Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (4) 1986, S. 291–306

Принцип максимума в задачах оптимального управления для эллиптического уравнения

У. Е. Райтум

Es werden Aufgaben der optimalen Steuerung unter Zustandsgleichungen in Gestalt quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen 2ter Ordnung vom Divergenztyp betrachtet mit Integralrestriktionen vom Gleichungs- und Ungleichungstyp. Das Hauptaugenmerk ist auf die Fälle nichtkonvexer Steuerbereiche gerichtet, wenn alle Koeffizienten der Zustandsgleichung von den Steuerfunktionen abhängen. Es werden notwendige Optimalitätsbedingungen in Gestalt eines Maximumprinzips in integrierter Form hergeleitet unter Voraussetzungen analog zu jenen, unter denen auch das linearisierte Maximumprinzip im Falle konvexer Steuerbereiche gültig ist.

Рассматриваются задачи оптимального управления объектами, описываемые квазилинейным эллиптическим уравнением второго порядка дивергентного вида, при наличии дополнительных органичений в виде равенств и неравенств для интегральных функционалов. Основное внимание уделяется случаям невыпуклых множеств допустимых управлений, когда от управлений зависят все коэффициенты уравнения. Показано, что необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума выполняются при условиях, аналогичных тем, которые обеспечивают выполнение линеаризованного принципа максимума в случае выпуклых множеств допустимых управлений.

Problems of optimal control are considered under state equations in the form of quasilinear second-order elliptic differential equations of divergence type, with equations and inequalities as integral constraints. The main stress is on those cases with non-convex sets of admissible controls where all coefficients of the state equation depend on the controls. A maximum principle in integrated form, embodying necessary conditions for optimality, is derived under assumptions analogous to those under which the linearized maximum principle holds in the case of convex sets of admissible controls.

Принцип максимума Л. С. Понтрягина и различные его аналоги являются основной формой необходимых условий оптимальности как в задачах с сосредоточенными параметрами, так и в задачах с распределенными параметрами. Принцип максимума является естественным в задачах с обычно рассматриваемыми множествами Σ допустимых управлений σ-измеримых векторфункций, принимающих значения из заданного множества M. Если множество Σ выпукло, то во многих случаях, потребовав соответствующую гладкость операторов и функционалов, на основе теорем о неявной функции можно получить необходимые условия оптимальности в виде линеаризованного принципа максимума.

Подобный подход был использован в работах T. Zolezzi [19], M. Goebel [16], И. К. Гогодзе [2] и У. Е. Райтума [9] для систем, описываемых линейным эллиптическим уравнением. На близких принципах основаны и схемы В. И. Плотникова [6] и В. А. Якубовича [14] для общих систем с распределенными параметрами. Наиболее полно свойство выпуклости (уже множества допустимых операторов) использовано в работе P. Michel [17], где в случае уравнений со слабыми нелинейностями и поточечными ограничениями получен принцип максимума.

Ситуация резко меняется, когда множество Σ допустимых управлений невыпукло. Обычно это вызвано невыпуклостью множества M допустимых значений управлений, например, множество M содержит конечное число точек. Здесь уже единственной естественной мерой близости двух управлений σ^1 и σ^2 является мера (Лебегова) множества аргументов, для которых σ^1 и σ^2 принимают различные значения.

Задачи с невыпуклыми множествами Σ и почти линейными уравнениями в случаях, когда от управлений зависят только младшие члены уравнений, хорошо поддаются исследованию методом В. И. Плотникова и В. И. Сумина [7] (см. также работу С. А. Серовайского [13]). Если же от управлений зависят старшие коэффициенты уравнения, то этот метод уже не действует. Первые глубокие исследований ситуаций, где от управлений зависят старшие коэффициенты уравнений, были проведены К. А. Лурье [5]. Он установил также существенную роль, которую играет форма области варьирования управления — явление, не имеющее аналога в задачах с сосредоточенными параметрами. Наконец, в работе У. Е. Райтума [10, 11] было установлено, что если эллиптическое уравнение и интегрант минимизируемого функционала нелинейны относительно первых производных функции состояния системы и старшие коэффициенты уравнения зависят от управлений, то главная часть приращения функционала при игольчатых вариациях содержит дополнительные слагаемые, по своему характеру близкие к второй вариации. Кроме того, в этой же работе приведен пример задачи с одним пространственным переменным, где оптимальное управление не удовлетворяет принципу максимума, и указано, что справедливость необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума тесно связана с возможностью расширения исходной задачи путем перехода к выпуклой оболочке множества допустимых операторов.

Отметим еще, что в задачах с квазилинейными уравнениями

$$-\frac{d}{dx_i}\, a_i(x, z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}) + a_0(x, z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}) = 0,$$

если рость функций a_i по $z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}$ отличается от линейного, не применимы методы, базирующиеся на теореме о неявной функции или на разложении по малому параметру

$$\varepsilon = \operatorname{mes}\,\{x \in \mathbf{R}^n : \sigma^1(x) \neq \sigma^2(x)\}$$

при игольчатых вариациях. Это вызвано тем, что при отличном от линейного роста функций a_i, соответствующий уравнению оператор, вообще говоря, недифференцируем по Гато или необратима соответствующая производная. Трудности же привлечения указанного малого параметра обусловлены тем, что главные части приращения функционалов будут иметь порядок ε, а главные части приращения решений уравнений могут иметь норму порядка ε^α, где $0 < \alpha < 1/2$.

В настоящей работе рассмотрен случай одного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида с линейным ростом старших коэффициентов при наличии дополнительных ограничений в виде равенств или неравенств для интегральных функционалов. Показано, что в таких задачах имеет место принцип максимума при условиях, близких к условиям, обеспечивающим справедливость линеаризованного принципа максимума в задачах с выпуклым множеством допустимых управлений. Приводимое доказательство основывается на идее расширения исходной задачи путем перехода к выпуклым множествам допустимых операторов с сохранением нижней грани функционала качества. Тогда сохраняется оптимальное управление и необходимое условие оптимальности в расширенной задаче переносится на исходную задачу. Близкая идея (основанная на G-сходимости) была применена в одной работе L. Tartar [18].

Изложение в работе ведется в терминах вариационных равенств (интегральных соотношений) или абстрактных операторных уравнений. Обозначения и свойства рассматриваемых в дальнейшем основных функциональных пространств, а также ряд других терминов берутся из книги О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [4].

§ 1. Постановка задачи

Пусть в n-мерном ($n \geqq 2$) евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с элементами $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ задана ограниченная строго Липшицева область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$, где $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$ и Γ является открытым (в $\partial\Omega$) множеством с $\operatorname{mes}(\bar{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0$ (mes — соответствующая мера Лебега). Заданы число $r > n$ и пространства

$$\mathsf{L}(r) \equiv L_{\frac{2r}{r-2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n\times} \times L_{\frac{2(r-1)}{r-2}}(\Gamma),$$

$$\mathsf{L}^*(r) \equiv L_{\frac{2r}{r+2}}(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \cdots \times L_2(\Omega)}_{n\times} \times L_{\frac{2(r-1)}{r}}(\Gamma)$$

с элементами $g \equiv (g_0, \ldots, g_{n+1}) \in \mathsf{L}(r)$, $f \equiv (f_0, \ldots, f_{n+1}) \in \mathsf{L}^*(r)$, соответствующими естественными нормами декартовых произведений $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^*$ и билинейной формой

$$\langle\langle g, f\rangle\rangle \equiv \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} g_i f_i \, dx + \int_{\Gamma} g_{n+1} f_{n+1} \, d\Gamma.$$

В $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$ определены подпространства $W \subset \mathsf{L}(r)$ и $W' \subset \mathsf{L}^*(r)$ как совокупность всех тех элементов $g \in \mathsf{L}(r)$ и $f \in \mathsf{L}^*(r)$, которые имеют представления

$$g, f = (z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}, z), \qquad z \in W_2^1(\Omega), \quad z|_{\Gamma_0} = 0. \tag{1.1}$$

В силу теорем вложения W и W' в самом деле являются замкнутыми линейными подпространствами. Элементы из W будут обозначаться через u, v, w. Из теорем вложения, замкнутости и рефлексивности W и W' (пространства $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$ рефлексивны) следует также, что существуют линейные ограниченные операторы проектирования [3] $P: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}(r)$ и $P': \mathsf{L}^*(r) \to \mathsf{L}^*(r)$, задаваемые соотношениями

$$\langle\langle Pg - g, v\rangle\rangle = 0 \quad (v \in W) \quad \text{и} \quad \langle\langle P'f - f, v\rangle\rangle = 0 \quad (v \in W) \tag{1.2}$$

для произвольных $g \in \mathsf{L}(r)$ и $f \in \mathsf{L}^*(r)$.

Для операторов $A: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ через $LA(g)$ будет обозначаться *производная Гато* оператора A на элементе g (если она существует). Аналогично через $LJ(g)$ будет обозначаться производная Гато функционала $J: \mathsf{L}(r) \to \mathbf{R}$. Если оператор A (или функционал J) зависит от параметра, σ, то соответствующая запись будет $LA(\sigma, g)$ (аналогично $LJ(\sigma, g)$).

Слабая сходимость в $\mathsf{L}(r)$, $\mathsf{L}^*(r)$ или Лебеговых пространствах будет обозначаться через $\rightharpoonup$.

Определение: Последовательность операторов $A_k: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ ($k = 1, 2, \ldots$) *сходится* к оператору $A_0: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$, когда $\|A_k g - A_0 g\|^* \to 0$ для каждого $g \in \mathsf{L}(r)$.

Определение: Оператор $A: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{A}(r)$, когда он имеет для $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$ и $g \in \mathsf{L}(r)$ представление

$$(Ag)(x, x') = \big(a_0(x, g_0(x), \ldots, g_n(x)), \ldots, a_n(x, g_0(x), \ldots, g_n(x)), \varkappa(x', g_{n+1}(x'))\big) \tag{1.3}$$

при помощи некоторого набора функций $\{a_0, \ldots, a_n, \varkappa\}$,

$$a_i = a_i(x, y) \quad \text{для} \quad x \in \Omega \quad \text{и} \quad y \equiv (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1},$$

$$\varkappa = \varkappa(x', t) \quad \text{для} \quad x' \in \Gamma \quad \text{и} \quad t \in \mathbf{R},$$

удовлетворяющих условию Каратеодори (каждому $A \in \mathfrak{A}(r)$ соответствует свой набор функций).

Определение: Оператор $A \in \mathfrak{A}(r)$ *принадлежит классу* $D\mathfrak{A}(r)$, когда для каждого $f \in \mathsf{L}^*(r)$ вариационное равенство

$$\langle\langle Au - f; v\rangle\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in W \tag{1.4}$$

однозначно разрешимо относительно $u \in W$. Соответствующая неявная функция (зависимость решения u от f) обозначается через DA, $DA: \mathsf{L}^*(r) \to W$.

Из определения оператора проектирования следует, что вариационное равенство (1.4) эквивалентно уравнению

$$P'Au - P'f = 0. \tag{1.5}$$

В дальнейшем часто будет использована именно запись в виде уравнения (1.5). Здесь можно отметить, что многие краевые задачи для эллиптических уравнений дивергентного вида естественным образом записываются в виде вариационного равенства (1.4).

Определение: Для заданного множества $\mathfrak{A}$ операторов $A: \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ *выпуклой замкнутой оболочкой* $\overline{\text{co}}\,\mathfrak{A}$ называется множество всех операторов B: $\mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ таких, что существует последовательность выпуклых комбинаций операторов из $\mathfrak{A}$, которая сходится к оператору B.

Лемма 1.1: *Пусть* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(r)$ *и для каждого* $g^0 \in \mathsf{L}(r)$ *существует непрерывная функция* $\gamma(g^0; \cdot)$, $\gamma(g^0; 0) = 0$, *такая, что справедлива оценка*

$$\|Ag - Ag^0\|^* \leqq \gamma(g^0; \|g - g^0\|) \qquad \big(A \in \mathfrak{A}, g \in \mathsf{L}(r)\big). \tag{1.6}$$

Тогда также $\overline{\text{co}}\,\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(r)$ *и для любого* $B \in \overline{\text{co}}\,\mathfrak{A}$ *выполняется оценка* (1.6).

Доказательство: Пусть $B \in \overline{\text{co}}\,\mathfrak{A}$. Очевидно, что B является локальным оператором и что для него выполняется оценка (1.6). Кроме того, компоненты $(Bg)_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ зависят только от $g_0, \ldots, g_n$, а компонента $(Bg)_{n+1}$ — только от g_{n+1}. Теперь, после естественных изменений (показатели $2r/(r-2)$ и 2 не равны), требуемый результат вытекает из [15] (см. также [12]) ∎

Определим еще вспомогательные множества

$$U_0 \equiv \{\alpha \in L_2(\Omega): \alpha(x) = 0 \ \text{или} \ \alpha(x) = 1, x \in \Omega\},$$

$$U \equiv \{\alpha \in L_2(\Omega): 0 \leqq \alpha(x) \leqq 1, \ x \in \Omega\},$$

$$V_0 \equiv \{\beta \in L_2(\Gamma): \beta(x') = 0 \ \text{или} \ \beta(x') = 1, x' \in \Gamma\},$$

$$V \equiv \{\beta \in L_2(\Gamma): 0 \leqq \beta(x') \leqq 1, x' \in \Gamma\}$$

и для натурального числа $N > 1$ множество $T(N)$ определяется как подмножество всех тех

$$\omega \equiv \big((\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_N, \beta_N)\big) \in \prod_{i=1}^{N} (U \times V), \tag{1.7}$$

для которых

$$\alpha_1(x) + \cdots + \alpha_N(x) = 1 \ (x \in \Omega) \quad \text{и} \quad \beta_1(x') + \cdots + \beta_N(x') = 1 \ (x' \in \Gamma), \tag{1.8}$$

а множество $T^0(N)$ — как подмножество всех тех $\omega \in T(N)$, для которых $\alpha_i \in U_0$, $\beta_i \in V_0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Множества U_0, V_0, U, V, $T^0(N)$, $T(N)$ рассматриваются как подмножества пространств $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ или их декартовых произведений.

Множество допустимых управлений определяется при помощи двух заданных многозначных измеримых отображений

$$\Pi_1 : \Omega \to 2^{\mathbf{R}^{m_1}} \quad \text{и} \quad \Pi_2 : \Gamma \to 2^{\mathbf{R}^{m_2}},$$

принимающих значения из заданных ограниченных множеств $M_1 \subset \mathbf{R}^{m_1}$ и $M_2 \subset \mathbf{R}^{m_2}$. Предполагается, что Π_1 и Π_2 имеют плотные измеримые семейства сечений [1]. После этого Σ определяется как множество всех пар $\sigma \equiv (\vartheta, \theta)$, где $\vartheta \equiv (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m_1})$ и $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m_2})$ являются произвольными измеримыми сечениями отображений Π_1 и Π_2 соответственно. Иными словами, Σ — это множество всех пар измеримых вектор функций $\sigma \equiv (\vartheta, \theta)$ таких, что $\vartheta(x) \in \Pi_1(x)$ $(x \in \Omega)$ и $\theta(x') \in \Pi_2(x')$ $(x' \in \Gamma)$.

Наконец, задан набор функций

$$\mathsf{F} \equiv \{a_0, \ldots, a_n, \varkappa, F_0, \ldots, F_{m_0}, \Phi_0, \ldots, \Phi_{m_0}\},$$

$$a_i = a_i(x, \xi, y) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad \text{и} \quad F_m = F_m(x, \xi, y) \quad (m = 0, 1, \ldots, m_0),$$

$$x \in \Omega, \qquad \xi \in \mathbf{R}^{m_1}, \qquad y \equiv (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1},$$

$$\varkappa = \varkappa(x', \xi', t) \quad \text{и} \quad \varphi_m = \varphi_m(x', \xi', t) \quad (m = 0, 1, \ldots, m_0),$$

$$x' \in \Gamma, \qquad \xi' \in \mathbf{R}^{m_2}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

удовлетворяющих условию Каратеодори. При помощи набора F каждому $\sigma = (\vartheta, \theta) \in \Sigma$ сопоставляется оператор $A(\sigma) : \mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$,

$$\begin{aligned}\big(A(\sigma)\, g\big)(x, x') = \big(a_0(x, \vartheta(x), g_0(x), \ldots, g_n(x)), \ldots, a_n(x, \vartheta(x), g_0(x), \ldots, g_n(x)),\\ \varkappa(x', \theta(x'), g_{n+1}(x'))\big), \quad x \in \Omega, \quad x' \in \Gamma, \quad g \in \mathsf{L}(r) \qquad (1.7)\end{aligned}$$

и функционалы $J_m : \Sigma \times \mathsf{L}(r) \to \mathbf{R}$ $(m = 0, 1, \ldots, m_0)$,

$$\begin{aligned}J_m &= J_m(\sigma, g)\\ &= \int_\Omega F_m\big(x, \vartheta(x), g_0(x), \ldots, g_n(x)\big)\, dx + \int_\Gamma \Phi_m\big(x', \theta(x'), g_{n+1}(x')\big)\, d\Gamma. \qquad (1.8)\end{aligned}$$

В последующем в записи зависимости функций от компонент $g_0, \ldots, g_{n+1}$ элемента g (или компонент u) будем всегда писать просто g всюду, где из текста ясно, какие именно компоненты имеются в виду.

Теперь рассматриваемая задача формулируется следующим образом.

Задача 1: Требуется минимизировать функционал $J_0 = J_0(\sigma, u)$ по $(\sigma, u) \in \Sigma \times W$ при связях

$$P' A(\sigma)\, u = 0 \qquad (1.9)$$

и дополнительных ограничениях

$$J_m(\sigma, u) \leqq 0 \quad (m = 1, \ldots, s_0) \quad \text{и} \quad J_m(\sigma, u) = 0 \quad (m = s_0 + 1, \ldots, m_0).$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество всех $A(\sigma)$ с $\sigma \in \Sigma$ и приведем **условия**, которые будут в дальнейшем применяться.

А 1. $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}(r)$ и существует непрерывная функция γ_0 такая, что выполняется оценка

$$\|Ag\| \leqq \gamma_0(\|g\|) \qquad \big(A \in \mathfrak{A}_0,\ g \in \mathsf{L}(r)\big).$$

А 2. $\mathfrak{A}_0 \subset D\mathfrak{A}(r)$ и для каждой сильно сходящейся последовательности $\{f^k\} \subset \mathsf{L}^*(r)$, $f^k \to f^0$, существует непрерывная функция φ, $\varphi(0) = 0$, такая, что

$$\|DAf^k - DAf^0\| \leqq \varphi(\|f^k - f^0\|) \qquad (A \in \mathfrak{A}_0)$$

(функция φ зависит от $\{f^k\}$ и f^0 но не зависит от выбора оператора $A \in \mathfrak{A}_0$).

А 3. $\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0 \subset D\mathfrak{A}(r)$.

А 4. Операторы $A \in \mathfrak{A}_0$ имеют производную Гато.

А 5. Для каждого $g^0 \in \mathsf{L}(r)$ существует непрерывная функция $\gamma(g^0; \cdot)$, $\gamma(g^0; 0) = 0$, такая, что

$$\|Ag - Ag^0\|^* \leqq \gamma(g^0; \|g - g^0\|) \qquad \big(A \in \mathfrak{A}_0,\ g \in \mathsf{L}(r)\big).$$

А 6. Для каждого $g \in \mathsf{L}(r)$ и всех $\sigma \in \Sigma$ функции

$$|F_m(\cdot, \vartheta(\cdot), g(\cdot))| \in L_1(\Omega) \quad \text{и} \quad |\Phi_m(\cdot, \theta(\cdot), g(\cdot))| \in L_1(\Gamma)$$

($m = 0, 1, \ldots, m_0$) имеют интегрируемые мажоранты, не зависящие от выбора $\sigma \in \Sigma$ (эти мажоранты зависят от g).

А 7. Функционалы J_m ($m = 0, 1, \ldots, m_0$) непрерывны по $g \in \mathsf{L}(r)$ равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$, т. е. для каждого $g^0 \in \mathsf{L}(r)$ существует непрерывная функция $\gamma_1(g^0; \cdot)$, $\gamma_1(g^0; 0) = 0$, такая, что

$$|J_m(\sigma, g) - J_m(\sigma, g^0)| \leqq \gamma_1(g^0; \|g - g^0\|) \qquad \big(g \in \mathsf{L}(r),\ \sigma \in \Sigma\big).$$

А 8. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ функционалы $J_m(\sigma, \cdot)$ ($m = 0, 1, \ldots, m_0$) имеют производную Гато.

А 9. Множество всех решений уравнений $P'Au = 0$ с $A \in \mathfrak{A}_0$ ограничено в W.

А 10. Если в основной задаче 1 функционалы J_m ($m = s_0 + 1, \ldots, m_0$) заменить на $J_m^\varepsilon \equiv J_m(\sigma, g) + \varepsilon_m$, то нижняя грань функционала J_0 в задаче 1 (теперь она зависит от ε_m) непрерывна по $\varepsilon = (\varepsilon_{s_0+1}, \ldots, \varepsilon_{m_0})$ в точке $\varepsilon = 0 \in \mathbf{R}^{m_0 - s_0}$.

В работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1: *Пусть выполнены условия* **А 1—А 3**. *Тогда для любого фиксированного $f \in \mathsf{L}^*(r)$ множество*

$$Z(\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f) \equiv \{u \in W : u = DAf,\ A \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0\}$$

содержится в сильном замыкании в W множества

$$Z(\mathfrak{A}_0, f) \equiv \{u \in W : u = DAf,\ A \in \mathfrak{A}_0\}.$$

Если дополнительно выполнено условие **А 5**, *то множество $Z(\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f)$ является сильным замыканием в W множества $Z(\mathfrak{A}_0, f)$.*

Теорема 2: *Пусть выполнены условия* **А 1—А 10**, *(σ^0, u^0) является решением задачи 1 и дополнительно существуют положительные константы $\varrho_0 > 0$ и $c_0 > 0$ такие, что*

1. *для каждого $v \in W$ отображение*

$$u \mapsto LA(\sigma^0, u)\, v \in \mathsf{L}^*(r)$$

непрерывно по u, $\|u - u^0\| < \varrho_0$, *и для тех же аргументов*

$$\left\| P' \int_0^1 LA\left(\sigma^0, u^0 + \tau(u - u^0)\right) v \, d\tau \right\|^* \geqq c_0 \|v\|;$$

2. *для каждого* $v \in W$ *отображения*

$$u \mapsto \langle\langle LJ_m(\sigma^0, u^0), v\rangle\rangle \in \mathbf{R} \qquad (m = 0, 1, \ldots, m_0)$$

непрерывны по u, $\|u - u^0\| < \varrho_0$.

Тогда существуют числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m_0}$, *не все равные нулю, такие, что*

$$\lambda_0 \geqq 0, \ldots, \lambda_{s_0} \geqq 0, \quad \sum_{m=1}^{s_0} \lambda_m J_m(\sigma^0, u^0) = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{m_0} \lambda_m[J_m(\sigma^0, u^0) - \langle\langle A(\sigma^0)\, u^0, w^m\rangle\rangle] \leqq \sum_{m=0}^{m_0} \lambda_m[J_m(\sigma, u^0) - \langle\langle A(\sigma)\, u^0, w^m\rangle\rangle] \tag{1.10}$$

для всех $\sigma \in \Sigma$, *где* w^m *являются решениями вариационных равенств*

$$\langle\langle LA(\sigma^0, u^0)\, v, w\rangle\rangle - \langle\langle LJ_m(\sigma^0, u^0), v\rangle\rangle = 0 \tag{1.11}$$

для всех $v \in W$ $(m = 0, 1, \ldots, m_0)$ *относительно* $w \in W$ *соответственно.*

§ 2. Переход к выпуклой оболочке множества допустимых операторов

В этом параграфе дается доказательство теоремы 1. Необходимо отметить, что в случае $n = 1$ или в случае систем эллиптических уравнений (или уравнений более высокого порядка) соответствующий аналог теоремы 1 не имеет места.

Лемма 2.1: *Пусть последовательность* $\{f^k\} \subset \mathsf{L}^*(r)$ *и элемент* $f^0 \in \mathsf{L}^*(r)$ *таковы, что* $\|f^k - f^0\|_W^* \to 0$, *где* $\|f\|_W^* \equiv \sup \{\langle\langle f, v\rangle\rangle : v \in W, \|v\| \leqq 1\}$. *Тогда* $\|P'(f^k - f^0)\|^* \to 0$.

Доказательство: Норма в пространстве $\mathsf{L}^*(r)$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{\mathsf{L}(r)}^* \equiv \sup \{\langle\langle f, g\rangle\rangle : g \in \mathsf{L}(r), \|g\| \leqq 1\}.$$

Из ограниченности и линейности операторов проектирования P и P' следует, что пространства $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$ распадаются на прямые суммы [3] $\mathsf{L}(r) = W \oplus \mathsf{N}$ и $\mathsf{L}^*(r) = W' \oplus \mathsf{N}'$ и, поскольку $\mathsf{L}^*(r)$ можно отождествлять с сопряженным к $\mathsf{L}(r)$ пространством, а P' — с сопряженным к P оператором, то W' является аннулятором подпространста N. Поэтому $\|P'f\|^* \sim \sup \{\langle\langle f, v\rangle\rangle : v \in W, \|v\| \leqq 1\}$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы ∎

В дальнейшем для произвольных $f \in \mathsf{L}^*(r)$ и пары $(\alpha, \beta) \in U \times V$ обозначим

$$(\alpha, \beta)\, f \equiv (\alpha f_0, \ldots, \alpha f_n, \beta f_{n+1}) \in \mathsf{L}^*(r). \tag{2.1}$$

Лемма 2.2: *Пусть заданы* $f^0 \in \mathsf{L}^*(r)$ *и* $(\alpha_0, \beta_0) \in U \times V$. *Тогда существует последовательность* $\{(\alpha_k, \beta_k)\} \subset U_0 \times V_0$ *такая, что*

$$\|(\alpha_k, \beta_k)\, f^0 - (\alpha_0, \beta_0)\, f^0\|_W^* \to 0 \quad \text{и} \quad (\alpha_k, \beta_k)\, f^0 \rightharpoonup (\alpha_0, \beta_0)\, f^0.$$

Доказательство: Очевидно, что $(n + 1)$-ую компоненту можно рассматривать отдельно. Так как V является выпуклой замкнутой оболочкой множества V_0, то существует последовательность $\{\beta_k\} \subset V_0$, такая, что $\beta_k \rightharpoonup \beta_0$. Поскольку множество V ограничено в $L_\infty(\Gamma)$, то также

$$\beta_k f^0_{n+1} \rightharpoonup \beta_0 f^0_{n+1}, \quad \text{когда} \quad k \to \infty. \tag{2.2}$$

Отсюда и из теорем вложения следует, что

$$\sup_{v \in W, \|v\| \leqq 1} \int_\Gamma (\beta_k - \beta_0) f^0_{n+1} v_{n+1} \, d\Gamma \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

В самом деле, если не так, то существует число $\delta_0 > 0$ и последовательность $\{v^k\} \subset W$ такие, что $\{v^k\}$ слабо сходится к некоторому элементу $v^0 \in W$ и что

$$\int_\Gamma (\beta_k - \beta_0) f^0_{n+1} v^k_{n+1} \, d\Gamma \geqq \delta_0. \tag{2.3}$$

Согласно теоремам вложения и представлению (1.1) элементов из W последовательность $\{v^k_{n+1}\}$ сходится сильно в $L_{\frac{2(r-1)}{r-2}}(\Gamma)$. Но тогда из (2.3) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Gamma (\beta_k - \beta_0) f^0_{n+1} v^0_{n+1} \, d\Gamma \geqq \delta_0,$$

что противоречит сходимости (2.2).

Пусть теперь задан $\varepsilon > 0$. Из свойств элементов Лебеговых пространств следует существование конечного разбиения $\Omega = \Omega_0 \cup \dots \cup \Omega_N$ на попарно непересекающиеся множества Ω_s и кусочно-постоянных функций $\alpha_* \in U$, $f^* \equiv (f_0^*, \dots, f_n^*, 0) \in \mathsf{L}^*(r)$ таких, что

1. $\operatorname{mes} \Omega_0 = 0$;
2. Ω_s $(s = 1, \dots, N)$ являются строго Липшицевыми областями;
3. в каждом Ω_s $(s = 1, \dots, N)$ функции α_*, f_i^* $(i = 0, 1, \dots, n)$ являются постоянными;
4. $\|(\alpha_*, 0) f^* - (\alpha_0, 0) f^0\|^* < \varepsilon/4$.

Обозначим для краткости для $s = 1, \dots, N$ и $x \in \Omega_s$

$$a^s \equiv f_0^*(x) \quad \text{и} \quad b^s \equiv (b_1^s, \dots, b_n^s), \quad b_i^s = f_i^*(x) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Поскольку области Ω_s строго Липшицевы, то существует функция ζ такая, что

1. $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$; 2. $0 \leqq \zeta(x) \leqq 1$ $(x \in \mathbf{R}^n)$; 3. $\operatorname{supp} \zeta \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ (т. е. функция ζ отлична от нуля только строго внутри областей Ω_s) и 4. $\|(\zeta, 0) f^* - f^*\|^* < \varepsilon/4$. Здесь естественным образом ζ считается также элементом U. Выберем последовательность $\{\alpha_k\} \subset U_0$ со следующими свойствами:

1. $\alpha_k \rightharpoonup \alpha_*$ в слабой топологии $L_2(\Omega)$;
2. в каждом Ω_s $(s = 1, \dots, N)$ функции α_k $(k = 1, 2, \dots)$ не зависят от изменений аргумента в направлении вектора b^s, т. е. для всех пар $(x, x + \tau b^s)$ точек с $\tau \in \mathbf{R}$, одновременно принадлежащих Ω_s, выполняется равенство $\alpha_k(x) = \alpha_k(x + \tau b^s)$.

Очевидно, что последовательность $\{\alpha_k\}$ с этими свойствами существует. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\langle\langle(\alpha_k, 0) f^0 - (\alpha_0, 0) f^0, v\rangle\rangle \\
&= \langle\langle(\alpha_k, 0)(f^0 - f^*), v\rangle\rangle + \langle\langle(\alpha_*, 0) f^* - (\alpha_0, 0) f^0, v\rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle(\alpha_k - \alpha_*, 0) f^* - ((\alpha_k - \alpha_*)\zeta, 0) f^*, v\rangle\rangle + \langle\langle((\alpha_k - \alpha_*)\zeta, 0) f^*, v\rangle\rangle \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

По построению функций α_*, f^*, ζ величины I_1, I_2, I_3 по модулю имеют порядок $\varepsilon \|v\|$. Величину I_4 можно преобразовать с учетом представления (1.1) и интегрирования по частям как

$$I_4 = \int_\Omega \left[\sum_{i=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_*) \zeta f_i{}^* v_i \right] dx$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \int_{\Omega_s} \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_*) \zeta b_i{}^s z_{x_i} + (\alpha_k - \alpha_*) \zeta a^s z \right] dx$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \int_{\Omega_s} (\alpha_k - \alpha_*) [a^s \zeta - |b^s| \, \partial\zeta/\partial b^s] \, z \, dx,$$

$$v_i = z_{x_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad v_0 = z,$$

так как функции $\alpha_k - \alpha_*$ в направлении b^s не меняются (внутри каждого Ω_s) и функция ζ равна нулю вблизи границ областей Ω_s (здесь через $\partial/\partial b^s$ обозначена производная в направлении b^s; если $b^s = 0$, то подразумевается, что $\partial\zeta/\partial b^s = 0$). Очевидно, что в каждом Ω_s

$$(\alpha_k - \alpha_*) [a^s \zeta - |b^s| \, \partial\zeta/\partial b^s] \rightharpoonup 0, \quad \text{когда} \quad k \to \infty.$$

Применяя такие же рассуждения как при изучении $(n + 1)$-ой компоненты, получаем требуемое утверждение леммы ∎

Следствие 2.1: *В условиях леммы 2.2 имеет место сходимость*

$$\|P'(\alpha_k, \beta_k) f^0 - P'(\alpha_0, \beta_0) f^0\|^* \underset{k\to 0}{\to} 0.$$

Лемма 2.3: *Пусть задано множество $Q \subset \mathsf{L}^*(r)$ такое, что вместе с любыми $f^1, f^2 \in Q$ оно содержит также все те $f \in \mathsf{L}^*(r)$, которые имеют представление*

$$f = (\alpha, \beta) f^1 + (1 - \alpha, 1 - \beta) f^2, \qquad (\alpha, \beta) \in U_0 \times V_0.$$

Тогда для любого $f^0 \in \overline{\text{co}}\, Q$ существует последовательность $\{f^k\} \subset Q$ такая, что

1. $f^k \rightharpoonup f^0$ *и* 2. $\|f^k - f^0\|_W^* \to 0$.

Доказательство: Пусть задано $\varepsilon > 0$. По определению замкнутой выпуклой оболочки существуют элементы $f^1, \ldots, f^N \in Q$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ такие, что

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1, \qquad \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f^i - f^0 \right\|^* < \varepsilon/4. \tag{2.4}$$

Дальнейшее доказательство проводится индукцией по N. В силу леммы 2.2 для элемента $f^*(N)$ вида

$$f^*(N) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f^i \quad \text{с} \quad f^i \in Q \quad \text{и} \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1 \tag{2.5}$$

при $N = 2$ существует последовательность $\{f^k\} \subset Q$ со свойствами 1 и 2. Покажем, что из справедливости утверждений 1 и 2 для N вытекает их справедливость для $N + 1$. Элемент $f^*(N + 1)$ можно представить в виде (когда $\lambda_{N+1} \neq 1$)

$$f^*(N + 1) = (1 - \lambda) f^{N+1} + \lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\lambda} f^i, \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N.$$

По предположению индукции существует элемент $f' \in Q$ такой, что $\|f' - (\lambda_1 f^1 + \cdots + \lambda_N f^N)/\lambda\|_W^* < \varepsilon/4$. Для аппроксимации элемента $(1 - \lambda) f^{N+1} + \lambda f' = f^{N+1}$

$+\lambda(f'-f^{N+1})$ достаточно применить лемму 2.2 к элементу $(\lambda, \lambda)(f'-f^{N+1})$, $(\lambda, \lambda) \in U \times V$. Таким образом, существует последовательность $\{f^k\} \subset Q$ такая, что $\|f^k - f^*(N+1)\|_W^* \to 0$, когда $k \to \infty$. Путем перехода к подпоследовательностям и используя сепарабельность $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$, нетрудно добиться, чтобы $f^k \rightharpoonup f^*(N+1)$, когда $k \to \infty$. Отсюда, из (2.4) и из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает справедливость леммы ∎

Лемма 2.4: *Пусть выполнены условия* **А 1** *и* **А 5**, *тогда для любого* $g^0 \in \mathsf{L}(r)$ *множество* $Q(g^0) \equiv \{f \in \mathsf{L}^*(r): f = Ag^0,\ A \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0\}$ *выпукло и замкнуто.*

Доказательство: Выпуклость множества $Q(g^0)$ очевидна. Пусть последовательность $\{f^k\}$, $f^k = A_k g^0$, $A_k \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится к элементу f^0. Покажем, что существуют подпоследовательность $\{A_j\} \subset \{A_k\}$ и непрерывный оператор A_0: $\mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$ такие, что для любого $g \in \mathsf{L}(r)$ будет $A_j g \rightharpoonup A_0 g$.

Поскольку пространства $\mathsf{L}(r)$ и $\mathsf{L}^*(r)$ рефлексивны и сепарабельны, то при помощи условия **А 1** легко строится подпоследовательность $\{A_j\} \subset \{A_k\}$ такая, что для фиксированного счетного всюду плотного в $\mathsf{L}(r)$ семейства $\{g^s\}$ последовательности $\{A_j g^s\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ слабо сходятся, когда $j \to \infty$. Обозначим соответствующие предельные элементы через f^s. Легко видеть, что и для любого $g \in \mathsf{L}(r)$ последовательность $\{A_j g\}$ будет слабо сходиться.

В самом деле, если это было не так, то существовали бы число $\delta_0 > 0$, элементы $g', g^* \in \mathsf{L}(r)$ и подпоследовательности $\{A_{j_1}\}, \{A_{j_2}\} \subset \{A_j\}$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \langle\langle A_{j_1} g', g^* \rangle\rangle \geqq \lim_{j\to\infty} \langle\langle A_{j_2} g', g^* \rangle\rangle + \delta_0.$$

Но в силу условия **А 5** и леммы 1.1 существует элемент $g'' \in \{g^s\}$ такой, что

$$|\langle\langle A_j g' - A_j g'', g^* \rangle\rangle| < \delta_0/2 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Полученное противоречие показывает, что для любого $g \in \mathsf{L}(r)$ последовательность $\{A_j g\}$ слабо сходится.

Тем самым определяется некоторый оператор A_0: $\mathsf{L}(r) \to \mathsf{L}^*(r)$, который каждому $g \in \mathsf{L}(r)$ сопоставляет слабо предельный элемент последовательности $\{A_j g\}$. Из условия **А 5** и слабой полунепрерывности снизу нормы в $\mathsf{L}^*(r)$ следует, что оператор A_0 является непрерывным и удовлетворяет условию **А 5** с теми же самыми функциями γ, что и операторы из A_0. Очевидно, что $A_0 g^0 = f^0$.

Для слабо сходящейся в банаховом пространстве последовательности некоторая последовательность выпуклых комбинаций ее элементов сходится сильно к тому же пределу. Поэтому, применяя декартовы произведения конечных наборов пространств $\mathsf{L}^*(r)$ и диагональный процесс, получаем существование последовательности $\{B_m\}$ операторов таких, что

1. каждый оператор B_m является выпуклой комбинацией операторов из $\{A_j\}$;
2. $B_m g^s \to A_0 g^s$ для каждого g^s $(s = 1, 2, \ldots)$.

Аналогично как и раньше, показывается, что операторы B_m удовлетворяют условию **А 5** и что для каждого $g \in \mathsf{L}(r)$ последовательность $\{B_m g\}$ сильно сходится к $A_0 g$. Поэтому $A_0 \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0$ и лемма доказана ∎

Приступим к доказательству теоремы 1: Пусть заданы $A_0 \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f^0 \in \mathsf{L}^*(r)$ и $u^0 = DA_0 f^0$. Выберем $\varepsilon > 0$. По определению $\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0$ существуют операторы $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{A}_0$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ такие, что

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1 \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i u^0 - A_0 u^0 \right\|^* < \varepsilon/4.$$

Применяя лемму 2.3 к множеству $Q_0 \equiv \{f \in \mathsf{L}^*(r): f = Au^0, A \in \mathfrak{A}_0\}$ и к элементу $\lambda_1 A_1 u^0 + \cdots + \lambda_N A_N u^0$, из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем существование последовательности $\{A_k\} \subset \mathfrak{A}_0$ такой, что

$$\|P'(A_k u^0 - A_0 u^0)\|^* \to 0 \quad \text{и} \quad A_k u^0 \rightharpoonup A_0 u^0. \tag{2.6}$$

В силу условия **А 2** операторы DA_k $(k = 1, 2, \ldots)$ существуют. Обозначим $u^k \equiv DA_k f^0$. Тогда имеем для $k = 0, 1, \ldots$

$$u^k = DA_k f^0 \quad \text{и} \quad u^0 = DA_k(f^0 + A_k u^0 - A_0 u^0). \tag{2.7}$$

Так как (по определению решения вариационных равенств (1.4) или уравнений (1.5)) $DA_k f = DA_k(P'f)$ для всех $f \in \mathsf{L}^*(r)$, то из условия **А 2**, из (2.6) и (2.7) следует, что $\|u^k - u^0\| \to 0$. Тем самым доказана первая часть теоремы, т. е. включение $Z(\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f^0)$ в замыкание множества $Z(\mathfrak{A}_0, f^0)$.

Пусть теперь $\{u^k\} \subset Z(\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f^0)$ и $u^k \to u^0$. Обозначим через A_k соответствующие решениям u^k $(k = 1, 2, \ldots)$ операторы из $\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0$. В силу уже доказанного без умаления общности можно считать, что $A_k \in \mathfrak{A}_0$. Мы имеем для $k = 1, 2, \ldots$

$$P'A_k u^0 - P'f^0 = P'(A_k u^0 - A_k u^k). \tag{2.8}$$

В силу условия **А 5**

$$\|A_k u^k - A_k u^0\|^* \to 0. \tag{2.9}$$

Без умаления общности можно считать (условие **А 1** и рефлексивность $\mathsf{L}^*(r)$), что последовательность $\{A_k u^0\}$ слабо сходится к некоторому $f^* \in \mathsf{L}^*(r)$. Если мы покажем существование оператора $A_0 \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0$ такого, что $A_0 u^0 = f^*$, то из (2.8), (2.9) и условия **А 3** будет следовать, что $u^0 = DA_0 f^0$, т. е. что $u^0 \in Z(\overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0, f^0)$. Поскольку $\mathsf{L}^*(r)$ рефлексивно, то элемент f^* принадлежит замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\mathrm{co}}\, Q_*$ множества $Q_* \equiv \{f \in \mathsf{L}^*(r): f = Au^0, A \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathfrak{A}_0\}$. В силу леммы 2.4 уже само множество Q_* выпукло и замкнуто, поэтому $f^* \in Q_*$ и существование оператора A_0 установлено ∎

§ 3. Необходимые условия оптимальности

Зафиксируем натуральное число $N \geqq 1$ и конечное множество управлений $\sigma^1 = (\vartheta^1, \theta^1), \ldots, \sigma^N = (\vartheta^N, \theta^N) \in \Sigma$. Будем рассматривать новые управления $\omega \in T(N)$, задавая зависимость операторов и функционалов от $\omega \equiv \big((\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_N, \beta_N)\big) \in T(N)$ и $g \in \mathsf{L}(r)$ как

$$\begin{gathered} A(\omega)\, g \equiv (\alpha_1, \beta_1)\, A(\sigma^1)\, g + \cdots + (\alpha_N, \beta_N)\, A(\sigma^N)\, g, \\ J_m(\omega, g) \equiv \sum_{i=1}^{N} \Big[\int_\Omega \alpha_i(x)\, F_m\big(x, \vartheta^i(x), g(x)\big)\, dx \\ + \int_\Gamma \beta_i(x')\, \Phi_m\big(x', \theta^i(x'), g_{n+1}(x')\big)\, d\Gamma \Big] \quad (m = 0, 1, \ldots, m_0). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Отметим, что величины $A(\omega, g)$ и $J_m(\omega, g)$ определены формулами (3.1) для произвольных наборов $\omega = \big((\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_N, \beta_N)\big)$ с $\alpha_i \in L_\infty(\Omega)$, $\beta_i \in L_\infty(\Gamma)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Легко видеть, что для $\omega \in T^0(N)$, определенному формулами (3.1), оператору $A(\omega)$ соответствует оператор $A\big(\sigma(\omega)\big)$ с

$$\begin{aligned} &\sigma(\omega) \equiv \big(\vartheta(\omega), \theta(\omega)\big) \in \Sigma, \\ &\vartheta(\omega)\,(x) = \vartheta^i(x) \quad \text{для} \quad x \in \operatorname{supp} \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, N), \\ &\theta(\omega)\,(x') = \theta^i(x') \quad \text{для} \quad x' \in \operatorname{supp} \beta_i \quad (i = 1, \ldots, N). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вполне аналогичное соотношение имеется и для функционалов J_m, т. е. $J_m(\omega, g) = J_m(\sigma(\omega), g)$. Отсюда и из (3.1) вытекает, что для $\omega \in T^0(N)$ оператор $A(\omega)$ принадлежит $\mathfrak{A}_0$, а для $\omega \in T(N)$ оператор $A(\omega) \in \overline{\text{co}}\, \mathfrak{A}_0$.

В самом деле, при $\omega \in T(N)$ с кусочно-постоянными компонентами (α_i, β_i) из формул (3.1) сразу следует, что $A(\omega) \in \overline{\text{co}}\, \mathfrak{A}_0$. Поскольку такими кусочно-постоянными $\omega \in T(N)$ можно аппроксимировать (в топологиях $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$) произвольные $\omega \in T(N)$ и интерес представляет сходимость $A(\omega)\, g$ с фиксированными $g \in \mathsf{L}(r)$ то на основе абсолютной непрерывности интеграла как функции множества получаем требуемую принадлежность $A(\omega) \in \overline{\text{co}}\, \mathfrak{A}_0$, если $\omega \in T(N)$.

В ситуациях, когда исходные множества M_1 и M_2 содержат только конечные числа точек, вся задача 1 естественным образом может быть переформулирована в терминах управлений $\omega \in T^0(N)$ при помощи представлений (3.1), (3.2). Удобство этих представлений в том, что здесь новые управления выступают линейно и что переход от $\omega \in T^0(N)$ к $\omega \in T(N)$ является переходом к выпуклому множеству как управлений, так и допустимых операторов.

Обозначим в дальнейшем через $u(\omega)$ решение уравнения

$$P'A(\omega)\, u = 0. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1: *Пусть выполнены условия* А 1—А 9, $\omega^0 \in T^0(N)$, $u^0 = u(\omega^0)$ *и для пары* $(\sigma(\omega^0), u^0)$ *выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 2. *Тогда функционал* $\mathsf{J}_m = \mathsf{J}_m(\omega) \equiv J_m(\omega, u(\omega))$ $(m = 0, 1, \ldots, m_0)$ *имеет на* ω^0 *производную Гато* $\mathsf{J}_m'(\omega^0)$ *по* $\omega \in T(N) \subset \prod_{i=1}^{N} \left(L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Gamma)\right)$ *и для* $\omega^0 + \delta\omega \in T(N)$ *справедливо соотношение*

$$\mathsf{J}_m'(\omega^0)\, \delta\omega = J_m(\delta\omega, u^0) - \langle\langle A(\delta\omega)\, u^0, w^m \rangle\rangle, \tag{3.4}$$

где w^m $(m = 0, 1, \ldots, m_0)$ *является решением вариационного равенства*

$$\langle\langle LA(\omega^0, u^0)\, v, w \rangle\rangle - \langle\langle LJ_m(\omega^0, u^0), v \rangle\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in W \tag{3.5}$$

относительно $w \in W$.

Доказательство: Очевидно, что достаточно рассмотреть только один из функционалов J_m. Поэтому в дальнейшем индекс m будем опускать. Так как при помощи билинейной формы $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ в W и W' вводится одна и та же структура гильбертова пространства, то из условия 1 теоремы 2 следует, что вариационное равенство (3.5) разрешимо однозначно и тем самым определение $\mathsf{J}'(\omega^0)$ в (3.4) корректно.

Пусть в дальнейшем $\omega(t) \equiv \omega^0 + t\delta\omega$ и $0 \leqq t \leqq 1$. Элементы $\omega(t) \in T(N)$, поэтому $A(\omega(t)) \in \overline{\text{co}}\, \mathfrak{A}_0$ и, согласно условию А 3, однозначно определены решения $u(t) \equiv u(\omega(t)) = DA(\omega(t))\,(0)$ с $0 \leqq t \leqq 1$. Элемент $u(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} P'[A(\omega^0)\, u(t) - A(\omega^0)\, u^0] &= -tP'A(\delta\omega)\, u^0 - tP'[A(\delta\omega)\, u(t) - A(\delta\omega)\, u^0] \\ &\equiv -tP'f^1 - tP'f^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из условия А 9 и теоремы 1 вытекает, что все $u(t)$ с $0 \leqq t \leqq 1$ принадлежат ограниченному множеству в W. Поэтому, согласно условию А 1, ограниченному множеству в $\mathsf{L}^*(r)$ принадлежат f^1 и f^2. Отсюда и из условия А 2 следует, что $\|u(t) - u^0\| \to 0$, когда $t \to 0$. Таким образом, существует $t_0 > 0$ такое, что при $0 \leqq t \leqq t_0$ справедлива оценка $\|u(t) - u^0\| < \varrho_0$. В дальнейшем рассмотрим только такие t. Тогда для $u(t)$ выполнены условия 1 и 2 теоремы 2. Поэтому

(3.6) можно переписать для $\delta u \equiv u(t) - u^0$ в виде

$$P' \int_0^1 LA(\omega^0, u^0 + \tau\delta u)\, d\tau\, \delta u = -tP'f^1 - tP'f^2. \tag{3.7}$$

Согласно условию 1 теоремы 2 существует единственный элемент $u' \in W$, удовлетворяющий соотношению

$$P'LA(\omega^0, u^0)\, u' = -P'A(\delta\omega)\, u^0. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что

$$P' \int_0^1 LA(\omega^0, u^0 + \tau\delta u)\, d\tau\, \frac{\delta u - tu'}{t}$$
$$= -P' \int_0^1 [LA(\omega^0, u^0 + \tau\delta u) - LA(\omega^0, u^0)]\, d\tau u' - P'f^2. \tag{3.9}$$

Из непрерывности $u(t)$ в точке $t = 0$ и из условия А 5 вытекает, что $f^2 \to 0$ в $\mathsf{L}^*(r)$, когда $t \to 0$, а из условия 1 теоремы 2 следует, что и первый слагаемый в правой части соотношения (3.9) стремится к нулю в $\mathsf{L}^*(r)$, когда $t \to 0$. Отсюда и из того же условия 1 теоремы 2 следует, что $\delta u - tu' = o(|t|)$. Таким образом, мы показали, что для $\omega^0 + \delta\omega \in T(N)$ справедливо

$$u(\omega^0 + t\delta\omega) = u^0 + tu' + o(|t|) \qquad (0 \leqq t \leqq 1), \tag{3.10}$$

где u' определено соотношением (3.8).

С учетом (3.10) и условия 2 теоремы 2 вполне аналогично показывается, что для $\omega^0 + \delta\omega \in T(N)$ имеет место

$$\mathsf{J}(\omega^0 + t\delta\omega) = \mathsf{J}(\omega^0) + tJ(\delta\omega, u^0) + tLJ(\omega^0, u^0)\, u' + o(|t|)$$
$$(0 \leqq t \leqq 1). \tag{3.11}$$

Наконец, из определения элемента w (соотношение (3.5)) и из (3.11) получаем окончательно, что

$$\mathsf{J}(\omega^0 + t\delta\omega) = \mathsf{J}(\omega^0) + t\mathsf{J}'(\omega^0)\, \delta\omega + o(|t|) \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Так как величина $\mathsf{J}'(\omega^0)$ (формулы (3.4) и (3.5)) не зависит от выбора $\delta\omega$ с $\omega^0 + \delta\omega \in T(N)$, то лемма доказана ∎

Приступим теперь к доказательству теоремы 2: Пусть (σ^0, u^0) является решением задачи 1. Определим конечный набор управлений $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^N\} \subset \Sigma$ с $\sigma^i = (\vartheta^i, \theta^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$ содержащий σ^0. Обозначим через ω^0 соответствующий σ^0 набор вида (1.7). Для простоты записи можно считать, что $\omega^0 = ((1, 1), (0, 0), \ldots, (0, 0))$, т. е. что $\sigma^0 = \sigma^1$. Определим на $T(N) \times W$ функционал

$$S(\omega, u) \equiv \langle\langle u - u^0, u - u^0 \rangle\rangle + \sum_{i=2}^{N} \left[\left(\int_\Omega \alpha_i\, dx \right)^2 + \left(\int_\Gamma \beta_i\, d\Gamma \right)^2 \right]$$
$$+ \left(\int_\Omega (1 - \alpha_1)\, dx \right)^2 + \left(\int_\Gamma (1 - \beta_1)\, d\Gamma \right)^2.$$

По построению функционал S непрерывно дифференцируем по Фреше, слабо непрерывен по $\omega \in T(N)$, его частные производные на паре (ω^0, u^0) равны нулю и $S(\omega, u) > 0$, если $(\omega, u) \neq (\omega^0, u^0)$.

Определим еще следующие задачи.

Задача 1 (N): Минимизировать функционал $J_0 = J_0(\omega, u)$ по $\omega \in T^0(N)$ и $u \in W$ при связях

$$P'A(\omega)\,u = 0$$

и дополнительных ограничениях

$$J_m(\omega, u) \leqq 0 \quad (m = 1, \ldots, s_0) \quad \text{и} \quad J_m(\omega, u) = 0 \quad (m = s_0 + 1, \ldots, m_0);$$

Задача 2 (N): Минимизировать функционал $J_0 + S = J_0(\omega, u) + S(\omega, u)$ по $(\omega, u) \in T(N) \times W$ при связях

$$P'A(\omega)\,u = 0$$

и дополнительных ограничениях

$$J_m(\omega, u) + S(\omega, u) \leqq 0 \quad (m = 1, \ldots, s_0)$$

и

$$J_m(\omega, u) = 0 \quad (m = s_0 + 1, \ldots, m_0).$$

Поскольку управлениями $\omega \in T^0(N)$ при помощи формул (3.1), (3.2) сопоставляется некоторое подмножество управлений $\sigma = \sigma(\omega) \in \Sigma$, то задача 1 (N) является сужением задачи 1. Очевидно, что (ω^0, u^0) является решением задачи 1 (N). В свою очередь, задача 2 (N) имеет выпуклое множество управлений и оператор и функционалы зависят от новых управлений $\omega \in T(N)$ линейно. Покажем, что пара (ω^0, u^0) является решением также и задачи 2 (N).

Допустим, что существует некоторая другая пара (ω^1, u^1) с $u^1 = u(\omega^1)$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи 2 (N). Множество операторов $\mathfrak{A}_N \equiv \{A : A = A(\omega),\ \omega \in T^0(N)\}$ удовлетворяет условиям **А 1**—**А 3** и структура $\mathfrak{A}_N$ такая же, как и у $\mathfrak{A}_0$. Все $A \in \mathfrak{A}_N$ определяются так же, как и $A \in \mathfrak{A}_0$, только здесь вместо отображений Π_1 и Π_2 берутся многозначные отображения Π_1' и Π_2' такие, что

$$\Pi_1'(x) = \{\vartheta^1(x), \ldots, \vartheta^N(x)\} \subset \mathbf{R}^{m_1} \quad (x \in \Omega)$$

$$\Pi_2'(x') = \{\theta^1(x'), \ldots, \theta^N(x')\} \subset \mathbf{R}^{m_2} \quad (x' \in \Gamma).$$

Поэтому для $\mathfrak{A}_N$ применима теорема 1. Так как все операторы $A(\omega)$ с $\omega \in T(N)$ принадлежат $\overline{\mathrm{co}}\,\mathfrak{A}_N$, то, согласно теореме 1, существует последовательность $\{\omega^k\} \subset T^0(N)$ такая, что $u(\omega^k) \to u^1$ и $\omega^k \rightharpoonup \omega^1$. Из этих сходимостей, формул (3.1) и условия **А 7** следует, что

$$\begin{gathered} J_m\big(\omega^k, u(\omega^k)\big) \to J_m(\omega^1, u^1) \qquad (m = 0, 1, \ldots, m_0) \\ \text{и} \\ S\big(\omega^k, u(\omega^k)\big) \to S(\omega^1, u^1), \quad \text{когда} \quad k \to \infty. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Поскольку пара (ω^1, u^1) удовлетворяет всем ограничениям задачи 2 (N) и не совпадает с (ω^0, u^0), то начиная с некоторого K_0 будет $J_m\big(\omega^k, u(\omega^k)\big) \leqq 0$ $(m = 1, \ldots, s_0)$. Если бы было $J_0(\omega^1, u^1) \leqq J_0(\omega^0, u^0) - \delta_0$, где $\delta_0 > 0$, то в силу (3.12) мы получили бы противоречие с условием **А 10**. Поэтому $J_0(\omega^1, u^1) \geqq J_0(\omega^0, u^0)$ и пара (ω^0, u^0) является решением задачи 2 (N).

Из леммы 3.1 и гладкости функционала S следует, что (ω^0, u^0) как решение задачи 2 (N) удовлетворяет обычному условию оптимальности [8]:

существуют не все равные нулю числа $\lambda_0^N, \ldots, \lambda_{m_0}^N$ такие, что

$$\begin{gathered} \lambda_0^N \geqq 0, \ldots, \lambda_{s_0}^N \geqq 0, \qquad \sum_{m=1}^{s_0} \lambda_m^N J_m(\omega^0, u^0) = 0, \\ \sum_{m=0}^{m_0} \lambda_m^N J_m'(\omega^0)\,\delta\omega \geqq 0 \qquad \text{для всех} \qquad \omega^0 + \delta\omega \in T(N). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Здесь использована выпуклость $T(N)$ и то, что частные производные функционала S на паре (ω^0, u^0) равны нулю. Из (3.13) и формул (3.1), (3.4) вытекает, что для $\sigma \in \{\sigma^1, \ldots, \sigma^N\}$ выполняются соотношения (1.10) из утверждения теоремы 1 с числами $\lambda_0^N, \ldots, \lambda_{m_0}^N$. Без умаления общности можно считать, что эти числа нормированы так, чтобы наибольший модуль был равен единице.

В Σ существует счетное всюду плотное (в топологиях $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$) семейство управлений $\{\sigma^j\}$. Повторим предыдущие рассуждения с элементами $\sigma^1, \ldots, \sigma^N$ из этого семейства и устремим $N \to \infty$. Без умаления общности можно считать, что при этом $\lambda_m^N \to \lambda_m^0$ $(m = 0, 1, \ldots, m_0)$. Очевидно, что для набора $\{\lambda_0^0, \ldots, \lambda_{m_0}^0\}$ выполняются первые два соотношения в (1.10), кроме того, проводя этот предельный переход по $N \to \infty$ в последнем соотношении (1.10) с фиксированным σ^j, в итоге получим, что соотношение (1.10) с набором $\{\lambda_0^0, \ldots, \lambda_{m_0}^0\}$ выполняется для всех σ^j $(j = 1, 2, \ldots)$. По непрерывности оно справедливо и для всех $\sigma \in \Sigma$. В самом деле. Пусть $\sigma^* \equiv (\vartheta_1^*, \ldots, \vartheta_{m_1}^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_{m_2}^*)$. Мы можем выбрать подпоследовательность $\{\sigma^k\} \subset \{\sigma^j\}$ такую, что $\{\sigma^k\}$ сходится к σ^* по норме и почти всюду на Ω и Γ соответственно. Рассмотрим для примера выражение

$$J_1(\vartheta) \equiv \int_\Omega F_1\big(x, \vartheta(x), u^0(x)\big)\, dx.$$

Так как функция F_1 удовлетворяет условию Каратеодори, то функции $\delta F_1^k \equiv F_1\big(\cdot, \vartheta^k(\cdot), u^0(\cdot)\big) - F_1\big(\cdot, \vartheta^*(\cdot), u^0(\cdot)\big)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходятся к нулю почти всюду в Ω и также по мере. Отсюда и из условия **A 6** вытекает, что $J_1(\vartheta^k) \to J_1(\vartheta^*)$. Для выражения

$$J_2(\vartheta) \equiv \int_\Omega a_1\big(x, \vartheta(x), u^0(x)\big)\, w_1^1(x)\, dx$$

мы имеем, что функции $\delta a_1^k \equiv a_1\big(\cdot, \vartheta^k(\cdot), u^0(\cdot)\big) - a_1\big(\cdot, \vartheta^*(\cdot), u^0(\cdot)\big)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходятся к нулю почти всюду и по мере. Пусть выбран $\varepsilon > 0$. Существует некоторое k_0 такое, что при $k > k_0$ будет $\Omega = \Omega_\varepsilon' \cup \Omega_\varepsilon''$, где $\operatorname{mes} \Omega_\varepsilon'' < \varepsilon$ и для $x \in \Omega_\varepsilon'$ справедлива оценка $|\delta a_1^k(x)| < \varepsilon$. Согласно условию **A 1** $\big\|a_1(\cdot, \vartheta(\cdot), u^0(\cdot))\big\|_{L_2(\Omega)} \leqq c_1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, поэтому

$$|J_2(\vartheta^k) - J_2(\vartheta^*)| \leqq c_1 \Big(\int_{\Omega_\varepsilon''} |w_1^1|^2\, dx\Big)^{1/2} + \varepsilon \int_\Omega |w_1^1|\, dx,$$

если $k > k_0$. Отсюда, из произвольности $\varepsilon > 0$ и непрерывности интеграла как функции множества следует сходимость $J_2(\vartheta^k) \to J_2(\vartheta^*)$, когда $k \to \infty$. Аналогично рассматриваются другие слагаемые ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аркин, В. И., и В. Л. Левин: Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. Усп. матем. наук 27 (1972) 3, 21–78.

[2] Гогодзе, И. К.: Необходимые условия оптимальности в эллиптических задачах управления с интегральными ограничениями. Сообщ. Акад. Наук Груз. ССР 81 (1976) 1, 17–20.

[3] Данфорд, Н., и Дж. Т. Шварц: Линейные операторы. Общая теория (пер. с англ.). Москва: Изд-во Иностр. лит-ы 1962.

[4] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Изд-во Наука 1973.

[5] Лурье, К. А.: Оптимальное управление в задачах математической физики. Москва: Изд-во Наука 1975.

[6] Плотников, В. И.: Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида. Докл. Акад. Наук СССР **199** (1971), 275—278.
[7] Плотников, В. И., и В. И. Сумин: Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу. Ж. выч. мат. и мат. физики **12** (1972), 61—77.
[8] Пшеничный, Б. Н.: Необходимые условия экстремума. Москва: Изд-во Наука 1982.
[9] Райтум, У. Е.: О некоторых экстремальных задачах, связанных с линейным эллиптическим уравнением. Латв. мат. ежегодник (Рига) **4** (1968), 257—279.
[10] Райтум, У. Е.: Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями I. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 65—79.
[11] Райтум, У. Е.: Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями II. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 133—152.
[12] Райтум, У. Е.: К непрерывной зависимости от параметров решений почти линейных эллиптических уравнений. Латв. мат. ежегодник (Рига) **27** (1983), 100—115.
[13] Серовайский, С. Я.: Сравнительный анализ способов обоснования необходимых условий оптимальности в нелинейных системах. Математика (Изв. вузов) (Рукопись депонирована в ВИНИТИ в 1983 г., № 5896-83 Деп).
[14] Якубович, В. А.: Некоторые варианты абстрактного принципа максимума. Докл. Акад. Наук СССР **229** (1976), 816—819.
[15] Buttazzo, G., and G. Dal Maso: On Nemyckii operators and integral representation of local functionals. Randiconti di Matem. **3** (1983), 491—509.
[16] Goebel, M.: Optimal control of coefficients in linear elliptic equations II. Necessary optimality conditions. In: Inverse and Improperly Posed Problems in Differential Equations (Ed: G. Anger). Berlin: Academie-Verlag 1979, p. 105—113.
[17] Michel, P.: Necessary conditions for optimality of elliptic systems with positivity constraints on the state. SIAM J. Control and Optim. **18** (1980), 91—97.
[18] Tartar, L.: Problems de controle des coefficients dans des equations aux derivees partielles. Lect. Notes Econ. Math. Systems **107** (1975), 402—426.
[19] Zolezzi, T.: Necessary conditions for optimal controls of elliptic or parabolic problems. SIAM J. Control and Optim. **10** (1976), 594—607.

Manuskripteingang: 22. 05. 1985

VERFASSER:

Проф. д-р Улдис Ёренович Райтум

Вычислительный центр
Латвийского государственного университета им. П. Стучки
СССР-226250 **Рига**, бульв. Райниса 29