Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (3) 1986, S. 253–264

Zum Beweis einer Jackson-Typ-Ungleichung mit Hilfe spezieller Kommutatoren

E. WEGERT

Zum Beweis einer Ungleichung vom Jackson-Typ für trigonometrische Polynome in einer Skala gewisser (anisotroper, gewichteter) Sobolev-Räume periodischer Funktionen studieren wir die Kommutatoren von bestimmten Differentialoperatoren und den Operatoren des Approximationsfehlers. Die Resultate sind anwendbar, um Funktionensysteme hoher Approximationsordnung zu konstruieren, welche vorgegebenen Randbedingungen genügen.

Для доказательства одного неравенства типа Джексона для тригонометрических полиномов в шкале некоторых (анизотропных с весом) пространств Соболева периодических функций мы изучаем коммутаторы дифференциальных операторов и операторы, связанные с погрешностями при приближении. Результаты применимы к построению систем функций высокой степени приближения, которые удовлетворяют заданным граничным условиям.

We study the commutators of some differential operators and operators connected with the error of approximation for proving an inequality of Jackson-type for trigonometrical polynomials in a scale of (anisotropic) Sobolev spaces (with weight). The results are applicable to construct systems of functions with high degree approximation satisfying given boundary conditions.

1. Einleitung

I. JU. CHARRIK untersucht in [2] Kommutatoren $AE-EA$, wobei A ein Multiplikationsoperator ist und der Operator E in engem Zusammenhang mit dem Approximationsfehler steht, um eine spezielle Ungleichung vom Jackson-Typ zu beweisen. In der vorliegenden Arbeit verallgemeinern wir diesen Zugang, wobei an die Stelle von A gewisse Differentialoperatoren treten, und leiten auf diese Weise Jackson-Typ-Ungleichungen in einer Skala anisotroper (möglicherweise gewichteter) Sobolevräume her.

Obwohl dem Verfasser die Grenzen der Methode nicht bekannt sind, wird vermutet, daß mit dem vorgelegten Beitrag die Anwendungsmöglichkeiten nicht erschöpft sind. In diesem Zusammenhang ist beispielsweise die folgende Fragestellung von Interesse. Es sei F^k eine Skala von Funktionenräumen (wobei k ein Glattheitsindex ist) und $\mathcal{T}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Teilräumen, für welche in F^k eine Ungleichung vom Jackson-Typ bekannt sei:

$$\inf_{P\in\mathcal{T}_n} \|f - P\|_{F^k} \leqq cn^{k-r} \|f\|_{F^r}, \qquad r > k.$$

Weiterhin sei A ein abgeschlossener Operator in F^k und die Skala $F_A{}^k$ werde durch

$$F_A{}^k = \{f \in F^k : \|f\|_{F_A{}^k} = \|f\|_{F^k} + \|Af\|_{F^k} < \infty\}$$

definiert. Unter welchen Voraussetzungen an A ist das Verfahren geeignet, um Jackson-Typ Ungleichungen für $\mathcal{T}_n$ in $F_A{}^k$ zu zeigen?

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir folgende spezielle Situation. Es seien

$$Q_\pi = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N: \; -\pi < x_i < \pi; \qquad i = 1, \ldots, N\},$$

$\tilde{C}^\infty(Q_\pi) = \tilde{C}^\infty$ der Raum der beliebig oft differenzierbaren, in allen Veränderlichen 2π-periodischen Funktionen und

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \omega_i \in \tilde{C}^\infty, \tag{1}$$

ein gegebener Differentialoperator. Wir bezeichnen mit

$$\tilde{W}_p^k(Q_\pi) = \tilde{W}_p^k \; (1 < p < \infty, k \in \mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z}: \; n \geqq 0\})$$

den Sobolevraum der bezüglich jedes Arguments 2π-periodischen Funktionen und definieren für $m \in \mathbf{Z}_+$

$$\tilde{W}_p^{k,m} = \left\{ f \in \tilde{W}_p^k : \|f\|_{\tilde{W}_p^{k,m}} = \sum_{i=0}^{m} \|\tilde{D}^i f\|_{\tilde{W}_p^k} < \infty \right\}. \tag{2}$$

Es seien ferner $\tilde{F}^s_{p,q}$ $(1 < p, q < \infty; -\infty < s < \infty)$ die Räume periodischer Funktionen vom Triebel-Hardy-Sobolev-Typ (vgl. H. Triebel [8: 9.1.3]). Nach [8: Theorem 9.2.3] gilt $\tilde{W}_p^k = \tilde{F}^k_{p,2}$ $(1 < p < \infty; k = 0, 1, \ldots)$. Zur Abkürzung schreiben wir im weiteren $\tilde{H}_p^s$ anstelle von $\tilde{F}^s_{p,2}$. Im folgenden werden die Interpolationseigenschaft

$$[\tilde{H}_p^{s_1}, \tilde{H}_p^{s_2}]_\theta = \tilde{H}_p^s \tag{3}$$

$$(1 < p < \infty; \; -\infty < s_1, \; s_2 < +\infty; \; s = (1-\theta)\, s_1 + \theta s_2, \; 0 < \theta < 1)$$

(vgl. H.-J. Schmeisser und H. Triebel [7: Chapter 3]) sowie die Identifikation

$$(\tilde{H}_p^s)^* = \tilde{H}_{p'}^{-s} \; (1/p + 1/p' = 1, 1 < p < \infty; -\infty < s < \infty) \tag{4}$$

der bezüglich des $\tilde{L}_2$-Skalarproduktes dualen Räume benötigt. Schließlich seien die Räume $\tilde{H}_p^{s,m} (m \in \mathbf{Z}_+)$ analog zu (2) definiert.

Es sei $\tilde{\mathscr{P}}_n$ der Teilraum der trigonometrischen Polynome maximal n-ten Grades (bezüglich jeder Veränderlichen). Gegenstand dieser Arbeit ist der Nachweis der folgenden Ungleichung vom Jackson-Typ in der Skala $\tilde{H}_p^{s,m}$.

Theorem: *Es seien $m \in \mathbf{Z}_+$, $p, r, s \in \mathbf{R}$ mit $1 < p < \infty$ und $r < s$. Dann existiert eine Konstante $c = c(r, s, p, m)$, so daß gilt*

$$\inf_{P \in \tilde{\mathscr{P}}_n} \|f - P\|_{\tilde{H}_p^{r,m}} \leqq c n^{r-s} \|f\|_{\tilde{H}_p^{s,m}}.$$

Im letzten Abschnitt geben wir eine Anwendung dieses Theorems zum Beweis einer Approximationsaussage für gewisse Funktionensysteme in Teilräumen der Sobolewräume $\tilde{W}_p^k$, welche in bestimmten Fällen die Resultate von W. M. Kolodjašnyj und W. A. Rvačov [4] verschärft.

2. Operatoren vom Jackson-Typ

Zur Definition verallgemeinerter Operatoren vom Jackson-Typ sei

$$\tilde{k}_n^\sigma(t) = c_n \left\{\frac{\sin(\varkappa t/2)}{\sin(t/2)}\right\}^{2\sigma} \left(n, \sigma \in \mathbf{Z}_+;\ \varkappa = \left[\frac{n}{\sigma}\right] + 1\right),$$

wobei c_n durch

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{k}_n^\sigma(t)\, dt = 1$$

festgelegt werde (vgl. S. M. Nikolskij [5: 5.3]). Hierbei sei [a] die größte ganze Zahl, welche a nicht überschreitet. Der Index σ wird künftig weggelassen. Die Funktionen $\tilde{k}_n$ sind aus Kosinusfunktionen gebildete trigonometrische Polynome maximal n-ten Grades. Für $\sigma = 1$; 2 erhält man die Kerne von Fejer bzw. Jackson (vgl. P. J. Davis [3: S. 302ff]; weitere Verallgemeinerungen werden von R. Sakai [6] betrachtet). Schließlich sei

$$k_n(x) = \tilde{k}_n(x_1) \dots \tilde{k}_n(x_N) \quad \text{für} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in Q_\pi.$$

Für approximationstheoretische Anwendungen ist die folgende Eigenschaft von k_n ausschlaggebend.

Lemma 1: *Es seien $m \in \mathbf{Z}_+$ und $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$ mit $0 \leqq m + |\alpha| \leqq 2\sigma - 2$. dann existiert eine Konstante $c = c(m, \alpha) > 0$, so daß gilt*

$$\int_{Q_\pi} |D_x^\alpha k_n(x)|\, |x|^m\, dx \leqq c n^{|\alpha| - m}.$$

(Mit $\mathbf{Z}_+^N$ bezeichnen wir die Menge der N-komponentigen nichtnegativen Multiindizes unter Verwendung der üblichen Konventionen.) Zum Beweis des Lemmas vgl. S. M. Nikolskij [5: 5.3] und J. Ju. Charrik [2: S. 411ff.] ∎

Wir definieren nun für 2π-periodische stetige Funktionen f die Faltungsoperatoren

$$K_n f(x) = \int_{Q_\pi} f(x + y)\, k_n(y)\, dy = \int_{Q_\pi} f(z)\, k_n(x - z)\, dz. \tag{5}$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Young folgt aus Lemma 1, daß K_n auf $\tilde{L}_p (1 < p < \infty)$ fortsetzbar ist, wobei mit einer geeigneten Konstanten $c = c(p)$ gilt

$$\|K_n\|_{\mathscr{L}(\tilde{L}_p)} \leqq c.$$

(Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}(E, F)$ den Raum der linearen stetigen Operatoren von E nach F mit der üblichen Norm und schreiben $\mathscr{L}(E)$ statt $\mathscr{L}(E, E)$.) Wegen $D_x^\alpha K_n = K_n D_x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{Z}_+^N)$ gilt

$$\|K_n\|_{\mathscr{L}(\widetilde{W}_p^k)} \leqq c(p, k).$$

Aus (5) schließt man auf

$$(K_n f, g)_{\tilde{L}_2} = (f, K_n g)_{\tilde{L}_2} \qquad (f, g \in \tilde{L}_2),$$

woraus mit (4) die Fortsetzbarkeit von K_n auf $\widetilde{W}_p^k$ $(k \in \mathbf{Z})$ folgt. Durch Interpolation erhält man schließlich unter Verwendung von (3)

$$K_n \in \mathscr{L}(\tilde{H}_p^s), \qquad \|K_n\|_{\mathscr{L}(\tilde{H}_p^s)} \leqq c(p, s) \qquad (1 < p < \infty, -\infty < s < \infty). \tag{6}$$

Wir folgen P. L. BUTZER und R. J. NESSEL [1: S. 97] und definieren $E_n^0 = I$, $E_n^l = (I - K_n)^l$, $l \in \mathbf{Z}_+$. Aus den Eigenschaften von K_n ist ersichtlich, daß $(I - E_n^l) f$ ein trigonometrisches Polynom maximal n-ten Grades ist. Das folgende Lemma dient der Normabschätzung der Fehleroperatoren E_n^l in der Skala $\tilde{H}_p^s$.

Lemma 2: *Es sei* $\sigma \geqq 2$. *Für beliebige* $l \in \mathbf{Z}_+$ *und* $p, r, s \in \mathbf{R}$ *mit* $1 < p < \infty$, $0 \leqq s - r \leqq l$ *existiert eine von* n *unabhängige Konstante* $c = c(r, s, p, l)$, *so daß gilt*

$$\|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^s, \tilde{H}_p^r)} \leqq c n^{r-s}.$$

Beweis: 1. Für $r = 0 \leqq s \in \mathbf{Z}_+$ vgl. S. M. NIKOLSKIJ [5: Theorem 5.3.2].

2. Es sei $r = 0$ und $s = t + \theta$ ($t \in \mathbf{Z}_+$; $0 < \theta < 1$). Wegen $t + 1 \leqq l$ gilt nach Punkt 1 des Beweises

$$\|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{t+1}, \tilde{H}_p^0)} \leqq c n^{-t-1}, \qquad \|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^t, \tilde{H}_p^0)} \leqq c n^{-t},$$

und die gewünschte Abschätzung folgt aus $[\tilde{H}_p^t, \tilde{H}_n^{t+1}]_\theta = \tilde{H}_p^s$ durch Interpolation:

$$\|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^s, \tilde{H}_p^0)} \leqq c n^{-s}. \tag{7}$$

3. Es gelte $0 \leqq r \leqq s$ und $r = \theta s$ ($0 \leqq \theta \leqq 1$). Mit (6) schließt man auf

$$\|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^s)} \leqq c,$$

woraus in Verbindung mit (7) die Behauptung durch Interpolation folgt.

4. Dualitätsargumente ermöglichen wegen (4) den Beweis im Fall $r \leqq s \leqq 0$, wenn man von

$$(E_n^l f, g)_{\tilde{L}_2} = (f, E_n^l g)_{\tilde{L}_2} \qquad (f, g \in \tilde{L}_2)$$

Gebrauch macht.

5. Für $r < 0 < s$ läßt sich die Behauptung wiederum durch Interpolation aus

$$\|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{s-r}, \tilde{H}_p^0)}, \quad \|E_n^l\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^0, \tilde{H}_p^{r-s})} \leqq c n^{r-s}$$

ableiten ∎

3. Die Operatorenklassen $\mathfrak{T}_l$, $\mathfrak{D}_l$

Zur Beschreibung von Kommutatoren der Operatoren E_n^l und Differentialoperatoren werden in diesem Abschnitt einige Operatorenklassen eingeführt und deren Eigenschaften untersucht.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}_l (l \in \mathbf{Z}_+)$ die Klasse der Differentialoperatoren höchstens l-ter Ordnung mit Koeffizienten aus $\tilde{C}^\infty$.

Es sei weiterhin $\mathfrak{T}_l (l \in \mathbf{Z}_+)$ die Klasse der Operatorfolgen $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, deren Elemente T_n endliche Linearkombinationen der Form

$$T_n = \sum_i a_i T_{n,l_i} (a_i \in \tilde{C}^\infty; l \leqq l_i \in \mathbf{Z}_+)$$

sind, wobei die Operatoren T_{n,l_i} durch

$$T_{n,l_i} f(x) = \int_{Q_\pi} \prod_{j=1}^{l_i} \big(a_{ij}(x + y) - a_{ij}(x)\big) k_n(y) f(x + y) \, dy$$

mit $a_{ij} \in \tilde{C}^\infty$ gegeben seien. Man erkennt unmittelbar die Inklusionen $\mathfrak{T}_{l+1} \subset \mathfrak{T}_l$ ($l \in \mathbf{Z}_+$). Die Definition von $T_{n,l}$, $l = l_i$, kann von $\tilde{L}_2$ wegen

$$(T_{n,l}f, g)_{\tilde{L}_2} = (-1)^l (f, \overline{T_{n,l}\bar{g}})_{\tilde{L}_2} \tag{8}$$

mit Hilfe von (4) auf die Räume $\tilde{H}_p^s$ ($1 < p < \infty$; $-\infty < s < \infty$) übertragen werden. Die Operatoren $T_{n,l}$ sind glättend, wie aus dem folgenden Lemma ersichtlich wird.

Lemma 3: *Es sei $l \in \mathbf{Z}_+$ mit $l \leqq \sigma - 1$ und $\{T_n\} \in \mathfrak{T}_l$. Dann existiert für beliebige $p, r, s \in \mathbf{R}$ mit $1 < p < \infty$ und $0 \leqq s - r \leqq l$ eine von n unabhängige Konstante $c = c(r, s, p, l)$, so daß gilt*

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^r, \tilde{H}_p^s)} \leqq c.$$

Beweis: Aufgrund der Struktur der Operatoren T_n reicht es aus, den Fall

$$T_nf(x) = \int_{Q_\pi} \prod_{j=1}^m \big(a_j(x + y) - a_j(x)\big)\, k_n(y)\, f(x + y)\, dy, \qquad m \geqq l,$$

zu betrachten. Wegen der Einbettungssätze kann man sich auf $s = r + l$ beschränken

1. Es sei $r \in \mathbf{Z}_+$. Für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$ mit $|\alpha| \leqq r$ gilt

$$D_x^\alpha T_nf(x) = \sum_{\gamma \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{Q_\pi} D_x^\gamma \left\{\prod_{j=1}^m \big(a_j(x + y) - a_j(x)\big)\right\} k_n(y)\, D_x^{\alpha-\gamma} f(x + y)\, dy.$$

Führt man die Differentiation des Produktes aus, entstehen Summanden der Gestalt

$$\int_{Q_\pi} \prod_{j=1}^m \big(b_j(x + y) - b_j(x)\big)\, k_n(y)\, D_x^{\alpha-\gamma} f(x + y)\, dy. \tag{9}$$

Nach der Substitution von $z = x + y$ und Anwendung von D_x^β ($\beta \in \mathbf{Z}_+^N$, $|\beta| \leqq l$) erhält man eine Darstellung von $D_x^{\alpha+\beta} T_nf(x)$ als Linearkombination von Termen der Gestalt

$$\int_{Q_\pi} D_x^\delta \left\{\prod_{j=1}^m \big(b_j(z) - b_j(x)\big)\right\} D_x^{\beta-\delta} k_n(x - z)\, D_z^{\alpha-\gamma} f(z)\, dz$$

mit $\gamma \leqq \alpha$, $\delta \leqq \beta$. Wegen $|\delta| + (l - |\delta|) \leqq m$ ist

$$|x - z|^{|\delta|-l} D_x^\delta \left\{\prod_{j=1}^m \big(b_j(z) - b_j(x)\big)\right\}$$

beschränkt, deshalb genügt zur Abschätzung der $\tilde{L}_p$-Norm von $D_x^{\alpha+\beta} T_nf$ die Untersuchung von

$$\Big\| \int_{Q_\pi} |x - z|^{l-|\delta|}\, |D_x^{\beta-\delta} k_n(x - z)\, D_z^{\alpha-\gamma} f(z)|\, dz \Big\|_{\tilde{L}_p}. \tag{10}$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Young wird (10) durch

$$\| |x|^{l-|\delta|}\, |D_x^{\beta-\delta} k_n(x)| \|_{\tilde{L}_1}\, \|D_x^{\alpha-\gamma} f\|_{\tilde{L}_p}$$

abgeschätzt. Aus Lemma 1 folgt wegen $0 \leqq l - |\delta| \leqq 2\sigma - 2 - |\beta - \delta|$.

$$\| |x|^{l-|\delta|}\, |D_x^{\beta-\delta} k_n(x)| \|_{\tilde{L}_1} \leqq cn^{-l+|\delta|+|\beta-\delta|} \leqq c.$$

so daß schließlich für $|\alpha| \leqq r$, $|\beta| \leqq l$ gilt

$$\|D_x^{\alpha+\beta} T_n f\|_{\tilde{L}_p} \leqq c \sum_{\gamma \leqq \alpha} \|D_x^\gamma f\|_{\tilde{L}_p} \leqq c \, \|f\|_{\tilde{H}_p^r}.$$

2. Für $r \in \mathbf{R}$, $r \geqq 0$ erhält man die Behauptung mittels Interpolation aus

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{[r]}, \tilde{H}_p^{[s]})}, \qquad \|T_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{[r]+1}, \tilde{H}_p^{[s]+1})} \leqq c.$$

3. Im Fall $r \leqq r + l = s \leqq 0$ beweist man die Aussage durch Dualitätsargumente unter Verwendung von (3) und (8).

4. Der Beweis des verbleibenden Falles $r < 0 < r + l = s$ erfolgt wiederum durch Interpolation, ausgehend von

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^0, \tilde{H}_p^l)}, \qquad \|T_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{-l}, \tilde{H}_p^0)} \leqq c,$$

mit $\theta = -r/l$ ∎

Wir definieren nunmehr die Klassen $\mathfrak{Q}_l^\tau$ $(l, \tau \in \mathbf{Z}_+)$, deren Elemente jene Operatorenfolgen $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ seien, für welche eine Darstellung in Form endlicher Summen

$$Q_n = \sum_i a_i(x) \, Q_{n,l}^{(i)}, \qquad a_i \in \tilde{C}^\infty(Q_\pi),$$

existiert. Dabei seien die Operatoren $Q_{n,l}^{(i)}$ sämtlich von der Gestalt

$$Q_{n,l} = \prod_{j=1}^m (E_n^{l_j} T_n^{(j)} D^{(j)}) \tag{11}$$

mit

$$\sum_{j=1}^m l_j \geqq l, \tag{12}$$

und es gelte

$$\{T_n^{(j)}\} \in \mathfrak{T}_{r_j}, \qquad D^{(j)} \in \mathfrak{D}_{r_j}, \qquad r_j \leqq \tau.$$

Die Inklusionen

$$\mathfrak{Q}_{l+1}^\tau \subset \mathfrak{Q}_l^\tau \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_l^\tau \subset \mathfrak{Q}_l^{\tau+1} \tag{13}$$

sind evident. Weiterhin erkennt man, daß die Folge der Fehleroperatoren $\{E_n^l\}_{n=1}^\infty$ zur Klasse $\mathfrak{Q}_l^0$ gehört. Das folgende Lemma erweitert die Aussage von Lemma 2 auf die Klassen $\mathfrak{Q}_l^\tau$.

Lemma 4: *Es seien $l, \tau \in \mathbf{Z}_+$ mit $l, \tau \leqq \sigma - 1$ und $\{\mathfrak{Q}_n\} \in \mathfrak{Q}_l^\tau$. Dann existiert für beliebige $p, r, s \in \mathbf{R}$ mit $1 < p < \infty$ und $0 \leqq s - r \leqq l$ eine von n unabhängige Konstante $c = c(r, s, p, l)$, so daß gilt*

$$\|Q_n\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^s, \tilde{H}_p^r)} \leqq c n^{r-s}.$$

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit habe Q_n die Gestalt (11). Aus Lemma 3 folgt wegen $r_j \leqq \tau$

$$\|T_n^{(j)} D^{(j)}\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^t)} \leqq c(p, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ t \in \mathbf{R}),$$

woraus man mit Lemma 2 auf

$$\|E_n^{l_j} T_n^{(j)} D^{(j)}\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}_p^{t_j}, \tilde{H}_p^{t_{j-1}})} \leqq c(p, t_{j-1}, t_j) \, n^{t_{j-1} - t_j} \tag{14}$$

schließt, falls

$$0 \leqq t_j - t_{j-1} \leqq l, \tag{15}$$

ist. Wegen (12) kann eine Folge $r = t_0, t_1, \ldots, t_m = s$ gewählt werden, für welche (15) und mithin (14) gilt. Damit ist Lemma 4 bewiesen ∎

4. Die Kommutatoren $\tilde{D}^j E_n{}^l - E_n{}^l \tilde{D}^j$

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir Überlegungen von I. Ju. Charrik [2] zur Untersuchung von Kommutatoren der Operatoren $E_n{}^l$ mit Multiplikationsoperatoren und geben eine Beschreibung der Kommutatoren $\tilde{D}^j E_n{}^l - E_n{}^l \tilde{D}^j$ (vgl. (1)). Zur Abkürzung vereinbaren wir die Symbolik

$$Q_n{}^{(1)} \equiv Q_n{}^{(2)} \pmod{\mathfrak{Q}_l{}^\tau},$$

welche äquivalent sei zu

$$\{Q_n{}^{(1)} - Q_n{}^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{Q}_l{}^\tau.$$

Lemma 5: *Es gilt* $\tilde{D} E_n \equiv E_n \tilde{D} \pmod{\mathfrak{Q}_0{}^1}$.

Beweis: Man überprüft die Gültigkeit von

$$\tilde{D} K_n = K_n \tilde{D} + \sum_{i=1}^{N} T_n{}^{(i)} D^{(i)}$$

mit

$$T_n{}^{(i)} f(x) = \int_{Q_\pi} \big(\omega_i(x) - \omega_i(x+y)\big) f(x+y)\, k_n(y)\, dy,$$

$$D^{(i)} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Die Behauptung folgt nun aus $\{T_n{}^{(i)}\} \in \mathfrak{T}_1$, $D^{(i)} \in \mathfrak{D}_1$ und $E_n = I - K_n$ ∎

Lemma 6: *Es sei* $1 \leqq l \in \mathbf{Z}_+$. Dann gilt

$$\tilde{D} E_n{}^l \equiv E_n{}^l \tilde{D} \qquad \pmod{\mathfrak{Q}_{l-1}^1}.$$

Beweis: Für $l = 1$ ist die Behauptung bereits bewiesen. Im Sinne eines Induktionsbeweises gilt

$$\tilde{D} E_n{}^{l+1} = \tilde{D} E_n{}^l E_n = E_n{}^l \tilde{D} E_n + Q_n{}^{(l-1)} E_n = E_n{}^{l+1} \tilde{D} + E_n{}^l Q_n{}^{(0)} + Q_n{}^{(l-1)} E_n$$

mit $\{Q_n{}^{(0)}\} \in \mathfrak{Q}_0{}^1$, $\{Q_n{}^{(l-1)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-1}^1$. Nach Definition der Klassen $\mathfrak{Q}_l{}^\tau$ gehören deshalb die Operatorfolgen $\{E_n{}^l Q_n{}^{(0)}\}$ und $\{Q_n{}^{(l-1)} E_n\}$ zu $\mathfrak{Q}_l{}^1$. Mithin gilt $\tilde{D} E_n{}^{l+1} \equiv E_n{}^{l+1} \tilde{D}$ $\pmod{\mathfrak{Q}_l{}^1}$ ∎

Lemma 7: *Für* $\{Q_n\} \in \mathfrak{Q}_l{}^\tau$ *mit* $l, \tau \in \mathbf{Z}_+$, $l \geqq 1$, *gilt* $\tilde{D} Q_n \equiv Q_n \tilde{D} \pmod{\mathfrak{Q}_{l-1}^{\tau+1}}$.

Beweis: Berücksichtigt man die Struktur der Klassen $\mathfrak{Q}_l{}^\tau$ und beachtet, daß der Kommutator von $\tilde{D}$ mit einem Multiplikationsoperator wiederum ein Multiplikationsoperator ist, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Q_n durch (11) gegeben sei. Wir betrachten explizit die Situation $m = 1$, d. h. es sei

$$Q_n = E_n{}^q T_n D, \quad q \geqq l, \quad \{T_n\} \in \mathfrak{T}_r, \quad D \in \mathfrak{D}_r, \quad 1 \leqq r \leqq \tau$$

(für $r = 0$ vgl. Lemma 6). Der Beweis kann im allgemeinen Fall $m > 1$ durch wiederholte Anwendung der folgenden Überlegungen geführt werden. Nach Lemma 6 gilt

$$\tilde{D}E_n{}^q T_n D = E_n{}^q \tilde{D} T_n D + \tilde{Q}_n T_n D$$

mit

$$\{\tilde{Q}_n\} \in \mathfrak{Q}_{q-1}^1 \subset \mathfrak{Q}_{l-1}^{r+1},$$

d. h.

$$\{\tilde{Q}_n T_n D\} \in \mathfrak{Q}_{l-1}^{r+1}.$$

Hieraus folgt

$$\tilde{D}E_n{}^q T_n D \equiv E_n{}^q \tilde{D} T_n D \pmod{\mathfrak{Q}_{l-1}^{r+1}}. \tag{16}$$

Zur Untersuchung des Kommutators von $\tilde{D}$ und T_n sei

$$T_n f(x) = a(x) \int_{Q_\pi} \prod_{i=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right) k_n(y)\, f(x+y)\, dy \qquad (m \geqq r).$$

Wir argumentieren wie zu Beginn des Beweises, um uns auf $a(x) \equiv 1$ beschränken zu können. Aus (1) folgt nunmehr

$$\begin{aligned} \tilde{D}T_n f(x) &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{Q_\pi} \prod_{j=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right) k_n(y)\, f(x+y)\, dy \\ &= \int_{Q_\pi} \left\{\prod_{j=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right)\right\} k_n(y) \left\{\sum_{i=1}^{N} \omega_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y)\right\} dy + T_n{}^{(0)} f(x), \end{aligned} \tag{17}$$

wobei

$$T_n{}^{(0)} f(x) = \sum_{i=1}^{N} \left\{\omega_i(x) \int_{Q_\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{j=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right)\right\} k_n(y)\, f(x+y)\, dy\right\},$$

somit

$$\{T_n{}^{(0)}\} \in \mathfrak{T}_r \subset \mathfrak{T}_1 \tag{18}$$

ist. Das letzte Integral in (17) läßt sich in der Form

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\pi} \left\{\prod_{j=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right)\right\} k_n(y) \left\{\sum_{i=1}^{N} \omega_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y)\right\} dy \\ &= \sum_{i=1}^{N} T_n{}^{(i)} D^{(i)} f(x) + T_n \tilde{D} f(x) \end{aligned} \tag{19}$$

darstellen, wobei

$$\begin{aligned} T_n{}^{(i)} f(x) &= -\int_{Q_\pi} \left\{\prod_{j=1}^{m} \left(a_j(x+y) - a_j(x)\right)\right\} \left(\omega_i(x+y) - \omega_i(x)\right) \\ &\qquad \times k_n(y)\, f(x+y)\, dy, \\ D^{(i)} f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

somit

$$\{T_n^{(i)}\} \in \mathfrak{T}_{m+1} \subset \mathfrak{T}_{r+1}, \quad D^{(i)} \in \mathfrak{D}_1 \tag{20}$$

ist. Aus (17) und (19) erhält man

$$\tilde{D}T_nD - T_n\tilde{D}D = T_n^{(0)}D + \sum_{i=1}^{N} T_n^{(i)}D^{(i)}D,$$

mithin folgt aus (18) und (20) unter Berücksichtigung von $D^{(i)}D \in \mathfrak{D}_{r+1}$, daß $\tilde{D}T_nD \equiv T_n\tilde{D}D \pmod{\mathfrak{Q}_0^{\tau+1}}$, d. h.

$$E_n^q\tilde{D}T_nD \equiv E_n^qT_n\tilde{D}D \pmod{\mathfrak{Q}_l^{\tau+1}} \tag{21}$$

ist. Wegen $\tilde{D}D - D\tilde{D} \in \mathfrak{D}_r$ ist ferner $T_n\tilde{D}D \equiv T_nD\tilde{D} \pmod{\mathfrak{Q}_0^{\tau}}$, d. h.

$$E_n^qT_n\tilde{D}D \equiv E_n^qT_nD\tilde{D} \pmod{\mathfrak{Q}_l^{\tau}}. \tag{22}$$

Schließlich folgt aus (16), (21), (22) sowie (13) $\tilde{D}Q_n = \tilde{D}E_n^qT_nD \equiv E_n^q\tilde{D}T_nD \equiv E_n^qT_n\tilde{D}D \equiv E_n^qT_nD\tilde{D} = Q_n\tilde{D} \pmod{\mathfrak{Q}_{l-1}^{\tau+1}}$ ∎

Lemma 8: *Es seien $l, \tau \in \mathbf{Z}_+$ und $\{Q_n\} \in \mathfrak{Q}_l^{\tau}$. Dann existieren für alle $j \in \mathbf{Z}_+$ mit $1 \leqq j \leqq l$ Operatorfolgen*

$$\{Q_n^{(l-i)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-i}^{\tau+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, j),$$

so daß gilt

$$\tilde{D}^jQ_n - Q_n\tilde{D}^j = \sum_{i=1}^{j} Q_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i}.$$

Beweis: Für $j = 1$ fällt die Aussage mit Lemma 7 zusammen. Wir setzen die Richtigkeit der Behauptung für $j - 1$ voraus und schließen wie folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{D}^jQ_n &= \tilde{D}\tilde{D}^{j-1}Q_n = \tilde{D}\sum_{i=1}^{j-1} \hat{Q}_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i-1} + \tilde{D}Q_n\tilde{D}^{j-1}\\ &= \sum_{i=1}^{j-1} (\hat{\hat{Q}}_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i-1} + \hat{Q}_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i}) + \hat{\hat{Q}}_n^{(l)}\tilde{D}^{j-1} + Q_n\tilde{D}^j\\ &= \sum_{i=1}^{i} Q_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i} + Q_n\tilde{D}^j\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}&\{\hat{Q}_n^{(l-i)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-i}^{\tau+i}, && i = 1, 2, \ldots, j-1,\\ &\{\hat{\hat{Q}}_n^{(l-i)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-i-1}^{\tau+i+1}, && i = 0, 1, \ldots, j-1,\\ &\{Q_n^{(l-i)}\} = \{\hat{Q}_n^{(l-i)} + \hat{\hat{Q}}_n^{(l-i+1)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-i}^{\tau+i}, && i = 1, 2, \ldots, j-1,\\ &\{Q_n^{(l-j)}\} = \{\hat{\hat{Q}}_n^{(l-j+1)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-j}^{\tau+j}.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist Lemma 8 bewiesen ∎

Folgerung: *Setzt man $Q_n = E_n^l$, erhält man eine Darstellung für den Kommutator von E_n^l und $\tilde{D}^j$:*

$$\tilde{D}^jE_n^l - E_n^l\tilde{D}^j = \sum_{i=1}^{j} Q_n^{(l-i)}\tilde{D}^{j-i}, \qquad \{Q_n^{(l-i)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-i}^{i}. \tag{23}$$

5. Beweis des Theorems

Wir nutzen die Formel (23) zum Beweis des Theorems, indem wir σ und $l \in \mathbf{Z}_+$ so wählen, daß gilt $\sigma - 1 \geqq l \geqq s - r + m$ (zur Bedeutung von σ vgl. Abschnitt 2). Aus der Folgerung zu Lemma 8 erhalten wir in Verbindung mit Lemma 4 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|E_n{}^l\|_{\mathfrak{L}(\tilde{H}_p{}^{s,m},\tilde{H}_p{}^{r,m})} &= \sum_{j=0}^{m} \|\tilde{D}^j E_n{}^l\|_{\mathfrak{L}(\tilde{H}_p{}^{s,m},\tilde{H}_p{}^r)} \\ &\leqq \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{j} \|Q_n{}^{(i,j)}\tilde{D}^i\|_{\mathfrak{L}(\tilde{H}_p{}^{s,m},\tilde{H}_p{}^r)} \\ &\leqq c \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{j} \|Q_n{}^{(i,j)}\|_{\mathfrak{L}(\tilde{H}_p{}^s,\tilde{H}_p{}^r)} \leqq cn^{r-s}, \end{aligned}$$

wobei $\{Q_n{}^{(i,j)}\} \in \mathfrak{Q}_{l-m}^m$ ist. Die Behauptung folgt nunmehr aus

$$\inf_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_n} \|f - P\|_{\tilde{H}_p{}^{r,m}} \leqq \|E_n{}^l f\|_{\tilde{H}_p{}^{r,m}}.$$

6. Jackson-Typ-Ungleichungen in Teilräumen von $W_p{}^k(\Omega)$

Es gibt seit längerer Zeit Bestrebungen, Systeme von Funktionen zu konstruieren, welche auf einem Teilgebiet Ω des $\mathbf{R}^N$ definiert sind und gewisse Randbedingungen erfüllen. Zusätzlich ist es wünschenswert, daß diese Funktionensysteme „gute" Approximationseigenschaften besitzen; denken wir beispielsweise an den Einsatz in verschiedenen Näherungsverfahren. Wir setzen voraus, daß das Gebiet Ω beschränkt und unendlich glatt ist. Dann existiert eine im Inneren von Ω positive Funktion ω der Klasse $C^\infty(\bar{\Omega})$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet und dort einen von Null verschiedenen Gradienten besitzt.

Von mehreren Autoren wird vorgeschlagen, im Falle der einfachen Randbedingung

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} = 0$$

(wir bezeichnen mit γ_i, $i \in \mathbf{Z}_+$, die Normalenableitungen i-ter Ordnung im Sinne der Spuren) Funktionensysteme der Form

$$\{\omega P_\alpha\}$$

zu verwenden, wobei $\{P_\alpha\}$ eine Basis im Teilraum der Polynome maximal n-ten Grades bildet (z. B. $P_\alpha = x^\alpha = x_1{}^{\alpha_1} x_2{}^{\alpha_2} \dots x_N{}^{\alpha_N}$). Aussagen über die Approximationsgenauigkeit derartiger Systeme werden erstmals von I. JU. CHARRIK [2] bewiesen. Dieser Autor betrachtet Funktionen

$$\omega^{m+1}(x)\, x^\alpha \qquad (m \in \mathbf{Z}_+),$$

welche das System der Randbedingungen

$$\gamma_i u = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, m,$$

erfüllen und zeigt die Gültigkeit einer Ungleichung vom Jackson-Typ in der Skala $C^k(\bar{\Omega})$.

Allgemeinere Randbedingungen werden von W. M. KOLODJAŠNYJ und W. A. RVAČOV [4] untersucht. Sie konstruieren zu Randbedingungen der Art

$$Bu = \gamma_m u + \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha(x)\, \gamma_0 D_x^\alpha u = 0$$

einen Differentialoperator L der Ordnung m, dessen Bild (für glatte Funktionen) im Kern von B enthalten ist. Die Autoren geben eine Abschätzung der Approximationsgenauigkeit von Systemen der Struktur

$$\{Lx^\alpha\}_{|\alpha| \leq n} \cup \{\omega^{m+1} x^\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$$

an, deren Ordnung jedoch um m geringer ist, als für eine entsprechende Ungleichung vom Jackson-Typ.

WEGERT [9] zeigt, daß für Randbedingungen der Form

$$Bu = \gamma_m u + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(x)\, \gamma_i u = 0$$

(tatsächlich sogar für eine umfassendere Klasse von Randbedingungen) ein Differentialoperator L der Gestalt

$$Lu = \omega(x) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\, u(x)$$

existiert, für den $BLu = 0$ gilt. Betrachtet man eine gewisse innere Umgebung Ω_δ des Randes $\partial\Omega$ und definiert

$$W_p^{k,1}(\Omega_\delta) = \{f \in W_p^k(\Omega_\delta) : \|f\|_{W_p^{k,1}(\Omega_\delta)} = \|f\|_{W_p^k(\Omega_\delta)} + \|Df\|_{W_p^k(\Omega_\delta)} < \infty\}$$

mit

$$Df = \sum_{i=1}^{N} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so ist $L \in \mathcal{L}(W_p^{k,1}(\Omega_\delta), W_p^k(\Omega_\delta))$ rechtsinvertierbar auf $W_p^k(\Omega_\delta) \cap \ker B$. Bettet man Ω_δ in Q_π ein, kann mit Hilfe spezieller Fortsetzungstechniken und unter Verwendung eines zu L rechtsinversen Operators R gezeigt werden, daß die Approximationseigenschaften für die Teilräume $\tilde{\mathcal{P}}_n = L\tilde{\mathcal{P}}_n$ in der Skala $W_p^k(\Omega_\delta) \cap \ker B$ (bis auf Konstanten) die gleichen sind, wie für $\tilde{\mathcal{P}}_n$ in $\tilde{W}_p^{k,1}(Q_\pi)$. Aus dem Theorem des Abschnittes 1 folgt die Jackson-Typ-Ungleichung

$$\inf_{P \in \tilde{\mathcal{S}}_n} \|f - P\|_{W_p^k(\Omega_\delta)} \leq cn^{k-r} \|f\|_{W_p^r(\Omega_\delta)}$$

(für alle $f \in \ker B$; $r > k > m + \frac{1}{p}$).

Mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation läßt sich diese Aussage auch auf die Teilräume $\mathcal{S}_n = \operatorname{lin} \{Lx^\alpha\}_{|\alpha| \leq n}$ übertragen. Betrachtet man die Teilräume

$$\mathcal{R}_n \doteq \mathcal{S}_n \oplus \operatorname{lin} \{\omega^{m+1} x^\alpha\}_{|\alpha| \leq n},$$

so läßt sich nunmehr leicht nachweisen, daß für diese die obige Ungleichung auf dem gesamten Gebiet gilt:

$$\inf_{P \in \mathcal{R}_n} \|f - P\|_{W_p^k(\Omega)} \leq cn^{k-r} \|f\|_{W_p^r(\Omega)}$$

(für alle $f \in \ker B$; $r > k > m + \frac{1}{p}$).

LITERATUR

[1] BUTZER, P. L., und R. J. NESSEL: Fourier analysis and approximation. Vol. 1. Basel—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1971.
[2] ХАРРИК, И. Ю.: О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида. Сиб. мат. ж. 4 (1963), 408—425.
[3] DAVIS, P. J.: Interpolation and approximation. Massachusets—Toronto—London: Blaisdell Publ. Comp. 1963.
[4] Колодяжный, В. М., и В. А. Рвачев: О приближении в равномерной метрике функций, удовлетворяющих граничному условию, функциями специального вида. Докл. Акад. Наук СССР 222 (1975), 1276—1278.
[5] Никольский, С. М.: Приближение функций многих переменых и теоремы вложения (изд-не 2-ое). Москва: Изд-во Наука 1977.
[6] SAKAI, R.: Saturation and inverse theorems for certain operators in C or L_p, $1 < p < \infty$. J. approx. theory 41 (1984), 3, 185—200.
[7] SCHMEISSER, H.-J., and H. TRIEBEL: Topics in Fourier analysis and function spaces. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (im Druck).
[8] TRIEBEL, H.: Theory of function spaces. Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G. 1983.
[9] WEGERT, E.: Über eine Anwendung ausgearteter Differentialoperatoren in der konstruktiven Approximationstheorie. Diss. A. Karl-Marx-Stadt: Technische Hochschule 1984.

Manuskripteingang: 06. 09. 1984

VERFASSER:

Dr. ELIAS WEGERT
Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg
DDR-9200 Freiberg, Bernhard-v.-Cotta-Str. 2