Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (4) 1986, S. 377–384

Über die Skalarisierung und Dualisierung von Vektoroptimierungsproblemen

A. GÖPFERT und CHR. GERTH

Es wird für Vektoroptimierungsprobleme eine solche Skalarisierung angegeben, daß Dualitätssätze vom Klötzler-Krotov-Typ gelten.

Доказана такая скаляризация для задач векторной оптимизации, что справедливы теоремы двойственности типа Клэцлера-Кротова.

For vector-optimization problems such a scalarization is given, that duality theorems of the Klötzler-Krotov type are valid.

Extremalprobleme mit *mehreren* unter Nebenbedingungen zu maximierenden Zielkriterien (Vektoroptimierungsprobleme) sind häufig Ergebnis der mathematischen Modellierung technischer, ökonomischer oder naturwissenschaftlicher Sachverhalte, sie treten aber auch bei mathematischen Fragestellungen direkt auf, wenn etwa bei der näherungsweisen Lösung eines (freien) Randwertproblems die Ansätze nicht alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen und freie Parameter so bestimmt werden müssen, daß zugleich mehrere Defekte minimiert werden müssen (vgl. JAHN [14]). Vektoroptimierungsprobleme sind mathematisch besonders interessant, wenn kein zulässiges Element existiert, welches alle Zielkriterien zugleich maximiert. Existiert ein solches, so gibt es eine Optimierungstheorie, die der für *skalare* Aufgaben, d. h. Extremalaufgaben mit *einem* Zielkriterium, weitgehend entspricht (vgl. etwa RITTER [20], ELSTER, DEUMLICH und NEHSE [6]). Existiert ein solches Element nicht (oder ist seine Existenz nicht sicher), so liegt ein Vektoroptimierungsproblem im eigentlichen Sinne vor. Die *systematische* Behandlung solcher Aufgaben begann im Prinzip gleichzeitig mit der Behandlung skalarer Aufgaben in den Arbeiten von KUHN und TUCKER [16] und ARROW, HURWICZ und UDSAWA [1], wenngleich der Begriff des Pareto-Optimums schon viel früher (1896, vgl. PARETO [19]) auftrat und einzelne Zweige der skalaren Optimierung ebenso viel früher (vgl. BRENTJES [5] oder FOCKE und GÖPFERT [7]) behandelt wurden.

Es sei $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ der zulässige Bereich und die Zielkriterien seien zu einer Abbildung $f: \mathfrak{B} \to Z$ zusammengefaßt, wobei Z ein Vektorraum ist. K sei ein konvexer Kegel in Z, $\{0\} \neq K \neq Z$ und $K \cap (-K) = \{0\}$, so daß in Z eine Halbordnung erklärt ist. $x_0 \in \mathfrak{B}$ heißt *Pareto-optimal* oder *funktional-effizient* bzw. $f(x_0)$ *effizient*, falls kein $x \in \mathfrak{B}$ existiert mit $f(x) \in f(x_0) + (K \setminus \{0\})$, oder gleichbedeutend, falls $\big(f(x_0) + K\big) \cap f(\mathfrak{B}) = f(x_0)$ ist.

Im folgenden Kapitel 1 gehen wir auf die *Skalarisierung* eines Vektoroptimierungsproblems

$$f(x) \to \mathrm{v} - \max!, \qquad x \in \mathfrak{B}, \qquad f: \mathfrak{B} \to Z \tag{1}$$

ein, d. h. auf die Frage, wie und welche Elemente der Menge der effizienten Punkte durch das Lösen skalarer Aufgaben gewonnen werden können.

Hierzu existiert bereits ein breites Spektrum an Resultaten (vgl. JAHN [14], GÄHLER [9], GERSTEWITZ, GÖPFERT und LAMPE [11]); wir zielen auf die Anwendung der Skalarisierung zur *Dualisierung* von (1). Ein Kernstück der Optimierungstheorie für skalare Probleme ist die Dualitätstheorie und ihre Ausnutzung. Schon vor dem oben erwähnten Beginn der systematischen Behandlung von Optimierungsproblemen belegen die komplementären Variationsprinzipien, wie z. B. die von Dirichlet und Thompson, die Suche nach Möglichkeiten, den Extremalwert einer Extremalaufgabe von oben und unten einzuschließen bzw. abzuschätzen (vgl. FRIEDRICHS [8] und ZEIDLER [24]). In der Sprechweise der Optimierungstheorie heißt das, Paare dualer Aufgaben ohne Dualitätslücke zu konstruieren. Für die Vektoroptimierung steht ebenso diese Forderung. Im Kapitel 2 folgt eine Konstruktion dualer Aufgaben für Vektoroptimierungsprobleme, die das von Krotov und KLÖTZLER [15] für skalare Probleme angegebene (und auf mehreren Vorträgen dieser Tagung ausgenutzte) Konzept und die in Kapitel 1 angegebene Skalarisierung ausnutzt.

1. Skalarisierung

Es seien Z, Z^* ein topologisch duales Paar lokalkonvexer Hausdorffscher Vektorräume und K^* der zu $K \subset Z$ duale Kegel. Eine wichtige Rolle spielt dann der Kegel (der auf $K \setminus \{0\}$ strikt positiven Funktionale)

$$K_E^* = \{z^* \in K^*: z^*z > 0 \text{ für alle } z \in K \setminus \{0\}\}.$$

Es sei $K_E^* \neq \emptyset$, dann betrachten wir für $z^* \in K_E^*$ (z^* beliebig, fest) die Probleme

$$z^*f(x) \to \max!, \quad x \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

Wird deren Menge optimaler Lösungen mit N_{z^*} und die Menge der Pareto-optimalen Lösungen von (1) mit M bezeichnet, so gilt bekanntlich (vgl. GÄHLER [9])

$$N := \cup \{N_{z^*}: z^* \in K_E^*\} \subseteqq M. \tag{3.1}$$

f heißt *konkavartig über* $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B}$ konvexe Teilmenge eines Vektorraumes X und $f(\mathfrak{B}) - K$ konvex ist (vgl. Vogel [23]). In dieser Situation gilt:

Ist

$$(K^{**})_E = \{z \in K^{**}: zz^* > 0 \textit{ für alle } z^* \in K^* \setminus \{0\}\} \neq \emptyset^{1)},$$

$\operatorname{int}(f(\mathfrak{B}) - K) \neq \emptyset$ *und f konkavartig über* $\mathfrak{B}$, *so ist* (vgl. U. LAMPE [18])

$$N \subseteqq M \subseteqq \cup \{N_{z^*}: z^* \in K^* \setminus \{0\}\}. \tag{3.2}$$

Zum Beweis solcher Aussagen benutzt man Trennungssätze.

Die *Einschließungen* (3.1) und (3.2) der Menge M durch Mengen von Lösungen skalarer Probleme lassen sich verschärfen, wenn man zu *eigentlich* funktional-*effizienten* Lösungen von (2) übergeht. Der Kegel K_E^* kann leer sein (z. B. für die lexikographische Halbordnung im $\mathbf{R}^n$). BITTNER [4] gab eine Bedingung an, daß K_E^* nichtleer ist:

$K_E^* \neq \emptyset$ *genau dann, wenn es einen konvexen Kegel* $C \subsetneqq Z$ *gibt mit* $\operatorname{int} C \supseteqq K \setminus \{0\}$.

Dies nutzt man aus zur Definition einer eigentlichen Effizienz.

Definition 1 (U. LAMPE [18]): $z_0 \in f(\mathfrak{B})$ heißt *eigentlich effizient* und x_0 *eigentlich Pareto-optimal*, falls es einen offenen konvexen Kegel $C \subsetneqq Z$ gibt mit $C \supseteqq K \setminus \{0\}$, so daß gilt

$$(z_0 + (C \cup \{0\})) \cap f(\mathfrak{B}) = z_0.$$

Die Menge der eigentlich Pareto-optimalen $x_0 \in \mathfrak{B}$ sei M_{e}.

[1]) Es gilt z. B.: Ist $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, so ist $K_E^{**} = \operatorname{int} K$.

Unter den genannten Voraussetzungen gelten folgende Effizienztheoreme:

a) $N \subseteqq M_{e_1} = M$; (4)

b) *ist f konkavartig, so ist sogar*

$$N = M_{e_1} \subseteqq M. \tag{5}$$

Der Schluß von $x_0 \in M_{e_1}$ auf $x_0 \in N$ in (5) benutzt einen Trennungssatz mit linearen stetigen Funktionalen als trennende Elemente.

Wir betrachten (4). Die erste Inklusion möchte verschärft werden. Dann muß man mehr Funktionale als nur die linearen stetigen (wie bei der Definition von N) zulassen. Dies würde sich auch in einem Trennungssatz bzw. in einer Verallgemeinerung des eigentlichen Effizienzbegriffes widerspiegeln. Von Gerstewitz stammt die Idee der folgenden Erweiterung von Definition 1, die dann in den Dissertationen von Gerstewitz [10] und Iwanow [13] in verschiedenen Richtungen erfolgreich ausgebaut wurde. Der Halbordnungskegel $K \subset Z$ sei ab jetzt zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen abgeschlossen.

Definition 2: $z_0 = f(x_0) \in f(\mathfrak{B})$ heißt *eigentlich effizient*, falls es eine nichtleere offene konvexe Menge $C \subsetneqq Z$ gibt mit $C \supseteqq K \setminus \{0\}$ und

$$\bar{C} \cap \big(c - (K \setminus \{0\})\big) = \emptyset \quad \text{für alle} \quad c \in \bar{C} \setminus C, \tag{6}$$

und x_0 Pareto-optimal bezüglich $C \cup \{0\}$ ist. Die Menge aller solchen $x_0 \in \mathfrak{B}$ sei M_{e_2}.

Es wurde gegenüber Definition 1 der *Kegel C* durch eine *konvexe Menge C* mit der zusätzlichen Eigenschaft (6) ersetzt. Letztere besagt, daß der Rand von C nirgends an den Rand von K „anliegt". Ist K abgeschlossen, so ist (6) bei eigentlicher Effizienz nach Definition 1 erfüllt, also $M_{e_1} \subseteqq M_{e_2}$, denn (6) ist äquivalent zu

$$\bar{C} + (K \setminus \{0\}) \subseteqq C, \tag{7}$$

und ist (gemäß Definition 1) C offener konvexer Kegel, $C \supseteqq K \setminus \{0\}$, dann folgt $\bar{C} + (K \setminus \{0\}) \subseteqq \bar{C} + C \subseteqq C$, also (7).

Die Äquivalenz von (6) und (7) folgt so: (7) $\Rightarrow$ (6): Wäre (6) nicht erfüllt, so gäbe es Elemente $c_1 \in \bar{C} \setminus C$ und $c_0 \in \bar{C}$ mit $c_0 \in c_1 - (K \setminus \{0\})$. Also wäre $c_0 = c_1 - k$ für ein $k \in K \setminus \{0\}$ und damit $c_1 = c_0 + k \in C$ im Widerspruch zur Inklusion $c_1 \in \bar{C} \setminus C$. (6) $\Rightarrow$ (7): Sei (7) nicht erfüllt. Dann existieren $\bar{c} \in \bar{C}$ und $k \in K \setminus \{0\}$ mit $\bar{c} + k \notin C$. Sei $(c_n) \subset C$ eine Folge mit $(c_n) \to \bar{c}$. Dann ist $c_n + k \in C$. (Für kleine $\alpha > 0$ ist sicher $c_n + \alpha k \in C$ (n fest). Gäbe es ein $\alpha_n > 0$ mit $c_n + \alpha_n k \in \bar{C} \setminus C$, so ist das ein Widerspruch zu (6). Man wähle dazu in (6) $c = c_n + \alpha_n k$. Dann müßte sein $\bar{C} \cap \{c_n\} = \emptyset$.) Also gilt $\bar{c} + k \in \bar{C}$, was $\bar{c} + k \in \bar{C} \setminus C$ nach sich zieht. Folglich existiert ein $c \in \bar{C} \setminus C$ mit $c - k = \bar{c} \in C$ im Widerspruch zu (6).

Es gilt nun folgender interessanter Satz. Dabei sei Z bezüglich K gerichtet, d. h. $Z = K - K$. Dies ist z. B. für int $K \neq \emptyset$ erfüllt.

Effizienzsatz (Gerstewitz und Iwanow [12]): $z_0 = f(x_0)$ *ist eigentlich effizient gemäß Definition 2 genau dann, wenn ein konkaves, stetiges, streng monotones Funktional* $s\colon Z \to \mathbb{R}$ *existiert mit Wertebereich* $(-\infty, +\infty)$, *so daß*

$$s(z_0) \geqq s(z) \quad \textit{für alle} \quad z \in f(\mathfrak{B}) \tag{8}$$

gilt. (Dabei heißt s *streng monoton*, wenn $s(z_1) > s(z_2)$ für $z_1 - z_2 \in K \setminus \{0\}$ ist.)

Ist N_s die Menge der $x_0 \in \mathfrak{B}$, die (8) bei gegebenem s lösen, so gilt also in Erweiterung von (4) bzw. (5) auch im nichtkonvexen Fall (aber dafür mit *mehr* skalarisierenden Funktionalen s) die Gleichheit

$$\cup \{N_s : \text{alle } s\} = M_{e_2} \ (\subseqq M). \tag{9}$$

Ein Beispiel von IWANOW [13] lehrt, daß man wirklich zu konvexen *Mengen* C übergehen muß, die *Kegel* C reichen für die Gleichheit in (9) nicht. Der Beweis des Effizienzsatzes verläuft ganz ähnlich zum konvexen Fall, wenn man einen entsprechenden Trennungssatz hat. Mit einiger Mühe [12] beweist man den

Trennungssatz: *Unter unseren Voraussetzungen an C (von Definition 2), an K und an Z, wobei es genügt, daß Z bezüglich $\bar{C}$ gerichtet ist*[2]), *gilt: Ist $A \subseteqq Z$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \cap C = \emptyset$, so existiert ein stetiges, streng monotones, konkaves Funktional s mit Wertebereich $(-\infty, +\infty)$, für das $s(A) \leqq 0$ und $s(C) > 0$ ist.*

Mit diesem Satz wird eine konvexe Menge der Art C von der nichtkonvexen Menge $f(\mathfrak{B}) - K$ getrennt, um obigen Effizienzsatz zu erhalten.

2. Dualisierung

Die Dualitätssätze in der Vektoroptimierung erfassen schon im konvexen Fall i. allg. nur die *eigentlich effizienten Punkte*, die in verschiedener Weise definiert wurden (vgl. oben, aber auch etwa BENSON [2]). Allgemein nennt man in der Vektoroptimierung eine Aufgabe

$$h(u) \to \text{v} - \min!, \qquad u \in H, \qquad h: H \to Z,$$

dual zur primalen Aufgabe (1), falls gilt

$$f(x) - h(u) \notin K \setminus \{0\} \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{B}, \quad u \in H. \tag{10}$$

Wünschenswert sind Dualaufgaben mit *verschwindender* Dualitätslücke, d. h., primal eigentlich effiziente Elemente $z_0 = f(x_0)$ sollen auch dual effizient sein (*direkter* Dualitätssatz) und umgekehrt (*inverser* Dualitätssatz).

Bei der Konstruktion der Dualaufgaben kann man zunächst zu einer Skalarisierung übergehen, die Dualitätstheorie mit einer Zielfunktion ausnutzen, und zu einer Vektoraufgabe zurückgehen. U. LAMPE [18] erlangte so erstmals Dualaufgaben mit den Mitteln der Stabilitätstheorie von Rockafellar. IWANOW [13] konnte später die Voraussetzungen abschwächen. Wir gehen unten auf die Erweiterung der Dualität im Sinne von Krotov und Klötzler auf Probleme (1) unter Beachtung von (10) ein. Es gibt auch Ansätze, ohne Skalarisierung zu arbeiten (BITRAN [3], TANINO und SAWARAGI [21]), jedoch sind diese Ansätze noch stark in der Entwicklung.

Wir gehen von folgender Form des Vektoroptimierungsproblems (1) aus:

$$\text{P}: f(x) \to \text{v} - \max!, \qquad x \in \mathfrak{B} = \{x \in U : g(x) \in V\},$$

wobei $f: U \to Z$, $U \subseteqq X$, $g: U \to Y$, $V \subseteqq Y$ ist. Z sei der Zielraum mit Voraussetzungen wie oben, insbesondere halbgeordnet mit einem abgeschlossenen konvexen Kegel K, $\{0\} \neq K \neq Z$ und $K \cap (-K) = \{0\}$, gerichtet bezüglich K; X und Y seien lokalkonvexe Räume. S sei die Menge der Funktionale s aus dem Effizienzsatz.

---

[2]) D. h., $Z = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\bar{C} + \lambda k_0)$ für ein $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Dies ist z. B. erfüllt, falls Z bezüglich K gerichtet ist.

Dem Problem P werde folgendes Dualproblem D zugeordnet:

$$\mathrm{D}: h \to \mathrm{v} - \min!, \qquad h \in \mathfrak{B}_{\mathrm{D}}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{D}} = \Big\{h \in Z: s(h) = \sup_{x \in U} \{s(f(x)) + \mathfrak{y}(g(x))\}$$

$$\text{für gewisse } s \in S \text{ und } \mathfrak{y}: Y \to \bar{\mathbf{R}} \text{ mit } \mathfrak{y}\big(g(x)\big) \geqq 0 \tag{12}$$

$$\text{und } g(x) \in V\ (x \in U)\Big\}.$$

Für P, D ist die *schwache Dualitätsbeziehung* (10) $f(\mathfrak{B}) \cap \big(\mathfrak{B}_{\mathrm{D}} + \{K \setminus \{0\}\}\big) = \emptyset$ erfüllt: Wäre $f(x_0) - h_0 \in K \setminus \{0\}$ für $x_0 \in \mathfrak{B}$, $h_0 \in \mathfrak{B}_{\mathrm{D}}$, so würde mit einem zu h_0 gehörigen s_0 folgen $s_0\big(f(x_0)\big) > s_0(h_0)$. Jedoch ist

$$s_0(h_0) = \sup_{x \in U} \big(s_0 f(x) + \mathfrak{y}(g(x))\big) \geqq s_0 f(x_0) + \mathfrak{y}\big(g(x_0)\big) \geqq s_0\big(f(x_0)\big).$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\sup_{x \in U} s\big(f(x)\big) < \infty \quad \text{für alle } s \in S \tag{13}$$

ist, läßt sich einer Idee von Klötzler folgend mit einem Funktional $\mathfrak{y}_0$, welches nicht nur die Werte 0 und $-\infty$ annimmt, starke Dualität nachweisen. Ist die Voraussetzung (13) nicht erfüllbar, so setzt man $\mathfrak{y}\big(g(x)\big) \geqq 0$ für $g(x) \in V$ und $\mathfrak{y}\big(g(x)\big) = -\infty$ sonst. Die genannte Voraussetzung ist z. B. in normierten Räumen erfüllt, wenn f über einer Umgebung von $\bar{\mathfrak{B}}$ beschränkt ist.

Starker Dualitätssatz: *Ist $z_0 = f(x_0)$ eigentlich effizient bez.* P, *d. h.: existiert ein s_0 mit*

$$s_0\big(f(x_0)\big) = \sup_{x \in \mathfrak{B}} \big(s_0(f(x))\big),$$

so ist z_0 vektorminimal bezüglich D.

Beweis: Wir bilden folgendes spezielle Funktional $\mathfrak{y}_0$:

$$\mathfrak{y}_0(y) = -\sup_{\substack{g(x)=y \\ x \in U}} \Big[s_0\big(f(x)\big) - \sup_{x \in \mathfrak{B}} \big(s_0(f(x))\big)\Big], \quad y \in g(U). \tag{14}$$

(Das entsprechende Funktional in Gerstewitz und Iwanow [12] ist wie dieses gebildet, setzt aber das erste Supremum über U an. Damit verschwindet es in V stets.) Dann ist für festes $y \in g(U)$, $y \in V$ sicher

$$\sup_{x \in \mathfrak{B}} s_0\big(f(x)\big) \geqq \sup_{\substack{g(x)=y \in V \\ x \in U}} s_0\big(f(x)\big),$$

also $\mathfrak{y}_0\big(g(x)\big) \geqq 0$ für alle $x \in U$, $g(x) \in V$. Für jedes $y \in g(U)$ folgt nun

$$\sup_{x \in \mathfrak{B}} s_0\big(f(x)\big) - \sup_{\substack{g(x)=y \\ x \in U}} \big[s_0\big(f(x)\big) + \mathfrak{y}_0(y)\big] = 0,$$

daher ist $s_0\big(f(x_0)\big) = \sup_{x \in U} \big[s_0\big(f(x)\big) + \mathfrak{y}_0\big(g(x)\big)\big]$, also $f(x_0) \in \mathfrak{B}_{\mathrm{D}}$ gemäß (12) ∎

Anmerkung: Es werde D nicht mit der *skalarisierten* Lagrangefunktion gebildet, sondern in der Form

$$h \to \mathrm{v} - \min!, \qquad h \in \mathfrak{B}_{\mathrm{D}},$$

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{D}} = \Big\{h \in Z: s(h) = \sup_{x \in U} \big[s\big(f(x) + L(x, g(x))\big)\big]$$

$$\text{für gewisse } s \in S \text{ und } L: U \times V \to K\Big\}. \tag{15}$$

Die Voraussetzung (13) sei erfüllt. Dann läßt sich für *konvexe* Aufgaben ein starker Dualitätssatz mit s linear beweisen, indem man setzt

$$L_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y \in V, \quad x \in U \qquad (16) \\ z_1 - z_2 & \text{für} \quad y \notin V, \quad x \in U \qquad (17) \end{cases}$$

mit $s_0(f(x_0)) = s_0(z_1)$, $s_0(z_2) = \sup\{s_0(f(x)) : x \in U\}$ (vgl. [12]). Die Bildung (17) entspricht (14). Will man sie auch in der Zeile (16) ansetzen, so kann man $L \in K$ nicht mehr sichern. Deshalb geht man bei Dualproblemen der Vektoroptimierung häufig zu skalarisierten Lagrangeschen Abbildungen $sL = \mathfrak{y}$ über (wie in (12)).

Mit den Dualproblemen (11), (12) bzw. (15) läßt sich ein inverser Dualitätssatz beweisen. Dazu benötigt man scharfe Voraussetzungen, weil ein Rückschluß von $h_0 \in \mathfrak{B}_D$ (effizient in D) auf ein Element $x_0 \in \mathfrak{B}$, also ein Argument von f, erforderlich ist, und weil ein Trennungssatz eingesetzt werden muß.

Inverser Dualitätssatz: *Unter den Voraussetzungen des starken Dualitätssatzes und*

(i) $f(\mathfrak{B}) - K$ *ist abgeschlossen,*
(ii) *für jedes* $s \in S$ *existiert ein* x_s *mit*

$$\sup_{x \in \mathfrak{B}} s(f(x)) = s(f(x_s)), \tag{18}$$

(iii) $\operatorname{int} K \neq \emptyset$

existiert zu jedem Minimalelement $h_0 \in \mathfrak{B}_D$ *ein* $x_0 \in \mathfrak{B}$, *so daß* $f(x_0)$ *eigentlich effizient bezüglich* P *ist und* $h_0 = f(x_0)$ *gilt.*

Beweis: Dieser verläuft in 3 Schritten. a) h_0 sei effizient bezüglich D. Genau dann ist

$$s(h_0) \leqq s(h) \quad \text{für alle} \quad h \in \mathfrak{B}_D \tag{19}$$

mit einem zu h gehörigem $s \in S$. b) Wäre $h_0 \notin f(\mathfrak{B}) - K$, so existiert nach obigem Trennungssatz ein $s \in S$ mit $s(f(\mathfrak{B}) - K) \leqq 0 < s(C)$. Dabei ist C eine konvexe Menge wie in Definition 2, die zu h_0 konstruiert werden kann. Aus der Annahmebedingung (18) folgt

$$\sup_{x \in \mathfrak{B}} s(f(x)) = s(f(x_s)) < s(h_0).$$

Nach dem direkten Dualitätssatz folgt hieraus $f(x_s) \in \mathfrak{B}_D$, daher ist $s(f(x_s)) < s(h_0)$ ein Widerspruch zu (19). c) Nach dem schwachen Dualitätssatz folgt $h_0 \in f(\mathfrak{B})$, wäre $h_0 = f(\bar{x}) - k$, $(\bar{x} \in \mathfrak{B},\ k \neq 0)$, aber es gilt $h_0 + (K \setminus \{0\}) \cap f(\mathfrak{B}) = \emptyset$. Somit ist $h_0 \in f(\mathfrak{B})$, $h_0 \in \mathfrak{B}_D$, und aus (12) folgt, daß ein $s_0 \in S$ existiert mit $s(h_0) \geqq s(f(x))$ für alle $x \in \mathfrak{B}$. Aus der Annahmebedingung (18) ergibt sich daher ein x_0 mit $f(x_0) = h_0$. Also ist $f(x_0)$ eigentlich effizient ∎

Bei U. LAMPE [18] findet sich eine interessante Diskussion zum inversen Dualitätssatz bei konkaven Aufgaben, wenn der Halbordnungskegel K nicht abgeschlossen zu sein braucht. Unter gewissen Voraussetzungen gilt:

Ist h_0 *effizient bezüglich* D *mit dem zugehörigen Funktional* $s_0 \in K_E^*(\neq \emptyset)$, *so gibt es eine effiziente Lösung* h_1 *von* D *und ein eigentlich effizientes Element* $f(x_1)$ *von* P, *so daß* $f(x_1) = h_1$, $s_0 h_0 = s_0 f(x_1)$ *und* $h_0 - f(x_1) \in \bar{K} \setminus (K \setminus \{0\})$ *gilt.*

Beispiele für Dualaufgaben zu Vektoroptimierungsproblemen finden sich in [10, 13]. In der Arbeit [17] von K. LAMPE wird das stochastische Suchverfahren von TIMMEL [22] auf ein Beispiel angewendet. Es gelingt eine gute Approximation der primalen und dualen Effizienzmenge, d. h. eine Einschließung der gesuchten Effizienzmenge *von oben* (d. h. in Richtungen des Halbordnungskegels K) und *von unten* (d. h. in Richtungen von $-K$).

LITERATUR

[1] ARROW, K. J., HURWICZ, L., und H. UZAWA: Studies in linear and nonlinear programming. Stanford: University Press 1958.

[2] BENSON, H. P.: An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. J. Math. Anal. Appl. 71 (1979), 232–241.

[3] BITRAN, G. R.: Duality for nonlinear multiple criteria optimization problems. J. Optimization Theory Appl. 35 (1981), 367–401.

[4] BITTNER, L.: Zur Existenz effizienter Punkte. Vortrag zur Tagung „Vektoroptimierung", 31. 10.–2. 11. 79 Ilmenau (unveröffentlicht).

[5] BRENTJES, S.: Untersuchungen zur Geschichte der linearen Optimierung von ihren Anfängen bis zur Konstituierung als selbständige mathematische Theorie — Eine Studie zum Problem der Entstehung mathematischer Disziplinen im 20. Jahrhundert. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1977.

[6] DEUMLICH, R., ELSTNER, K.-H., und R. NEHSE: Recent results on separation of convex sets. Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. optimization 9 (1978), 273–296.

[7] FOCKE, J., und A. GÖPFERT: 100 Jahre Gordanscher Alternativsatz für lineare Ungleichungen. Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. optimization 6 (1975), 873–880.

[8] FRIEDRICHS, K.: Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929, 13–20.

[9] GÄHLER, S.: Beiträge zur Polyoptimierung. Math. Nachr. 84 (1978), 333–344.

[10] GERSTEWITZ, CHR.: Beiträge zur Dualitätstheorie der nichtlinearen Vektoroptimierung. Dissertation A. Merseburg: Techn. Hochschule 1984.

[11] GERSTEWITZ, CHR., GÖPFERT, A., und U. LAMPE: Zur Dualität in der Vektoroptimierung. Vortrag zur Jahrestagung „Mathematische Optimierung" Vitte/Hiddensee 1980 (unveröffentlicht). Vgl. hierzu: JAHN, J.: Duality in vector optimization. Math. Progr. 25 (1983), 343–353, sowie GÖPFERT, A., und U. LAMPE: Über einige Resultate in der Vektoroptimierungstheorie. Wiss. Ber. Techn. Hochschule Leipzig 10 (1981), 28–31.

[12] GERSTEWITZ, CHR., und E. IWANOW: Dualität für nichtkonvexe Vektoroptimierungsprobleme. Wiss. Z. Techn. Hochschule Ilmenau (1984 eingereicht).

[13] IWANOW, E.: Beiträge zur Dualitätstheorie der Vektoroptimierung. Dissertation A. Ilmenau: Techn. Hochschule 1983.

[14] JAHN, J.: Scalarization in vector optimization. Math. Progr. 29 (1984), 203–218.

[15] KLÖTZLER, R.: Dualität bei diskreten Steuerungsproblemen. Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. optimization 12 (1981), 411–420.

[16] KUHN, H. W., and A. W. TUCKER: Nonlinear programming. In: Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1951 (Ed.: J. Neyman). Berkeley: University of California Press 1951, 481–492.

[17] LAMPE, K.: Numerischer Vergleich des dualen und primalen Vektoroptimierungsproblems nach dem stochastischen Suchverfahren von Timmel. Wiss. Z. Techn. Hochschule Ilmenau (1984 eingereicht).

[18] LAMPE, U.: Dualität und eigentliche Effizienz in der Vektoroptimierung. Semesterber. Humboldt-Universität Berlin 57 (1981), 45–54.

[19] PARETO, V.: Cours d' economic politique. Lausanne: Rouge 1896.

[20] RITTER, K.: Optimization theory in linear spaces I–III. Math. Ann. 182 (1969), 189 to 206, 183 (1969), 169–180 and 184 (1970), 133–154.

[21] TANINO, T., and Y. SAWARAGI: Conjugate maps and duality in multiobjective optimization. J. Optimization Theory Appl. 31 (1980), 473–500.

[22] TIMMEL, G.: Ein globales stochastisches Suchverfahren zur Bestimmung der Kompromißmenge bei statischen Optimierungsproblemen mit mehrfacher Zielsetzung. Dissertation A. Karl-Marx-Stadt: Techn. Hochschule 1979.
[23] VOGEL, W.: Vektoroptimierung in Produkträumen. Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain 1977.
[24] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis III (Teubner-Texte zur Math.: Bd. 16) Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1980.

Manuskripteingang: 10. 12. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. ALFRED GÖPFERT und Dr. CHRISTIANE GERTH
Sektion Mathematik
der Techn. Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna—Merseburg
DDR-4200 Merseburg, Otto-Nuschke-Straße