Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (5) 1986, S. 385–397

Über ebene Bimetallprobleme für das Außengebiet mit verschiedenen Rand- und Kontaktbedingungen

L. Jentsch

Es werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Randkontaktaufgaben der ebenen Elastostatik für das Außengebiet bewiesen, wenn der Rand und die Kontaktlinie zusammentreffen. Betrachtet werden zwei Randbedingungen und drei verschiedene Kontaktbedingungen. Die Differentialgleichung und die Kontaktbedingung werden durch Potentialansätze mit dem entsprechenden Kontakttensor im Kern a priori erfüllt. Für die Dichten der Potentiale erhält man singuläre Integralgleichungssysteme mit feststehenden Singularitäten, deren Fredholmeigenschaft aus Ergebnissen von Duduchava folgt.

Доказываются теоремы существования и единственности для внешних граничноконтактных задач плоской эластостатики в случае, когда контактная линия выходит из границы области. Рассматриваются два краевых условия и три разных контактных условия. Дифференциальному уравнению и контактным условиям а-приори удовлетворяют потенциалы с соответствующим контактным тензором в ядре. Для плотности потенциалов получаются системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями, условия Фредгольмовости которых доказываются с помощью результатов Дудучавы.

Existence and uniqueness theorems for boundary contact problems of plane elastostatics for the exterior domain are proved for the case when the boundary and the contact-line have common points. Two boundary and three different contact conditions are considered. The differential equation and the contact condition are a priori fulfilled by potentials having the corresponding contact tensor as kernel. The densities of the potentials satisfy systems of integral equations with fixed singularities, the Fredholm property of which follows from results of Duduchava.

1. Einleitung

Unter ebenem Bimetallproblem verstehen wir eine Randkontaktaufgabe der ebenen Thermoelastostatik, wenn die Trennlinie S_0 zwischen den elastisch homogenen Teilen, längs derer Kontaktbedingungen vorgeschrieben sind, bis zum äußeren Rand S reicht, auf dem Randbedingungen gestellt werden. Das Bimetallproblem mit der 2. Randbedingung (Normalspannung auf S vorgegeben) und der Kontaktbedingung K (fester Kontakt) ist in [2], mit der Kontaktbedingung G (reibungsfreies Gleiten ohne Abheben) in [3] und mit der Kontaktbedingung H (Spreizbedingung) in [4] behandelt. Die 1. Randbedingung (Verschiebungsvektor auf S vorgegeben) und alle drei genannten Kontaktbedingungen sind Gegenstand von [5]. In dieser Arbeit werden alle diese Probleme für das Außengebiet betrachtet. Wir beschränken uns auf den Fall der Elastostatik mit homogenen Kontaktbedingungen. Sind Volumenkräfte und ein Temperaturfeld vorhanden und die Kontaktbedingungen inhomogen, so kann mit Hilfe von partikulären Lösungen das Problem auf diesen Fall zurückgeführt werden (s. [2, 4]). Damit diese partikulären Lösungen im Unendlichen regulär sind, müssen die äußeren Daten für $|x| \to \infty$ von einer bestimmten Ordnung abnehmen. Die Lösung der gestellten Aufgaben suchen wir in Form von Potentialen über S, die a priori die Differentialgleichung und die Kontaktbedingungen erfüllen. Die Dichten dieser Potentiale genügen singulären Integralgleichungssystemen mit feststehenden Singularitäten. Mit Ergebnissen von Duduchava [1] folgt die Fredholmeigenschaft und daß der Index Null ist. Hierzu muß allerdings vorausgesetzt werden, daß S_0 und S sich in einem rechten Winkel treffen.

2. Problemstellung

Es bezeichne D ein einfachzusammenhängendes Gebiet der x_1x_2-Ebene, das den Koordinatenursprung enthält, $S_0 = D \cap \{x \mid x_2 = 0\}$ sei ein Intervall $I = (a, b)$ der x_1-Achse, $S = \partial D$, $S^\pm = S \cap \{x \mid x_2 \gtrless 0\}$, $D^\pm = D \cap \{x \mid x_2 \gtrless 0\}$, $CD = \{x \mid x \notin \overline{D}\}$, $CD^\pm = CD \cap \{x \mid x_2 \gtrless 0\}$, $K(x_0, r) = \{x \mid |x - x_0| < r\}$, $K_\varepsilon = K(\hat{a}, \varepsilon) \cup K(\hat{b}, \varepsilon)$ $\big(\hat{a} = (a, 0), \hat{b} = (b, 0)\big)$, $CD_\varepsilon = CD \setminus K_\varepsilon$, $CD_\varepsilon^\pm = CD^\pm \setminus K_\varepsilon$, $CS_0 = \{x \mid x_2 = 0\} \setminus \overline{I}$, ϱ_x kürzester Abstand des Punktes x von S auf der Parallelen zu $x_2 = 0$. Wir suchen Lösungen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = u_1(x)\,\boldsymbol{i}_1 + u_2(x)\,\boldsymbol{i}_2$ in folgender *Regularitätsklasse*:

$$\boldsymbol{u}|_{CD^+} \in C^0(\overline{CD_\varepsilon^+}) \cap C^1(\overline{CD_\varepsilon^+}) \cap C^\infty(CD^+),$$

$$\boldsymbol{u}|_{CD^-} \in C^0(CD_\varepsilon^-) \cap C^1(\overline{CD_\varepsilon^-}) \cap C^\infty(CD^-) \quad \text{für jedes } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$\boldsymbol{u}$ beschränkt in $CD^+ \cup CD^-$;

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} = O(\varrho_x^{-\gamma}), \quad \gamma < 1, \quad \text{in } (CD^+ \cup CD^-) \cap K_{\varepsilon_0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} = O(|x|^{-2}) \quad \text{für } |x| \to \infty.$$

Problem $\mathrm{I}_R(CD; \boldsymbol{w})$: Gesucht ist ein Vektor $\boldsymbol{u}$, der

a) der Differentialgleichung

$$\underset{(1)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } CD^+, \qquad \underset{(0)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } CD^- \quad \text{für } R = K, \tag{2.1K}$$

$$\underset{(0)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } CD^+, \qquad \underset{(1)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } CD^- \quad \text{für } R = G, H, \tag{2.1G, H}$$

b) der Randbedingung

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \quad \text{auf } S, \tag{2.2}$$

c) einer der folgenden Kontaktbedingungen auf CS_0 genügt $\big(\boldsymbol{n} = (0, -1)\big)$:
Kontaktbedingung $R = K$:

$$\{\boldsymbol{u}\}^+ - \{\boldsymbol{u}\}^- = 0, \qquad \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big\}^+ = \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big\}^-; \tag{2.3}$$

Kontaktbedingung $R = G$:

$$\Big\{\Big(\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big)_t\Big\}^+ = 0, \qquad \Big\{\Big(\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big)_t\Big\}^- = 0, \tag{2.4}$$

$$\Big\{\Big(\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big)\cdot \boldsymbol{n}\Big\}^+ = \Big\{\Big(\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\Big)\cdot \boldsymbol{n}\Big\}^-, \tag{2.5}$$

$$(\{\boldsymbol{u}\}^+ - \{\boldsymbol{u}\}^-)\cdot \boldsymbol{n} = 0; \tag{2.6}$$

Kontaktbedingung $R = H$:

$$\{\boldsymbol{u}_t\}^+ = \boldsymbol{0}, \quad \{\boldsymbol{u}_t\}^- = \boldsymbol{0}, \qquad (2.5),\ (2.6). \tag{2.7}$$

Hierbei ist

$$\underset{(i)}{A}\boldsymbol{u} = \mu_i \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda_i + \mu_i)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u},$$

$$\underset{(i)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_i\delta_{kj}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\,n_l + \lambda_i n_k\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu_i n_j\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right]\boldsymbol{i}_k$$

der Spannungsoperator, $\{\cdot\}^+ = \lim\limits_{x_2\to+0}\{\cdot\}$, $\{\cdot\}^- = \lim\limits_{x_2\to-0}\{\cdot\}$ und $\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}$.

Problem $\mathrm{II}_R(CD; \boldsymbol{P})$: An Stelle von (2.2) tritt die Randbedingung

$$\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \text{ auf } S^+, \quad \underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \text{ auf } S^- \text{ für } R = K, \tag{2.8K}$$

$$\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \text{ auf } S^+, \quad \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \text{ auf } S^- \text{ für } R = G, H. \tag{2.8G, H}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{n}'$ innerer Normaleneinheitsvektor von S, $\boldsymbol{n}'$ zeigt also aus CD heraus.

3. Grundlagen

Es werden jetzt einige Dinge bereitgestellt, die benötigt werden und in anderen Arbeiten bereits bewiesen sind. Da ist zunächst der *Eindeutigkeitssatz*. Die Translationen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{i}_2$, weiter sei

$$\boldsymbol{a}_1^+ = \begin{cases}\boldsymbol{i}_1 \text{ für } x_2 > 0\\ 0 \text{ sonst,}\end{cases} \qquad \boldsymbol{a}_1^- = \begin{cases}\boldsymbol{i}_1 \text{ für } x_2 < 0\\ 0 \text{ sonst,}\end{cases} \qquad \boldsymbol{a}_3 = -x_2\boldsymbol{i}_1 + x_1\boldsymbol{i}_2.$$

Eindeutigkeitssatz: *Die Probleme* $\mathrm{I}_R(D; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{I}_R(CD; \boldsymbol{0})$ *haben nur die reguläre Lösung* $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$, *die Probleme* $\mathrm{II}_K(D; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{II}_G(D; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{II}_H(D; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{II}_K(CD; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{II}_G(CD; \boldsymbol{0})$, $\mathrm{II}_H(CD; \boldsymbol{0})$ *haben in der Klasse der regulären Vektoren entsprechend die Lösung* $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1^+, \boldsymbol{a}_1^-, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1^+, \boldsymbol{a}_1^-, \boldsymbol{a}_2\}$, $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_2\}$.

Zum Beweis s. [2—6] ∎

Wir formulieren noch die sich hieraus ergebenden *notwendigen Lösbarkeitsbedingungen für die Außengebietaufgaben*:

Hat das Problem $\mathrm{II}_R(CD; \boldsymbol{P})$ eine reguläre Lösung, dann gilt

$$\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}_k\,ds = \int_S P_k\,ds = 0, \qquad k = 1, 2, \qquad \text{falls } R = K, \tag{3.1}$$

$$\int_{S^+} P_1\,ds = 0, \qquad \int_{S^-} P_1\,ds = 0, \qquad \int_S P_2\,ds = 0 \quad \text{falls } R = G, \tag{3.2}$$

$$\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}_2\,ds = \int_S P_2\,ds = 0 \quad \text{falls } R = H. \tag{3.3}$$

Die Lösungen suchen wir in Form von Potentialen mit den Kontakttensoren im Kern. Die *Kontakttensoren* $\mathsf{G}_R(x, y)$ setzen sich additiv aus der *Somiglianaschen Grundlösungsmatrix* und einer *Kompensatrix* $\mathsf{V}_R(x, y)$ zusammen, die für $x = y \in \{x \mid x_2 = 0\}$ feststehende Singularitäten hat. Die Spalten von $\mathsf{G}_R(x, y)$ genügen bezüglich x für $x \neq y$ (2.1) und erfüllen die Kontaktbedingung R. Die k-te Spalte von $\mathsf{G}_R(x, y)$ ist das Verschiebungsfeld an der Stelle x von zwei elastischen Halbebenen mit unterschiedlichen Laméschen Moduln, die gemäß der Kontaktbedingung R gekoppelt sind, wenn in y eine Einzelkraft in x_k-Richtung wirkt. Es ist explizit berechnet $\mathsf{G}_K(x, y)$ in [7], $\mathsf{G}_G(x, y)$ in [3], $\mathsf{G}_H(x, y)$ in [4]. Die Asymptotik dieser Kontakttensoren für $|x| \to \infty$ findet man in [5]. Mit diesen Kontakttensoren bilden wir *Potentiale vom Typ der einfachen Schicht*

$$\boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \mathsf{G}_R(x, y)\, \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y \tag{3.4}$$

und *vom Typ der doppelten Schicht*

$$\boldsymbol{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \left(T(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(y)\, ds_y. \tag{3.5}$$

In (3.5) ist $\boldsymbol{n}_y$ äußerer Normaleneinheitsvektor von S. Im weiteren ist $T(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)$ immer mit den Moduln des Halbraumes zu bilden, in dem y sich befindet, also $T(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) = \underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)$ für $y_2 > 0$, $T(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) = \underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)$ für $y_2 < 0$ falls $R = K$ und umgekehrt falls $R = G, H$. Die Potentiale (3.4), (3.5) erfüllen a priori (2.1) und die Kontaktbedingung R. Weiter gelten die folgenden Sätze (die Voraussetzung $S \subset C_n^{1,\alpha}$ bedeutet in ihnen, daß $S \subset C^{1,\alpha}$ ist und S die Gerade $x_2 = 0$ senkrecht schneidet).

Satz 3.1: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann ist*

$$\boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^\pm} \in C^{1,\beta}(D^\pm \setminus K_\varepsilon) \cap C^\infty(D^\pm),$$

$$\boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{\mathrm{C}D^\pm} \in C^{1,\beta}\big((\mathrm{C}D^\pm \setminus K_\varepsilon) \cap K(0, r)\big) \cap C^\infty(\mathrm{C}D^\pm),$$

$$\boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = O(1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi})}{\partial x_j} = O(\varrho_x^{-1/2}) \quad \text{für } x \to \hat{a} \text{ und } x \to \hat{b}.$$

Weiter gilt

$$\boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi}) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{V}_R(x; \boldsymbol{\varphi})}{\partial x_j} = O(|x|^{-2}) \quad \text{für } |x| \to \infty$$

genau dann, wenn

$$\int\limits_S \boldsymbol{\varphi} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{a}}_k\, ds = \int\limits_S \varphi_k\, ds = 0 \qquad (k = 1, 2) \quad \text{falls } R = K, \tag{3.6}$$

$$\int\limits_{S^+} \varphi_1\, ds = 0, \quad \int\limits_{S^-} \varphi_1\, ds = 0, \quad \int\limits_S \varphi_2\, ds = 0 \quad \text{falls } R = G, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_S \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{a}_2\, ds = \int\limits_S \varphi_2\, ds = 0 \quad \text{falls } R = H. \tag{3.8}$$

Zum Beweis vgl. [2: Sätze 2.1, 2.2], [3: Satz 3.1 und Lemma 3.1] sowie [4: Lemma 2.1] ∎

Satz 3.2: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{l,\beta}(S)$ $(l = 0, 1;\ 0 < \beta < \alpha \leqq 1)$, $\varphi_1(\hat{a}) = 0$, $\varphi_1(\hat{b}) = 0$ falls $R = H$. Dann ist*

$$\boldsymbol{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{D^\pm} \in C^{l,\beta}(D^\pm \setminus K_\varepsilon) \cap C^\infty(D^\pm),$$

$$\boldsymbol{W}_R(x; \boldsymbol{\varphi})|_{\mathrm{C}D^\pm} \in C^{l,\beta}\big((\mathrm{C}D^\pm \setminus K_\varepsilon) \cap K(0, r)\big) \cap C^\infty(\mathrm{C}D^\pm) \text{ für jedes feste } \varepsilon > 0,$$

$$W_R(x;\varphi) = O(1) \quad und \quad \frac{\partial W_R(x;\varphi)}{\partial x_j} = O(\varrho_x^{\beta-1}) \text{ für } x \to \hat{a} \text{ und } x \to \hat{b},$$

$$W_R(x;\varphi) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial W_R(x;\varphi)}{\partial x_j} = O(|x|^{-2}) \quad \text{für } |x| \to \infty.$$

Für $l = 1$ ist

$$f(x_0) := \lim_{D \ni x \to x_0 \in S} T(\partial_x, n_x)\, W_R(x;\varphi) = \lim_{CD \ni x \to x_0 \in S} T(\partial_x, n_x)\, W_R(x;\varphi) \in L_2^2(S).$$

Zum **Beweis** vgl. [5: Sätze 4.3, 4.4], zur Gleichheit der letzten beiden Grenzwerte vgl. [8: *Satz von Ljapunow-Tauber*/S. 228] ∎

Für die Potentiale (3.4), (3.5) gelten die Sprungrelationen ([9]; $x_0 \in S$)

$$\{T(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, V_R(x_0;\varphi)\}^\pm = \pm\varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S T(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, \mathsf{G}_R(x_0, y)\, \varphi(y)\, ds_y, \tag{3.9}$$

$$\{W_R(x_0;\varphi)\}^\pm = \mp\varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \big(T(\partial_y, n_y)\, \mathsf{G}_R(x_0, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \varphi(y)\, ds_y. \tag{3.10}$$

Dabei sind die Integrale auf der rechten Seite als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen, $\{\cdot\}^+$ und $\{\cdot\}^-$ bezeichnen den Grenzwert gegen $x_0 \in S$ von innen bzw. außen her, n_{x_0} ist die äußere Normale in $x_0 \in S$.

Der Ansatz $u(x) = W_R(x;\varphi)$ zur Lösung des Problems $\mathrm{I}_R(D; w)$ führt auf die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}\varphi := -\varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \big(T(\partial_y, n_y)\, \mathsf{G}_R(x_0, y)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} \varphi(y)\, ds_y = w(x_0)$$

der Ansatz $u(x) = W_R(x;\varphi)$ zur Lösung des Problems $\mathrm{I}_R(\mathrm{C}D; w)$ führt auf die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}^{\infty}\varphi := +\varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \big(T(\partial_y, n_y)\, \mathsf{G}_R(x, y)^{T}\big)^{T} \varphi(y)\, ds_y = w(x_0),$$

der Ansatz $u(x) = V_R(x;\varphi)$ zur Lösung des Problems $\mathrm{II}_R(D; P)$ führt auf die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}\varphi := \varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S T(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, \mathsf{G}_R(x_0, y)\, \varphi(y)\, ds_y = P(x_0)$$

und der Ansatz $u(x) = V_R(x;\varphi)$ zur Lösung des Problems $\mathrm{II}_R(\mathrm{C}Y; P)$ führt auf die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{\infty}\varphi := -\varphi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S T(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, \mathsf{G}_R(x_0, y)\, \varphi(y)\, ds_y = -P(x_0).$$

Wir betrachten diese vier Integralgleichungen im Raum $L_2^2(S)$, $S \subset C_n^{1,\alpha}$. In diesem sind $\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}^{\infty}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{II}\hat{R}}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{\infty}$ Fredholm-Operatoren mit dem Index Null (s. [2–5]) und für die Nullräume dieser Operatoren gilt $N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}) = \{0\}$ (s. [5]), $N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}K}^{\infty}) = \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3\}$ (s. [2]), $N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}G}^{\infty}) = \mathcal{L}\{a_1^+, a_1^-, a_2, a_3\}$ (s. [3]), $N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}H}^{\infty}) = \mathcal{L}\{a_2, a_3\}$ (s. [4]). Für die adjungierten Operatoren gilt $\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}^{*} = \mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{\infty}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{I}R}^{\infty *} = \mathcal{A}_{\mathrm{II}R}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{*} = \mathcal{A}_{\mathrm{I}R}^{\infty}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{\infty *} = \mathcal{A}_{\mathrm{I}R}$. Daher ist $\dim N(\mathcal{A}_{\mathrm{II}K}) = 3$, $\dim N(\mathcal{A}_{\mathrm{II}G}) = 4$, $\dim N(\mathcal{A}_{\mathrm{II}H}) = 2$, $\dim N(\mathcal{A}_{\mathrm{II}R}^{\infty}) = 0$. Ist

$\varphi \in L_2^2(S)$ eine Lösung von $\mathcal{A}\varphi = \boldsymbol{w}$ $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_{IR}, \mathcal{A}_{IR}^{\infty}, \mathcal{A}_{IIR}, \mathcal{A}_{IIR}^{\infty})$ und $\boldsymbol{w} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, dann ist auch $\varphi \in C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ (s. [2: Satz 3.3]).

4. Existenzsätze

Dem Existenzsatz für die 2. Randwertaufgabe für das Außengebiet stellen wir einen Hilfssatz voran, der zeigt, welche Bedingung man an die äußeren Kräfte stellen muß, um eine im Unendlichen reguläre Lösung zu erhalten.

Hilfssatz 4.1: *Sei $\varphi \in L_2^2(S)$ eine Lösung von $\mathcal{A}_{IIR}^{\infty}\varphi = -\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{a} \in N(\mathcal{A}_{IR}^{\infty})$. Es gilt $\int_S \varphi \cdot \boldsymbol{a}\, ds = (\varphi, \boldsymbol{a}) = 0$ genau dann, wenn $\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}\, ds = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a}) = 0$ ist.*

Beweis: Wegen $\mathcal{A}_{IR}^{\infty}\boldsymbol{a} = 0$ und $\mathcal{A}_{IR}^{\infty}\boldsymbol{a} - \mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$ ist $\mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{a}$. Weiter ist $-(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a}) = (\mathcal{A}_{IIR}^{\infty}\varphi, {}^5) = (\varphi, \mathcal{A}_{IIR}^{\infty *}\boldsymbol{a}) = (\varphi, \mathcal{A}_{IR}\boldsymbol{a}) = -2(\varphi, \boldsymbol{a})$ ∎

Satz 4.1: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{P} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann hat das Problem $\mathrm{II}_R(CD; \boldsymbol{P})$ eine Lösung $\boldsymbol{u}$, die darstellbar ist als Potential $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}_R(x; \varphi)$, wobei $\varphi \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eindeutige Lösung von $\mathcal{A}_{IIR}^{\infty}\varphi = -\boldsymbol{P}$ ist. Diese Lösung erfüllt alle Regularitätsbedingungen (mit $\gamma = 1/2$) mit Ausnahme des Verhaltens im Unendlichen. Es gilt*

$$\boldsymbol{V}_R(x; \varphi) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{V}_R(x; \varphi)}{\partial x_j} = O(|x|^{-2}) \quad \text{für } |x| \to \infty \tag{4.1}$$

genau dann, wenn $\boldsymbol{P}$ die Gleichgewichtsbedingungen (3.1)–(3.3) erfüllt.

Beweis: Wegen $\dim N(\mathcal{A}_{IIR}^{\infty *}) = 0$ hat $\mathcal{A}_{IIR}^{\infty}\varphi = -\boldsymbol{P}$ für beliebiges $\boldsymbol{P} \in L_2^2(S)$ eine eindeutige Lösung φ, die Regularität von $\boldsymbol{P}$ überträgt sich auf φ. Es ist dann nach Satz 3.1 $\boldsymbol{V}_R(x; \varphi)$ eine Lösung des Problems $\mathrm{II}_R(CD; \boldsymbol{P})$, die – bis auf das Verhalten im Unendlichen – regulär ist. Erfüllt $\boldsymbol{P}$ die Gleichgewichtsbedingungen (3.1)–(3.3), dann folgt nach Hilfssatz 4.1 für φ (3.6)–(3.8), also nach Satz 3.1 die Asymptotik (4.1) ∎

Hilfssatz 4.2: *In $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *})$ gibt es eine Basis ψ_1, ψ_2, ψ_3 mit den Eigenschaften*

$$\boldsymbol{V}_K(x; \psi_j) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} \quad \text{für } x \in D, \qquad j = 1, 2,$$

$$\boldsymbol{V}_K(x; \psi_3) = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 \quad \text{für } x \in D \text{ mit } \alpha_3 \neq 0,$$

$$\int_S \psi_i \cdot \boldsymbol{a}_k\, ds = (\psi_i, \boldsymbol{a}_k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \text{ und } i = 3,\ k = 1, 2, 3).$$

Beweis: Es ist $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty}) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\dim N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *}) = 3$. Sei $\psi \in N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *})$, dann ist $\mathcal{A}_{IIK}\psi = 0$, also wegen (3.9) $\boldsymbol{V}_K(x; \psi)$ reguläre Lösung des Problems $\mathrm{II}_K(D; 0)$. Für $x \in D$ ist nach dem Eindeutigkeitssatz $\boldsymbol{V}_K(x; \psi) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$. Sei $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, $\psi_3^{(1)}$ eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *})$. Das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_{3i}(\psi_i^{(1)}, \boldsymbol{a}_k) = 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{4.2}$$

hat eine nichttriviale Lösung $(\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33})$. Wir betrachten eine nichtsinguläre Matrix $(\lambda_{ij})_{i,j=1,2,3}$ und die neue Basis $\psi_j^{(2)} = \lambda_{j1}\psi_1^{(1)} + \lambda_{j2}\psi_2^{(1)} + \lambda_{j3}\psi_3^{(1)}$, dann ist wegen (4.2)

$$(\psi_3^{(2)}, \boldsymbol{a}_1) = 0, \qquad (\psi_3^{(2)}, \boldsymbol{a}_2) = 0. \tag{4.3}$$

Es ist $V_K(x; \psi_3^{(2)}) = \alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{a}_3$ in D mit $\alpha_3' \neq 0$. Denn sei $\alpha_3' = 0$, dann ist $V_K(x; \psi_3^{(2)})$ wegen (4.3) reguläre Lösung des Problems $\mathrm{I}_K(CD; \alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{a}_2)$, also $V_K(x; \psi_3^{(2)}) = \alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{a}_2$ in CD und wegen $V_K(x; \psi_3^{(2)}) = O(|x|^{-1})$ für $|x| \to \infty$ ist $V_K(x; \psi_3^{(2)}) \equiv 0$. Aus (3.9) folgt $\psi_3^{(2)} = 0$, was ein Widerspruch ist. Nun ist

$$V_K(x; \psi_1^{(2)}) = \alpha_{11} \boldsymbol{a}_1 + \alpha_{12} \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{13} \boldsymbol{a}_3 \quad \text{in } D,$$

$$V_K(x; \psi_2^{(2)}) = \alpha_{21} \boldsymbol{a}_1 + \alpha_{22} \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{23} \boldsymbol{a}_3 \quad \text{in } D,$$

$$V_K(x; \psi_3^{(2)}) = \alpha_1' \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{a}_3 \quad \text{in } D, \quad \alpha_3' \neq 0.$$

Wir betrachten die neue Basis

$$\psi_1^{(3)} = \psi_1^{(2)} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3'} \psi_3^{(2)}, \qquad \psi_2^{(3)} = \psi_2^{(2)} - \frac{\alpha_{23}}{\alpha_3'} \psi_3^{(2)}, \qquad \psi_3^{(2)} = \psi_3^{(3)},$$

dann ist für $j = 1, 2$

$$V_K(x; \psi_j^{(3)}) = V_K(x; \psi_j^{(2)}) - \frac{\alpha_{j3}}{\alpha_3'} V_K(x; \psi_3^{(2)}) \in \mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} \quad \text{in } D.$$

Wir gehen jetzt über zu der neuen Basis

$$\psi_1^{(4)} = \gamma_{11} \psi_1^{(3)} + \gamma_{12} \psi_2^{(3)}, \quad \psi_2^{(4)} = \gamma_{21} \psi_1^{(3)} + \gamma_{22} \psi_2^{(3)}, \quad \psi_3^{(4)} = \psi_3^{(3)}. \tag{4.4}$$

Die Bedingungen $(\psi_i^{(4)}, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ führen auf die linearen Gleichungssysteme für γ_{ij}

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) + \gamma_{12}(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) = 1, \quad \gamma_{21}(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) + \gamma_{22}(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ &\gamma_{11}(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) + \gamma_{12}(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) = 0, \quad \gamma_{21}(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) + \gamma_{22}(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) = 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese sind eindeutig lösbar, da die Koeffizientendeterminante ungleich Null ist. Denn wäre diese Null, dann hätte das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) + \beta_2(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_1) = 0 \\ \beta_1(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) + \beta_2(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) = 0 \end{aligned} \right\}$$

eine nichttriviale Lösung $(\beta_1, \beta_2)^T$, mit dieser gilt $\psi = \beta_1 \psi_1^{(3)} + \beta_2 \psi_2^{(3)} \neq 0$, $(\psi, \boldsymbol{a}_1) = 0$, $(\psi, \boldsymbol{a}_2) = 0$, $V_K(x; \psi) = \gamma_1 \boldsymbol{a}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{a}_2$ in D. Wie oben folgt aber $\psi = 0$, was ein Widerspruch ist. Damit (4.4) eine Basistransformation darstellt, ist noch zu zeigen

$$D' = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Wäre } D' = 0, \text{ dann müßte Rang} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = 1$$

sein wegen (4.5). Fassen wir die Gleichungen in der ersten Zeile von (4.5) als lineares Gleichungssystem für $(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_1)$, $(\psi_2^{(3)}, \boldsymbol{a}_1)$ auf, dann folgt

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ und analog Rang} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 1 \end{pmatrix} = 1$$

aus den Gleichungen der zweiten Zeile von (4.5). Aus beiden Beziehungen ergibt sich im Widerspruch zu (4.5) $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 0$.

Wir zeigen noch $(\psi_3^{(4)}, \boldsymbol{a}_3) \neq 0$. Sei $(\psi_3^{(4)}, \boldsymbol{a}_3) = 0$. Wir betrachten $\boldsymbol{V}_K(x; \psi_3^{(4)})$ in CD, dann ist wegen (3.9) und $\mathcal{A}_{IIK}\psi_3^{(4)} = 0$

$$\{T(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0}) \boldsymbol{V}_K(x_0; \psi_3^{(4)})\}^- = -2\psi_3^{(4)}(x_0). \tag{4.6}$$

Wegen (4.3) ist $\boldsymbol{V}_K(x; \psi_3^{(4)})$ im Unendlichen regulär, wir erhalten für die elastische Energie von $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}_K(x; \psi_3^{(4)})$ im Außengebiet

$$\begin{aligned}\int_{CD} E(\boldsymbol{u}(x))\,dx &= \int_S \boldsymbol{u} \cdot T(\partial_x, \boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{u}(x)\,ds_x \\ &= \int_S (\alpha_1'\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2'\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3'\boldsymbol{a}_3) \cdot 2\psi_3^{(4)}(x)\,ds_x = 0.\end{aligned}$$

Also ist $\boldsymbol{V}_K(x; \psi_3^{(4)})$ in CD eine starre Verschiebung, die aber wegen $\boldsymbol{V}_K(x; \psi_3^{(4)}) = O(|x|^{-1})$ für $|x| \to \infty$ identisch Null sein muß. Aus (4.6) folgt $\psi_3^{(4)}(x) = 0$, was ein Widerspruch ist. Schließlich erfüllt die Basis $\psi_1 = \psi_1^{(4)}$, $\psi_2 = \psi_2^{(4)}$, $\psi_3 = (\psi_3^{(4)}, \boldsymbol{a}_3)^{-1}\,\psi_3^{(4)}$, alle behaupteten Eigenschaften $(\alpha_i = (\psi_3^{(4)}, \boldsymbol{a}_3)^{-1}\,\alpha_i')$ ∎

Satz 4.2: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{w} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann hat das Problem $\mathrm{I}_K(CD; \boldsymbol{w})$ eine Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W}_K(x; \boldsymbol{\varphi}) + \eta_1\boldsymbol{a}_1 + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \eta_3\boldsymbol{V}_K(x; \hat{\psi}_3),$$

wobei $\hat{\psi}_3 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eine nichttriviale Lösung von $\mathcal{A}_{IK}^{\infty*}\psi = 0$ mit der Eigenschaft $(\hat{\psi}_3, \boldsymbol{a}_1) = 0$, $(\hat{\psi}_3, \boldsymbol{a}_2) = 0$ ist, η_1, η_2, η_3 eindeutig bestimmte Konstanten sind und $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eine Lösung von $\mathcal{A}_{IK}^{\infty}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}(x_0) - \eta_1\boldsymbol{a}_1 - \eta_2\boldsymbol{a}_2 - \eta_3\boldsymbol{V}_K(x_0; \hat{\psi}_3)$ ist.

Beweis: Der Ansatz $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W}_K(x; \boldsymbol{\varphi}) + \eta_1\boldsymbol{a}_1 + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \eta_3\boldsymbol{V}_K(x; \hat{\psi}_3)$ erfüllt a priori (2.1K) und die Kontaktbedingung (2.4). Die Randbedingung führt auf Grund von (3.10) auf die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_{IK}^{\infty}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}(x_0) - \eta_1\boldsymbol{a}_1 - \eta_2\boldsymbol{a}_2 - \eta_3\boldsymbol{V}_K(x_0; \hat{\psi}_3), \qquad x_0 \in S.$$

Diese besitzt eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S)$, wenn

$$(\boldsymbol{w} - \eta_1\boldsymbol{a}_1 - \eta_2\boldsymbol{a}_2 - \eta_3\boldsymbol{V}_K(x_0; \hat{\psi}_3), \psi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.7}$$

ist, wobei ψ_1, ψ_2, ψ_3 eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty*})$ mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.2 ist. Es ist $\hat{\psi}_3 = \delta_1\psi_1 + \delta_2\psi_2 + \delta_3\psi_3$, aber wegen $(\psi_i, \boldsymbol{a}_k) = \delta_{ik}$ $(k = 1, 2)$ muß sein $\hat{\psi}_3 = \delta_3\psi_3$ mit $\delta_3 \neq 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{V}_K(x_0, \hat{\psi}_3), \psi_k) &= \delta_3(\boldsymbol{V}_K(x_0; \psi_3), \psi_k) = \delta_3(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3, \psi_k) \\ &= \begin{cases}\delta_3\alpha_k + \delta_3\alpha_3(\boldsymbol{a}_3, \psi_k) & \text{für } k = 1, 2\\ \delta_3\alpha_3 & \text{für } k = 3.\end{cases}\end{aligned}$$

Also folgen aus (4.7) die Gleichungen

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{w}, \psi_1) - \eta_1 - \eta_3\big(\delta_3\alpha_1 + \delta_3\alpha_3(\boldsymbol{a}_3, \psi_1)\big) = 0,\\ &(\boldsymbol{w}, \psi_2) - \eta_2 - \eta_3\big(\delta_3\alpha_2 + \delta_3\alpha_3(\boldsymbol{a}_3, \psi_2)\big) = 0,\\ &(\boldsymbol{w}, \psi_3) - \eta_3\delta_3\alpha_3 = 0.\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich in eindeutiger Weise η_1, η_2, η_3 ∎

Bemerkung: Die Lösung des Satzes 4.2 ist im Unendlichen regulär, gehört aber sonst nicht zur Regularitätsklasse. Die Existenz einer regulären Lösung wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

Wir kommen jetzt zum Problem $\mathrm{I}_G(CD; \boldsymbol{w})$.

Hilfssatz 4.3: *In $N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty *})$ gibt es eine Basis $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4$ mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_j) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\} \quad \textit{für} \quad x \in D \qquad (j = 1, 2, 3),\\ &\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_4) = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{b}_3 + \alpha_4 \boldsymbol{b}_4 \quad \textit{für} \quad x \in D \textit{ mit } \alpha_4 \neq 0,\\ &\int_S \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{b}_k \, ds = (\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{b}_k) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3 \textit{ und } i = 4, k = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1^+$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1^-$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_3$ gesetzt wurde.

Beweis: Es ist $N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty}) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$, $\dim N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty *}) = 4$. Sei $D \in N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty *})$, dann ist in D das Potential $\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ (vgl. Beweis des Hilfssatzes 4.2). Sei $\boldsymbol{\psi}_1^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_2^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_3^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_4^{(1)}$ eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty *})$, dann können wir eine neue Basis $\boldsymbol{\psi}_1^{(2)}, \boldsymbol{\psi}_2^{(2)}, \boldsymbol{\psi}_3^{(2)}, \boldsymbol{\psi}_4^{(2)}$ finden, so daß gilt $(\boldsymbol{\psi}_4^{(2)}, \boldsymbol{b}_1) = 0$, $(\boldsymbol{\psi}_4^{(2)}, \boldsymbol{b}_2) = 0$, $(\boldsymbol{\psi}_4^{(2)}, \boldsymbol{b}_3) = 0$. Diese Bedingungen gewährleisten, daß $\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_4^{(2)})$ im Unendlichen regulär st. Wie oben folgt $\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_4^{(2)}) = \alpha_1' \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{b}_3 + \alpha_4' \boldsymbol{b}_4$ in D mit $\alpha_4' \neq 0$. Nun ist $\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_j^{(2)}) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ji} \boldsymbol{b}_i$ in D $(j = 1, 2, 3)$. Für die neue Basis

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(3)} = \boldsymbol{\psi}_j^{(2)} - \frac{\alpha_{j4}}{\alpha_4'} \boldsymbol{\psi}_4^{(2)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \boldsymbol{\psi}_4^{(3)} = \boldsymbol{\psi}_4^{(2)}$$

gilt dann $\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}_j^{(3)}) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ in D $(j = 1, 2, 3)$. Wir gehen jetzt über zu

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(4)} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ji} \boldsymbol{\psi}_i^{(3)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \boldsymbol{\psi}_4^{(4)} = \boldsymbol{\psi}_4^{(3)}.$$

Die Bedingungen (4.8) für $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3$ führen auf die drei linearen Gleichungssysteme $(j = 1, 2, 3)$

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_{ji} (\boldsymbol{\psi}_i^{(3)}, \boldsymbol{b}_k) = \delta_{jk} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{4.9}$$

Aus diesen lassen sich die γ_{ij} eindeutig bestimmen, da die Koeffizientendeterminante $\det\big((\boldsymbol{\psi}_i^{(3)}, \boldsymbol{b}_k)\big) \neq 0$ ist. Denn wäre diese Null, dann hätte das lineare Gleichungssystem $\beta_1(\boldsymbol{\psi}_1^{(3)}, b_k) + \beta_2(\boldsymbol{\psi}_2^{(3)}, b_k) + \beta_3(\boldsymbol{\psi}_3^{(3)}, b_k) = 0$ eine nichttriviale Lösung $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\mathrm{T}}$, mit dieser gilt

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \boldsymbol{\psi}_i^{(3)} \neq 0, \quad (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{b}_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \boldsymbol{b}_i \text{ in } D.$$

Wie oben folgt dann $\boldsymbol{\psi} = 0$, was ein Widerspruch ist. Aus (4.9) folgt $(k = 1, 2, 3)$

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & e_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & e_2 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & e_3 \end{pmatrix}$$

für $(e_1, e_2, e_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Da offenbar $1 \leqq \operatorname{Rang}(\gamma_{ij}) \leqq 3$ ist, kann dies nur im Falle $\operatorname{Rang}(\gamma_{ij}) = 3$ gelten. Damit ist $\boldsymbol{\psi}_1^{(4)}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_4^{(4)}$ eine Basis. Dabei ist $(\boldsymbol{\psi}_4^{(4)}, \boldsymbol{b}_4) \neq 0$, denn sonst folgt wie beim Beweis von Hilfssatz 4.2 für die elastische Energie von $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}_G(x; \psi_4^{(4)})$ für das Außengebiet

$$\int_{CD} E(\boldsymbol{u}(x))\, dx = \int_S (\alpha_1' \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2' \boldsymbol{b}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{b}_3 + \alpha_4' \boldsymbol{b}_4) \cdot 2\psi_4^{(4)}(x)\, ds_x = 0,$$

woraus man $\psi_4^{(4)} = 0$ erhält, was ein Widerspruch ist. Die Basis $\psi_1 = \psi_1^{(4)}$, $\psi_2 = \psi_2^{(4)}$, $\psi_3 = \psi_3^{(4)}$, $\psi_4 = (\varphi_4^{(4)}, \boldsymbol{b}_4)^{-1} \varphi_4^{(4)}$ $(\alpha_i = (\psi_4^{(4)}, \boldsymbol{b}_4)^{-1} \alpha_i')$ erfüllt dann alle behaupteten Eigenschaften ∎

Satz 4.3: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{w} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. *Dann hat das Problem* $\mathrm{I}_G(CD, \boldsymbol{w})$ *eine Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W}_G(x; \boldsymbol{\varphi}) + \eta_1^+ \boldsymbol{a}_1^+ + \eta_1^- \boldsymbol{a}_1^- + \eta_2 \boldsymbol{a}_2 + \eta_3 \boldsymbol{V}_G(x; \hat{\psi}_4),$$

wobei $\hat{\psi}_4 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine nichttriviale Lösung von* $\mathcal{A}_{IG}^{\infty *}\psi = 0$ *mit der Eigenschaft* $(\hat{\psi}_4, \boldsymbol{a}_1^+) = 0$, $(\hat{\psi}_4, \boldsymbol{a}_1^-) = 0$, $(\hat{\psi}_4, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist,* $\eta_1^+, \eta_1^-, \eta_2, \eta_3$ *eindeutig bestimmte Konstanten sind und* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine Lösung von* $\mathcal{A}_{IG}^{\infty}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}(x_0) - \eta_1^+ \boldsymbol{a}_1^+ - \eta_1^- \boldsymbol{a}_1^- - \eta_2 \boldsymbol{a}_2 - \eta_3 \boldsymbol{V}_G(x_0, \hat{\psi}_4)$ *ist.*

Beweis: Sei $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IG}^{\infty *})$ mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.3. Es muß $\hat{\psi}_4 = \delta_4 \psi_4$ mit $\delta_4 \neq 0$ sein. Aus den Lösbarkeitsbedingungen $(\boldsymbol{w} - \eta_1^+ \boldsymbol{a}_1^+ - \eta_1^- \boldsymbol{a}_1^- - \eta_2 \boldsymbol{a}_2 - \eta_3 \boldsymbol{V}_G(x_0, \hat{\psi}_4), \psi_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ ergeben sich in eindeutiger Weise $\eta_1^+, \eta_1^-, \eta_2, \eta_3$ ∎

Hilfssatz 4.4: *In* $N(\mathcal{A}_{IH}^{\infty *})$ *gibt es eine Basis* ψ_1, ψ_2 *mit den Eigenschaften*

$$\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_2\} \quad \text{für } x \in D,$$

$$\boldsymbol{V}_H(x; \psi_2) = \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 \quad \text{für } x \in D \text{ mit } \alpha_3 \neq 0,$$

$$(\psi_1, \boldsymbol{a}_2) = 1, \quad (\psi_2, \boldsymbol{a}_2) = 0, \quad (\psi_2, \boldsymbol{a}_3) = 1.$$

Beweis: Ausgehend von einer Basis $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}$ konstruieren wir eine Basis $\psi_1^{(2)}$, $\psi_2^{(2)}$ mit der Eigenschaft $(\psi_2^{(2)}, \boldsymbol{a}_2) = 0$. Es ist $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1^{(2)}) = \alpha_{12} \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{13} \boldsymbol{a}_3$ in D und $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_2^{(2)}) = \alpha_2' \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{a}_3$ in D mit $\alpha_3' \neq 0$. Für die neue Basis $\psi_1^{(3)} = \psi_1^{(2)} - \alpha_3'^{-1} \alpha_{13} \psi_2^{(2)}$, $\psi_2^{(3)} = \psi_2^{(2)}$ gilt dann $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1^{(3)}) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_2\}$ in D. Wir betrachten jetzt $\psi_1^{(4)} = \gamma \psi_1^{(3)}$, $\psi_2^{(4)} = \psi_2^{(3)}$. Die Bedingung $(\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_2) = 0$ hätte zur Folge, daß $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1^{(3)})$ im Unendlichen regulär ist, woraus wegen $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1^{(3)}) \in \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_2\}$ in D folgen würde $\boldsymbol{V}_H(x; \psi_1^{(3)}) \equiv 0$ und damit $\psi_1^{(3)} \equiv 0$. Für $\gamma = (\psi_1^{(3)}, \boldsymbol{a}_2)^{-1}$ gilt dann $(\psi_1^{(4)}, \boldsymbol{a}_2) = 1$. Weiter ist $(\psi_2^{(4)}, \boldsymbol{a}_3) \neq 0$, da sonst die elastische Energie von $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}_H(x; \psi_2^{(4)})$ für das Außengebiet

$$\int_{CD} E(\boldsymbol{u}(x))\, dx = \int_S (\alpha_2' \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3' \boldsymbol{a}_3) \cdot 2\psi_2^{(4)}(x)\, ds_x = 0$$

wäre, woraus $\psi_2^{(4)} = 0$ folgen würde. Die Basis $\psi_1 = \psi_1^{(4)}$, $\psi_2 = (\psi_2^{(4)}, \boldsymbol{a}_3)^{-1} \psi_2^{(4)}$ $(\alpha_i = (\psi_2^{(4)}, \boldsymbol{a}_3)\, \alpha_i')$ erfüllt alle behaupteten Eigenschaften ∎

Satz 4.4: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{w} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. *Dann hat das Problem* $\mathrm{I}_H(CD; \boldsymbol{w})$ *eine Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W}_H(x; \boldsymbol{\varphi}) + \eta_1 \boldsymbol{a}_2 + \eta_2 \boldsymbol{V}_H(x; \hat{\psi}_2),$$

wobei $\hat{\psi}_2 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine nichttriviale Lösung von* $\mathcal{A}_{IH}^{\infty *}\psi = 0$ *mit der Eigenschaft* $(\hat{\psi}_2, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist,* η_1, η_2 *eindeutig bestimmte Konstanten sind und* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine Lösung von* $\mathcal{A}_{IH}^{\infty}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w}(x_0) - \eta_1 \boldsymbol{a}_2 - \eta_2 \boldsymbol{V}_H(x_0; \hat{\psi}_2)$ *ist.*

Beweis: Sei ψ_1, ψ_2 eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IH}^{\infty *})$ mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.4. Dann muß $\hat{\psi}_2 = \delta_2 \psi_2$ mit $\delta_2 \neq 0$ sein. Aus den Lösbarkeitsbedingungen $(w - \eta_1 a_2 - \eta_2 V_H(x_0, \hat{\psi}_2), \psi_k) = 0$ $(k = 1, 2)$ ergeben sich in eindeutiger Weise η_1, η_2. ∎

5. Existenz von regulären Lösungen

Für die Randkontaktaufgaben für das Außengebiet mit Dirichletschen Randbedingungen beweisen wir nun noch die Existenz von regulären Lösungen, indem wir von einem anderen Potentialansatz ausgehen.

Satz 5.1: *Sei $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $w \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Dann hat das Problem* $\mathrm{I}_K(CD; w)$ *eine eindeutige reguläre Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$u(x) = \frac{1}{2} W_K(x; w) - \frac{1}{2} V_K(x; \psi) + \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 V_K(x; \hat{\psi}_3), \tag{5.1}$$

wobei $\hat{\psi}_3 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eine nichttriviale Lösung von $\mathcal{A}_{IK}^{\infty *}\psi = 0$ mit $(\hat{\psi}_3, a_1) = 0$, $(\hat{\psi}_3, a_2) = 0$ ist, $\psi \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ eine Lösung von

$$\mathcal{A}_{IIK}\psi = \{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0, w)\}^- \tag{5.2}$$

mit der Eigenschaft $(\psi, a_1) = 0$, $(\psi, a_2) = 0$ ist und η_1, η_2, η_3 eindeutig bestimmte Konstanten sind.

Beweis: Nach Satz 3.1 und Satz 3.2 ist u entsprechend (5.1) regulär $(\gamma = \mathrm{Max} \times (1/2, 1 - \beta))$, erfüllt (2.1$K$) und (2.3). Sei jetzt ψ_1, ψ_2, ψ_3 eine Basis von $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *})$ mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.2. Dann ist $\hat{\psi}_3 = \delta_3 \psi_3$ mit $\delta_3 \neq 0$. Weiter ist $\mathcal{A}_{IIK}^{*} = \mathcal{A}_{IK}^{\infty}$ und $N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty}) = \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3\}$. Aus der Bettischen Formel angewandt auf D mit $u = a_k$, $v = W_K(x; w)$ folgt $\int_S a_k \cdot \{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_k(x_0; w)\}^+ ds = 0$ und wegen

$$\{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0; w)\}^- = \{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0; w)\}^+, \tag{5.3}$$

(Satz von Ljapunow-Tauber) ist $(\{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0; w)\}^-, a_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Also besitzt (5.2) eine Lösung $\hat{\psi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$. Nun ist $N(\mathcal{A}_{IIK}) = N(\mathcal{A}_{IK}^{\infty *}) = \mathcal{L}\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Es hat dann $\psi = \hat{\psi} - (\hat{\psi}, a_1)\psi_1 - (\hat{\psi}, a_2)\psi_2$ die im Satz behaupteten Eigenschaften.

Wir betrachten $u^*(x) = \frac{1}{2} W_K(x; w) - \frac{1}{2} V_K(x; \psi)$. Dann ist wegen (3.10)

$$\{u^*(x_0)\}^- - \{u^*(x_0)\}^+ = w(x_0). \tag{5.4}$$

Weiter ist wegen (3.9), (5.2) und (5.3)

$$\begin{aligned}\{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) u^*(x_0)\}^+ &= \frac{1}{2} \{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0; w)\}^+ \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{\psi(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_S T(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, \mathsf{G}_{\bar{K}}(x_0, y)\, \psi(y)\, ds_y\right\} \\ &= \frac{1}{2} \{T(\partial_{x_0}, n_{x_0}) W_K(x_0; w)\}^- - \frac{1}{2} \mathcal{A}_{IIK}\psi = 0.\end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz ist $\boldsymbol{u}^*(x) = \varkappa_1\boldsymbol{a}_1 + \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3$ in D, also nach (5.4) $\{\boldsymbol{u}^*(x_0)\}^- = \boldsymbol{w}(x_0) + \varkappa_1\boldsymbol{a}_1 + \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3(x_0)$ und damit nach (5.1) ($\delta_3 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$)

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{u}(x_0)\}^- &= \boldsymbol{w}(x_0) + \varkappa_1\boldsymbol{a}_1 + \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3 + \eta_1\boldsymbol{a}_1 + \eta_2\boldsymbol{a}_2\\ &\quad + \eta_3\delta_3(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{w}(x_0) + (\varkappa_1 + \eta_1 + \eta_3\delta_3\alpha_1)\,\boldsymbol{a}_1\\ &\quad + (\varkappa_2 + \eta_2 + \eta_3\delta_3\alpha_2)\,\boldsymbol{a}_2 + (\varkappa_3 + \eta_3\delta_3\alpha_3)\,\boldsymbol{a}_3.\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen

$$\varkappa_1 + \eta_1 + \eta_3\delta_3\alpha_1 = 0, \quad \varkappa_2 + \eta_2 + \eta_3\delta_3\alpha_2 = 0, \quad \varkappa_3 + \eta_3\delta_3\alpha_3 = 0$$

ergeben sich eindeutig η_1, η_2, η_3, mit diesen gilt $\{\boldsymbol{u}(x_0)\}^- = \boldsymbol{w}(x_0)$, was zu beweisen war ∎

Satz 5.2: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{w} \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. *Dann hat das Problem* $\mathrm{I}_G(CD; \boldsymbol{w})$ *eine eindeutige reguläre Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{W}_G(x; \boldsymbol{w}) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{V}_G(x; \boldsymbol{\psi}) + \eta_1^+\boldsymbol{a}_1^+$$
$$+ \eta_1^-\boldsymbol{a}_1^- + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \eta_3\boldsymbol{V}_G(x; \hat{\boldsymbol{\psi}}_4),$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\psi}}_4 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine nichttriviale Lösung von* $\mathcal{A}_{\mathrm{I}G}^{\infty *}\boldsymbol{\psi} = 0$ *mit* $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_4, \boldsymbol{a}_1^+) = 0$, $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_4, \boldsymbol{a}_1^-) = 0$, $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_4, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist*, $\boldsymbol{\psi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine Lösung von*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{II}G}\boldsymbol{\psi} = \{T(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{W}_G(x_0, \boldsymbol{w})\}^- \tag{5.5}$$

mit der Eigenschaft $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{a}_1^+) = 0$, $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{a}_1^-) = 0$, $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist und* $\eta_1^+, \eta_1^-, \eta_2, \eta_3$ *eindeutig bestimmte Konstanten sind.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 5.1. Es sei $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4$ eine Basis von $N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}G}^{\infty *})$ mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.3. Dann ist $\hat{\boldsymbol{\psi}}_4 = \delta_4\boldsymbol{\psi}_4$ mit $\delta_4 \neq 0$. Die rechte Seite von (5.5) ist orthogonal zu $N(\mathcal{A}_{\mathrm{II}G}^*) = N(\mathcal{A}_{\mathrm{I}G}^\infty) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}_1^+, \boldsymbol{a}_1^-, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, also besitzt (5.5) eine Lösung $\hat{\boldsymbol{\psi}} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$. Es ist dann $\boldsymbol{\psi} = \hat{\boldsymbol{\psi}} - (\hat{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{a}_1^+)\,\boldsymbol{\psi}_1 - (\hat{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{a}_1^-)\,\boldsymbol{\psi}_2 - (\hat{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{\psi}_3$ eine Lösung von (5.5) mit den behaupteten Eigenschaften. Wie oben folgt ($\delta_3 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$)

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{u}(x_0)\}^- &= \boldsymbol{w}(x_0) + \varkappa_1^+\boldsymbol{a}_1^+ + \varkappa_1^-\boldsymbol{a}_1^- + \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3(x_0)\\ &\quad + \eta_1^+\boldsymbol{a}_1^+ + \eta_1^-\boldsymbol{a}_1^- + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \eta_3\delta_3\big(\alpha_1\boldsymbol{a}_1^+ + \alpha_2\boldsymbol{a}_1^- + \alpha_3\boldsymbol{a}_2\\ &\quad + \alpha_4\boldsymbol{a}_3(x_0)\big) = \boldsymbol{w}(x_0),\end{aligned}$$

wenn $\eta_1^+, \eta_1^-, \eta_2, \eta_3$ die eindeutige Lösung von $\varkappa_1^+ + \eta_1^+ + \eta_3\delta_3\alpha_1 = 0$, $\varkappa_1^- + \eta_1^- + \eta_3\delta_3\alpha_2 = 0$, $\varkappa_2 + \eta_2 + \eta_3\delta_3\alpha_3 = 0$, $\varkappa_3 + \eta_3\delta_3\alpha_4 = 0$ ist ∎

Satz 5.3: *Sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{w} \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, *und* $w_1(\hat{a}) = 0$, $w_1(\hat{b}) = 0$. *Dann hat das Problem* $\mathrm{I}_H(CD; \boldsymbol{w})$ *eine eindeutige reguläre Lösung, die darstellbar ist in der Form*

$$\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{W}_H(x; \boldsymbol{w}) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{V}_H(x; \boldsymbol{\psi}) + \eta_1\boldsymbol{a}_2 + \eta_2\boldsymbol{V}_H(x; \hat{\boldsymbol{\psi}}_2),$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\psi}}_2 \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine nichttriviale Lösung von* $\mathcal{A}_{\mathrm{I}H}^{\infty *}\boldsymbol{\psi} = 0$ *mit* $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_2, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist*, $\boldsymbol{\psi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine Lösung von*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{II}H}\boldsymbol{\psi} = \{T(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{W}_H(x_0; \boldsymbol{w})\}^- \tag{5.6}$$

mit der Eigenschaft $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{a}_2) = 0$ *ist und* η_1, η_2 *eindeutig bestimmte Konstanten sind.*

Beweis: Sei ψ_1, ψ_2 eine Basis mit den Eigenschaften des Hilfssatzes 4.4, dann ist $\hat{\psi}_2 = \delta_2\psi_2$ mit $\delta_2 \neq 0$. Wie oben folgt, daß (5.6) eine Lösung ψ mit $(\psi, \boldsymbol{a}_2) = 0$ hat, mithin ist $V_H(x; \psi)$ im Unendlichen regulär. Weiter gilt für $2\boldsymbol{u}^*(x) = W_H(x; \boldsymbol{w}) - V_H(x; \psi)$ (5.4) und $\boldsymbol{u}^*(x) = \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3$ in D. Daraus folgt ($\delta_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$)

$$\{\boldsymbol{u}(x_0)\}^- = \boldsymbol{w}(x_0) + \varkappa_2\boldsymbol{a}_2 + \varkappa_3\boldsymbol{a}_3(x_0) + \eta_1\boldsymbol{a}_2 + \eta_2\delta_2\big(\alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3(x_0)\big) = \boldsymbol{w}(x_0),$$

wenn η_1, η_2 die eindeutige Lösung von $\varkappa_2 + \eta_1 + \eta_2\delta_2\alpha_2 = 0$, $\varkappa_3 + \eta_2\delta_2\alpha_3 = 0$ ist ∎

LITERATUR

[1] DUDUCHAVA, R.: Integral Equations in Convolution with Discontinuous Presymbols, Singular Integral Equations with Fixed Singularities and Their Applications to Some Problems of Mechanics (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 24). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1979.

[2] JENTSCH, L.: Über ein Bimetallproblem in der Ebene. Z. Anal. Anw. **1** (1982) 5, 67–92.

[3] JENTSCH, L.: Über ein Bimetallproblem der Ebene mit der Kontaktbedingung des reibungsfreien Gleitens. Proc. Tbilisi Univ. (USSR) **257** (1985), 83–102.

[4] JENTSCH, L.: Über ein ebenes Bimetallproblem mit einer speziellen Rißbildung. ZAMM **66** (1986), 351 ff.

[5] JENTSCH, L.: Über ebene Bimetallprobleme mit verschiedenen Kontaktbedingungen und Dirichletschen Randbedingungen. Z. Anal. Anw. **5** (1985), 437–453.

[6] JENTSCH, L.: Bimetallprobleme mit verschiedenen Kontaktbedingungen. In: Probleme und Methoden der Mathematischen Physik (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 63). Vortrag auf der 8. Tagung über Probleme und Methoden der Math. Physik, Karl-Marx-Stadt (DDR) 20.–24. Juni 1983 (Hrsg.: V. Friedrich u. a.). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1984, 111–121.

[7] JENTSCH, L.: Die Greenschen Kontakttensoren der Elastostatik für zwei fest verbundene Halbebenen. ZAMM **61** (1981), 343–344.

[8] КУПРАДЗЕ, В. Д., ГЕГЕЛИЯ, Т. Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ, М. О., и Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ: Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Изд-во Наука 1976.

[9] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik (Schriftenr. ZIIM Akad. Wiss. DDR: H. 24). Berlin: Akademie-Verlag 1976.

Manuskripteingang: 25. 06. 1984

VERFASSER:

Prof. Dr. LOTHAR JENTSCH
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 39–41