anhang II: Zur Einbettung von $\mathring{W}_p{}^1(G)$

Wir suchen Abschätzungen der Art

$$\|v\|_B \leqq H_p{}^{\alpha(B)} \|v\|_{0,p}, \qquad v \in \mathring{W}_p{}^1(G).$$

Lemma A.7 (Poincarésche Ungleichung): *Es sei $K(x_0, \varrho)$ die Kugel im $\mathbf{R}^n$ mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt x_0, und $G \subset K(x_0, \varrho)$. Dann gilt für $v \in \mathring{W}_p{}^1(G)$*

$$\int_G |v|^p\, dG \leqq p^{-1} \varrho^p \int_G |\mathrm{grad}\, v|_n{}^p\, dG. \tag{A.3}$$

Beweis: Vgl. [13: S. 64] ∎

Bemerkung: Für $p = 2$ und $v \in \mathring{W}_2^1(G)$ gilt

$$\|v\|_2 \leqq F_n \|v\|_{0,2}, \qquad F_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\varrho(G \subset K(x_0, \varrho)). \tag{A.4}$$

Lemma A.8: *Für Quader wie in Korollar* A.3 *kann in* (A.4) *gesetzt werden:*

$$F_n = \frac{1}{\pi}\varkappa_n \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{A.5}$$

mit

$$\varkappa_1 = a_1, \qquad \varkappa_2 = \frac{a_1 a_2}{(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}, \qquad \varkappa_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2)^{1/2}}.$$

Beweis: Vgl. [10: S. 38] ∎

Bemerkung: F_n in (A.5) ist der Inverse des ersten Eigenwertes von $-\Delta$ im Gebiet G m Raum $\mathring{W}_2^1(G)$.

Lemma A.9: *Das Gebiet G sei in einem Quader enthalten, dessen Kanten der Länge a_i zu den entsprechenden Koordinatenachsen parallel sind. Dann gilt* (A.5) *für* $v \in \mathring{W}_2^1(G)$.

Beweis: Vgl. [10: S. 298] ∎

Korollar A.10: *In den Voraussetzungen von Lemma* A.1 *gilt für* $G \subseteq K(x_0, \varrho)$ *und* $v \in \mathring{W}_p^1(G)$:

$$\|v\|_c \leq c(n, p, G)\,(\text{mes}\,G)^{-1/p}\,\varrho\left(p^{-1/p} + \frac{2p}{p-n}\right)\|v\|_{0,p}.$$

Für konvexes G ist dabei $c(n, p, G) = 1$.

Beweis: Er folgt unter Benutzung von (A.1) und (A.3) ∎

Korollar A.11: *Es sei* $G = (0, a)$, $a > 0$. *Dann gilt für* $v \in \mathring{W}_2^1(G)$

$$\|v\|_c \leq \sqrt{a}\left(\frac{1}{\pi} + 2\right)\|v\|_{0,2}. \tag{A.6}$$

Korollar A.12: *In den Voraussetzungen von Korollar* A.3 *gilt für* $v \in \mathring{W}_p^1(G)$

$$\|v\|_c \leq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2}}\left[\frac{1}{2p^{1/p}} + \frac{p}{p-n}\right]\|v\|_{0,p}.$$

Korollar A.13: *In den Voraussetzungen von Lemma* A.4 *sei* $G \subset K(x_0, \varrho)$. *Dann gilt für* $v \in \mathring{W}_p^1(G)$

$$\|v\|_c \leqq (\text{mes}\,C_x)^{-1/p}\left[\frac{\varrho}{p^{1/p}} + \frac{h}{n^{1/p}}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{(p-1)/p}\right]\|v\|_{0,p}.$$

Korollar A.14: *Es sei* $a > 0$ *und* $G = (0, a)$. *Dann ist für* $v \in \mathring{W}_2^1(G)$

$$\|v\|_c \leqq \sqrt{2a}\,(1/\pi + 1/2)\,\|v\|_{0,2}. \tag{A.7}$$

Bemerkung: Wir setzen für die Konstante $1/\pi + 2$ in (A.6) $H(M)$ und für $\sqrt{2}\,(1/\pi + 1/2)$ in (A.7) $H(A)$. Dann gilt $H(M) = \sqrt{2}\,H(A) + (\pi - 1)/\pi$.

Die folgenden sogenannten multiplikativen Ungleichungen (A.8) erlauben, im Falle homogener Dirichlet-Bedingungen eine Präzisierung der Konstanten in Differentialungleichungen vorzunehmen.

Lemma A.15: *G genüge der Kegelbedingung. Weiter sei* $n > 1$, $p > 1$ *und* $v \in \mathring{W}_p^1(G)$. *Dann ist*

$$\|v\|_q \leqq \beta \, \|v\|_{0,p}^{\alpha} \, \|v\|_p^{1-\alpha} \tag{A.8}$$

mit $\alpha = (q - p)\, n/pq$. *Dabei gilt:*

1. *Für* $p < n$ *ist* $q \in \left[p, \frac{np}{n-p}\right]$ *und* $\beta = \left[\frac{(n-1)\,p}{n-p}\right]^{\alpha}$, *dabei* $\alpha \in [0, 1]$.

2. *Für* $p \geqq n$ *ist* $q \in [p, +\infty)$ *und* $\beta = \left[\max\left\{\frac{q(n-1)}{n}, p\right\}\right]^{\alpha}$, *dabei* $\alpha \in \left[0, \frac{n}{p}\right)$.

Beweis: Diese Aussagen sind Spezialfälle für den Fall $p = r$ von Ergebnissen, die u. a. in [8: S. 79/80] angegeben werden (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung) ∎

Wir setzen nun die Poincarésche Ungleichung in der Form $\|v\|_p \leqq P_p \, \|v\|_{0,p}$ in (A.8) ein und erhalten $\|v\|_q \leqq \beta (P_p)^{1-\alpha} \, \|v\|_{0,p}$, $n = 2, 3$.

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. New York—London: Academic Press 1975.

[2] Brezis, H.: Équations et inéquations non lineaires dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 115—175.

[3] Bruckner, G., Kluge, R., und S. Unger: Ein System stationärer partieller Differentialgleichungen. Math. Nachr. **123** (1985), 285—321.

[4] Engl, W. L., and H. Dirks: Models of physical parameters. In: An Introduction to the Numerical Analysis of Semiconductor Devices and Integrated Circuits. Lecture Notes of a Short Course held at Trinity College, Dublin from 15th to 16th June, 1981 in association with the NASECODE II Conference (ed.: J. J. H. Miller). Dublin: Boole Press 1981, 42—46.

[5] Kluge, R.: Nichtlineare Variationsungleichungen und Extremalaufgaben. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.

[6] Kluge, R.: Gleichmäßig monotone Potentialoperatoren auf einigen Funktionalräumen. Math. Nachr. **126** (1986), 135—143.

[7] Kufner, A., John, O., and S. Fucik: Function Spaces. Prague: Academia 1977.

[8] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1967.

[9] Lions, J. L.: Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Paris: Dunod et Gauthier-Villars 1969.

[10] Михлин, С. Г.: Курс математической физики. Москва: Изд-во Наука 1968.

[11] Mock, M. S.: On equations describing steady-state carrier distributions in a semiconductor device. Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 781—792.

[12] Mock, M. S.: Analysis of mathematical models of semiconductor devices. Dublin: Boole Press 1983.

[13] Morrey, Ch. B. Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1966.

[14] Seidman, T. I.: Steady-state solutions of diffusion-reaction systems with electrostatic convection. Nonlinear Analysis **4** (1980), 623—637.

[15] Slotboom, J. W.: Analysis of bipolar transistors. Proefschrift. Eindhoven: Technische Hogeschool 1977.

[16] Смирнов, В. И.: Курс высшей математики, т. V. Москва: Госиздат физ.-мат. лит. 1959.

[17] Соболев, С. Л.: Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ия Акад. Наук СССР 1962.
[18] Van Roosbroeck, W.: Theory of the flow of electrons and holes in germanium and other semiconductors. Bell Syst. Tech. J. 29 (1950), 560.

Manuskripteingang: 10. 12. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. Reinhard Kluge und Steffen Unger
Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik
der Akademie der Wissenschaften
DDR-1086 Berlin, Mohrenstr. 39