Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (5) 1986, S. 399–407

Approximation einer parabolischen Itogleichung

W. GRECKSCH

Eine stochastische Evolutionsgleichung über einem Evolutionstripel $V \subset H \subset V^*$ von Hilberträumen wird durch eine Itogleichung mit Werten in einem Hilbertraum approximiert.

Стохастическое эволюционное уравнение на гильбертовых пространствах $V \subset H \subset V^*$ аппроксимируется уравнением Ито со значениями в гильбертовом пространстве.

A stochastic equation of evolution on Hilbert spaces $V \subset H \subset V^*$ is approximated by an Ito equation with values in a Hilbert space.

0. Einleitung

Über einem Evolutionstripel $V \subset H \subset V^*$ von Hilberträumen wird die Evolutionsgleichung

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A\big(\omega, s, X(s)\big)\, ds + w(t)$$

unter den in [4] getroffenen Voraussetzungen betrachtet. Existenz-, Eindeutigkeits- und Approximationsaussagen werden in der Literatur mittels des Galerkinverfahrens [4] und mittels Diskretisierungsmethoden [5] gewonnen. In der Theorie der stochastischen Evolutionsgleichungen wird die obige Gleichung als Gleichung in V^* betrachtet, die Lösung $\big(X(t)\big)$ ist ein V-wertiger Prozeß, der als H-wertiger Prozeß realisierungsweise stetig ist. Durch das Vorhandensein der verschiedenen Räume ist natürlich eine Anwendung von Fixpunktprinzipien nicht unmittelbar möglich. In der vorliegenden Arbeit wird der stochastischen Evolutionsgleichung eine Schar von Itogleichungen über einem Hilbertraum zugeordnet, die die Ausgangsgleichung approximieren. Auf die Hilfsaufgaben kann der Fixpunktsatz von Banach angewendet werden (vgl. auch [3]).

1. Formulierung des Problems

Zunächst werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$	Vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.
$\mathsf{E}(\cdot)$	Erwartungsoperator.
$(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}$	Familie von σ-Algebren aus $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$ für $s \leqq t$.
H	Separabler Hilbertraum.
$\mathscr{B}_Z$	σ-Algebra der Borelmengen eines Banachraumes Z.
$(w(t), \mathfrak{F}_t)$	H-wertiger Wienerprozeß mit einem Kernoperator Q als Kovarianzoperator.

(V, H, V^*)	Evolutionstripel von Hilberträumen, d. h., es gilt $V \subset H \subset V^*$, wobei V in H bezüglich der H-Norm stetig und dicht eingebettet ist. Es gibt eine positive Konstante γ_1, so daß für alle $v \in V$ gilt $\|v\|_H \leqq \gamma_1 \|v\|_V$. Für alle $v^* \in V^*$ mit $v^* \in H$ und alle $v \in V$ gilt $v^*(v) = (v^*, v)_H$.
J	Dualitätsbbildung $J: V \to V^*$.
I	Einbettungsoperator $I: V \to V^*$.
$\langle v^*, v\rangle$	Wert des linearen stetigen Funktionales $v^* \in V^*$ an der Stelle $v \in V$.

Es sei $A: \Omega \times [0, T] \times V \to V^*$, so daß für alle $(t, v) \in [0, T] \times V$ die Abbildung $A(\cdot, t, v)$ bezüglich $\mathfrak{F}_t$ meßbar ist. Es wird die stochastische Evolutionsgleichung

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(\omega, s, X(s))\, ds + w(t) \tag{1.1}$$

unter den folgenden Voraussetzungen betrachtet:

(V 1) X_0 ist ein $(\mathfrak{F}_0, \mathscr{B}_H)$-meßbares H-wertiges Element mit $\mathsf{E}\, \|X_0\|_H^2 < \infty$.

(V 2) Für alle $(\omega, t, v_{1,2}) \in \Omega \times [0, T] \times V$ gilt mit einem $c_1 \in \mathbf{R}$:

$$2\langle A(\omega, t, v_1) - A(\omega, t, v_2), v_1 - v_2\rangle \leqq c_1 \|v_1 - v_2\|_H^2.$$

(V 3) Für alle $(\omega, t, v) \in \Omega \times [0, T] \times V$ gilt mit einem $\alpha \in \mathbf{R}_+$

$$2\langle A(\omega, t, v), v\rangle + \alpha \|v\|_V^2 \leqq f(\omega, t) + c_1 \|v\|_H^2,$$

wobei $f(\cdot, \cdot)$ eine nichtnegative Funktion mit $\mathsf{E} \int_0^T f(\omega, t)\, dt < \infty$ ist.

(V 4) Für alle $(\omega, t, v_{1,2}) \in \Omega \times [0, T] \times V$ gilt mit einem $\alpha_1 \in \mathbf{R}^+$

$$\|A(\omega, t, v_1) - A(\omega, t, v_2)\|_{V^*} \leqq \alpha_1 \|v_1 - v_2\|_V.$$

Bemerkung: Im folgenden wird — wie üblich — das Argument ω nicht mitgeschrieben.

Aus [4] folgt insbesondere, daß es einen bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmten $(\mathfrak{F}_t, \mathscr{B}_V)$-meßbaren V-wertigen Prozeß $(X(t))$ gibt, der als H-wertiger Prozeß realisierungsweise stetig ist und der die Gleichung (1.1) — als Gleichung in V^* — für fast alle (ω, t) erfüllt. Der Lösungsprozeß kann mittels des Galerkinverfahrens [4] oder mittels Diskretisierung [5] approximiert werden. Durch die Betrachtung von (1.1) über einem Evolutionstripel können natürlich Fixpunktaussagen, wie sie bei Itogleichungen in einem Hilbertraum üblich sind, nicht angewendet werden. Im folgenden werden der Evolutionsgleichung (1.1) Itogleichungen in einem Hilbertraum zugeordnet, deren Lösungen die Lösung von (1.1) approximieren.

Es sei (e_n) ein vollständiges Orthonormalsystem in H, das gleichzeitig ein vollständiges Orthogonalsystem in V ist. Es gilt

$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t)\, e_i \quad \text{mit} \quad w_i(t) := (w(t), e_i)_H$$

gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$ im quadratischen Mittel in H. Für festes n ist $w^n(t) := \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\, e_i$ als ein V-wertiges Martingal mit der Charakteristik $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \|e_i\|_V^2\, t$ auffaßbar, wobei $\mathsf{E} w_i^2(t) = \sigma_i^2 t$ gilt. Im Kapitel 3 wird gezeigt, daß die Lösungen der Gleichungen

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t A(s, X_n(s))\, ds + w^n(t) \tag{1.2}$$

die Lösung der Gleichung (1.1) für $n \to \infty$ approximieren (Satz 3.1).

Zur Approximation der Lösung von (1.2) für festes n wird eine vom deterministischen Fall [2] her bekannte Konstruktion angewendet. Für $\varepsilon > 0$ definiert $J_\varepsilon := I + \varepsilon^2 J$ eine stark monotone lineare stetige Abbildung von V auf V^*. Somit ist J auch eineindeutig. Auf V wird durch

$$(v_1, v_2)_{V_\varepsilon} := \langle J_\varepsilon v_1, v_2\rangle = \langle I v_1, v_2\rangle + \varepsilon^2 \langle J v_1, v_2\rangle = (v_1, v_2)_H + \varepsilon^2 \langle J v_1, v_2\rangle$$

ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{V_\varepsilon}$ erklärt. Der Raum $V_\varepsilon := (V, (\cdot, \cdot)_{V_\varepsilon})$ ist ebenfalls ein Hilbertraum, und $\|\cdot\|_V$ ist zu $\|\cdot\|_{V_\varepsilon}$ äquivalent. Insbesondere gelten die Ungleichungen

$$\|v\|_H \leqq \|v\|_{V_\varepsilon} \leqq \sqrt{\gamma_1^2 + \varepsilon^2}\, \|v\|_V \quad \text{und} \quad \varepsilon \|v\|_V \leqq \|v\|_{V_\varepsilon} \quad (v \in V). \tag{1.3}$$

Nun betrachten wir die Gleichung

$$X_n^\varepsilon(t) = X_\varepsilon^0 + \int_0^t J_\varepsilon^{-1} A\big(s, X_n^\varepsilon(s)\big)\, ds + w^n(t), \tag{1.4}$$

wobei X_ε^0 ein $(\mathfrak{F}_0, \mathcal{B}_V)$-meßbares zufälliges Element bezeichnet. Im Satz 3.7 wird gezeigt, daß die Lösungen der V_ε-wertigen Itogleichung (1.4) für $\varepsilon \downarrow 0$ die Lösung der Gleichung (1.2) über dem Evolutionstripel (V, H, V^*) approximieren.

2. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Gleichung (1.4)

Mittels des Fixpunktsatzes von Banach wird die Lösbarkeit der Gleichung (1.4) untersucht.

Satz 2.1: *Für alle $\varepsilon > 0$ und alle natürlichen Zahlen n gibt es einen bis auf stochastische Modifikationen eindeutig bestimmten V-wertigen $(\mathfrak{F}_t, \mathcal{B}_V)$-meßbaren Prozeß $\big(X_n^\varepsilon(t)\big)$ mit*

$$\mathsf{E} \sup \{\|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 : t \in [0, T]\} < \infty,$$

der die Gleichung (1.4) löst.

Beweis: $M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)$ bezeichnet den Banachraum der $(\mathfrak{F}_t, \mathcal{B}_V)$-meßbaren Prozesse $\big(Y(t)\big)$ mit $\mathsf{E} \sup \{\|Y(t)\|_{V_\varepsilon}^2 : t \in [0, T]\} < \infty$. Der durch

$$\mathrm{T}(Y)(t) := X_\varepsilon^0 + \int_0^t J_\varepsilon^{-1} A\big(s, Y(s)\big)\, ds + w^n(t),$$

definierte Operator T bildet den Raum $M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)$ in sich ab. Mit der Itoformel [1] und der Definition von $(\cdot, \cdot)_{V_\varepsilon}$ erhält man für $Y_1, Y_2 \in M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)$

$$\|\mathrm{T}(Y_1)(t) - \mathrm{T}(Y_2)(t)\|_{V_\varepsilon}^2$$

$$= 2 \int_0^t \big(J_\varepsilon^{-1} A(s, Y_1(s)) - J_\varepsilon^{-1} A\big(s, Y_2(s)\big), \mathrm{T}(Y_1)(s) - \mathrm{T}(Y_2)(s)\big)_{V_\varepsilon}\, ds$$

$$= 2 \int_0^t \big\langle A\big(s, Y_1(s)\big) - A\big(s, Y_2(s)\big), \mathrm{T}(Y_1)(s) - \mathrm{T}(Y_2)(s)\big\rangle\, ds.$$

Aus der Voraussetzung (V4), den Ungleichungen $\varepsilon \|v\|_V \leqq \|v\|_{V_\varepsilon}$ $(v \in V)$ und $2ab \leqq a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbf{R}^1)$ folgt

$$\|\mathbf{T}(Y_1)(t) - \mathbf{T}(Y_2)(t)\|_{V_\varepsilon}^2$$

$$\leqq \frac{\alpha_1^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \|Y^1(s) - Y_2(s)\|_{V_\varepsilon}^2 ds + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \|\mathbf{T}(Y_1)(s) - \mathbf{T}(Y_2)(s)\|_{V_\varepsilon}^2 ds.$$

Aus dem Gronwallschen Lemma folgt

$$\|\mathbf{T}(Y_1)(t) - \mathbf{T}(Y_2)(t)\|_{V_\varepsilon}^2 \leqq \frac{\alpha_1^2}{\varepsilon^2} \exp\left\{\frac{T}{\varepsilon^2}\right\} \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\|_{V_\varepsilon}^2 ds.$$

Durch sukzessives Einsetzen und Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$\|\mathbf{T}^m(Y_1)(t) - \mathbf{T}^m(Y_2)(t)\|_{V_\varepsilon}^2 \leqq \frac{c^{m-1}}{(m-1)!} T \sup_{t\in[0,T]} \{\|Y_1(t) - Y_2(t)\|_{V_\varepsilon}^2\}$$

mit $c := (\alpha_1^2/\varepsilon^2)\, T \exp\{T/\varepsilon^2\}$. Somit gilt

$$\|T^m(Y_1)(\cdot) - \mathbf{T}^m(Y_2)(\cdot)\|_{M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)}^2 \leqq \frac{c^{m-1}}{(m-1)!} T \|Y_1(\cdot) - Y_2(\cdot)\|_{M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)}^2.$$

Also ist der Operator $\mathbf{T}^m$ für hinreichend große m kontraktiv im Raum $M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)$. Folglich besitzt die Gleichung (1.4) genau eine Lösung in $M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)$ ∎

Bemerkung 2.2: Für jedes m ist $\mathbf{T}^m(Y)(t)$ realisierungsweise stetig in V_ε. Aus dem Beweis des letzten Satzes folgt insbesondere

$$\|\mathbf{T}^{m+1}(X_\varepsilon^0)(\cdot) - \mathbf{T}^m(X_\varepsilon^0)(\cdot)\|_{M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)}^2 \leqq \frac{c^{m-1}}{(m-1)!} T \|\mathbf{T}(X_\varepsilon^0)(\cdot) - X_\varepsilon^0\|_{M_{V_\varepsilon}(\mathfrak{F}.)}^2.$$

Mit der Markov'schen Ungleichung erhält man

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{T}^{m+1}(X_\varepsilon^0)(t) - \mathbf{T}^m(X_\varepsilon^0)(t)\|_{V_\varepsilon} > \frac{1}{m^2}\right\} \leqq \frac{c^{m-1}}{(m-1)!} Tm^4.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{T}^{m+1}(X_\varepsilon^0)(t) - \mathbf{T}^m(X_\varepsilon^0)\|_{V_\varepsilon} > \frac{1}{m^2}\right\} < \infty.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt dann, daß

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{T}^{m+1}(X_\varepsilon^0)(t) - \mathbf{T}(X_\varepsilon^0)(t)\|_{V_\varepsilon} > \frac{1}{m^2}$$

nur für endlich viele m mit Wahrscheinlichkeit 1 gelten kann. Somit konvergiert auch

$$X_\varepsilon^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\mathbf{T}^{m+1}(X_\varepsilon^0)(t) - \mathbf{T}^m(X_\varepsilon^0)(t))$$

gleichmäßig mit Wahrscheinlichkeit 1 im Raum V_ε. Also ist der Lösungsprozeß $(X_n^\varepsilon(t))$ auch mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig in V_ε.

3. Approximation des Ausgangsproblems

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Lösungen der Gleichungen (1.4) für $\varepsilon \to 0$ die Lösung der Gleichung (1.1) approximieren. Zunächst wird gezeigt, daß die Lösungen der Gleichung (1.2) für $n \to \infty$ Näherungen für die Lösung der Gleichung (1.1) liefern.

Satz 3.1: *Es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 = 0.$

Beweis: Es ist

$$X_n(t) - X(t) = \int_0^t \left[A\big(s, X_n(s)\big) - A\big(s, X(s)\big)\right] ds + \big(w^n(t) - w(t)\big).$$

Mit der Itoformel für das Normquadrat über einem Evolutionstripel und der Voraussetzung (V 2) erhält man

$$\begin{aligned}\|X_n(t) - X(t)\|_H^2 &= 2 \int_0^t \big\langle A\big(s, X_n(s)\big) - A\big(s, X(s)\big), X_n(s) - X(s)\big\rangle\, ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \big(X_n(s) - X(s), w^n(ds) - w(ds)\big)_H + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2 t \\ &\leqq c_1 \int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n(\tau) - X(\tau)\|_H^2\, ds \\ &\quad + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \big(X_n(s) - X(s), w^n(ds) - w(ds)\big)_H + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2 t.\end{aligned}$$

Hieraus folgt offensichtlich

$$\begin{aligned}\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 &\leqq c_1 \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n(\tau) - X(\tau)\|_H^2\, ds \\ &\quad + 2\left(\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \big(X_n(s) - X(s), w^n(ds) - w(ds)\big)_H\right]^2\right)^{1/2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2 T.\end{aligned}$$

Da durch $\left(\int_0^t \big(X_n(s) - X(s), w^n(ds) - w(ds)\big)_H, \mathfrak{F}_t\right)$ ein Martingal definiert wird, erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 &\leqq c_1 \int_0^t \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n(\tau) - X(\tau)\|_H^2\, ds \\ &\quad + 4\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2 \mathsf{E} \int_0^T \|X_n(s) - X(s)\|_H^2\, ds\right)^{1/2} + T \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2.\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung $2ab \leqq a^2 + b^2$ ($a, b \in \mathbf{R}^1$) folgt

$$\begin{aligned}&\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 \\ &\leqq (c_1 + 1) \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n(\tau) - X(\tau)\|_H^2\, ds + (T + 4) \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2.\end{aligned}$$

Aus dem Gronwallschen Lemma folgt dann

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 \leqq (T + 4) \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i^2 \exp\{(c_1 + 1) T\}.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung ∎

Bemerkung 3.2: Wird die Voraussetzung (V 2) verschärft zu

$$2\langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2\rangle + \beta \|v_1 - v_2\|_V^2 \leqq c_1 \|v_1 - v_2\|_H^2$$

(β — eine positive Konstante), so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - X(t)\|_H^2 + \mathsf{E} \int_0^T \|X_n(t) - X(t)\|_V^2 \, dt\right] = 0.$$

Als nächstes wird die Beschränktheit der Lösungen von (1.4) bezüglich $\varepsilon \downarrow 0$ für festes n gezeigt.

Lemma 3.3: *Für X_ε^0 in der Gleichung* (1.4) *seien die Bedingungen*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E} \|X_0 - X_\varepsilon^0\|_H^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_V^2 = 0$$

erfüllt. Dann gibt es eine positive Zahl δ_n, so daß gilt

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\delta_n]} \mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 < \infty.$$

Beweis: Durch Anwendung der Itoformel [1] auf $\|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2$ erhält man

$$\|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 = \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 + 2 \int_0^t \left(J_\varepsilon^{-1} A(s, X_n^\varepsilon)), X_n^\varepsilon(s)\right)_{V_\varepsilon} ds$$

$$+ 2 \int_0^t \left(X_n^\varepsilon(s), w^n(ds)\right)_{V_\varepsilon} + t \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \|e_i\|_{V_\varepsilon}^2.$$

Mit der Definition des Raumes V_ε ergibt sich

$$\|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 = \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 + 2 \int_0^t \left\langle A\left(s, X_n^\varepsilon(s)\right), X_n^\varepsilon(s)\right\rangle ds$$

$$+ 2 \int_0^t \left(X_n^\varepsilon(s), w^n(ds)\right)_{V_\varepsilon} + t \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2).$$

Mit der Voraussetzung (V 3) und elementaren Umformungen erhält man

$$\|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 \leqq \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 - \alpha \int_0^t \|X_n^\varepsilon(s)\|_V^2 \, ds + c_1 \int_0^t \|X_n^\varepsilon(s)\|_H^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t f(s) \, ds + 1 + \sup_{t\in[0,T]} \left[\int_0^t \left(X_n^\varepsilon(s), w^n(ds)\right)_{V_\varepsilon}\right]^2$$

$$+ t \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2)$$

und somit

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 + \alpha \mathsf{E} \int_0^T \|X_n^\varepsilon(s)\|_V^2 \, ds$$

$$\leqq \mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 + c_1 \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n^\varepsilon(\tau)\|_{V_\varepsilon}^2 \, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2) \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n^\varepsilon(\tau)\|_V^2 \, ds$$

$$+ 1 + T \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2).$$

Mit dem Gronwallschen Lemma ergibt sich

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 + \alpha \mathsf{E} \int_0^T \|X_n^\varepsilon(s)\|_V^2 \, ds$$

$$\leqq \mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 + 1$$

$$+ T \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2) \exp \left\{ c_1 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (1 + \varepsilon^2 \|e_i\|_V^2) \, T \right\}. \tag{3.1}$$

Wegen der Konvergenz von X_ε^0 kann $\delta_n > 0$ so gewählt werden, daß

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\delta_n]} \mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2 = \sup_{t\in(0,\delta_n]} (\mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_H^2 + \varepsilon^2 \mathsf{E} \|X_\varepsilon^0\|_V^2) < \infty$$

ist. Setzt man auf der rechten Seite von (3.1) bei den Summen $\varepsilon = \delta_n$, so findet man eine von n abhängige Konstante K_n, so daß gilt

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\delta_n]} \mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon}^2 \leqq K_n \quad \blacksquare$$

Bemerkung 3.4: Aus Lemma 3.3 folgt insbesondere die Beschränktheit der Familie $\left(\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t)\|_H^2\right)_{\varepsilon\in(0,\delta_n]}$.

Satz 3.5: *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt* $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 = 0$.

Beweis: Es sei η eine beliebige positive Zahl, $(v(t))$ ein $\mathfrak{F}_t$-meßbarer V-wertiger Prozeß mit $v(t) := X_0 + \int_0^t \bar{v}(s) \, ds + w^n(t)$. Dabei ist $(\bar{v}(s))$ ein $\mathfrak{F}_s$-meßbarer Prozeß mit $\mathsf{E} \int_0^T \|\bar{v}(s)\|_{V^*}^2 \, ds < \infty$, der so gewählt wird, daß die Beziehungen

$$\mathsf{E} \int_0^T \|A(s, X_n(s)) - \bar{v}(s)\|_{V^*}^2 \, ds < \frac{\eta}{4} \text{ und } \mathsf{E} \int_0^T \|X_n(s) - v(s)\|_V^2 \, ds < \frac{\eta}{4}$$

gelten. Folglich gilt $\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n(t) - v(t)\|_H^2 < \frac{\eta}{2}$. Offensichtlich ist

$$\|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 \leqq 2 \|X_n^\varepsilon(t) - v(t)\|_H^2 + 2 \|v(t) - X_n(t)\|_H^2$$

$$\leqq 2 \|X_n^\varepsilon(t) - v(t)\|_{V_\varepsilon}^2 + 2 \|v(t) - X_n(t)\|_H^2.$$

Mit der Itoformel für $\|\cdot\|_{V_\varepsilon}^2$ erhält man

$$\|X_n^\varepsilon(t) - v(t)\|_{V_\varepsilon}^2$$

$$= \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + 2\int_0^t \left(J_\varepsilon^{-1}A(s, X_n^\varepsilon(s)) - \bar{v}(s), X_n^\varepsilon(s) - v(s)\right)_{V_\varepsilon} ds.$$

Mit elementaren Umformungen ergibt sich

$$\|X_n^\varepsilon(t) - v(t)\|_{V_\varepsilon}^2$$

$$= \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + 2\int_0^t \left\langle A\big(s, X_n^\varepsilon(s)\big) - A\big(s, X_n(s)\big), X_n^\varepsilon(s) - X_n(s)\right\rangle ds$$

$$+ 2\int_0^t \left\langle A\big(s, X_n^\varepsilon(s)\big) - A\big(s, X_n(s)\big), -v(s) + X_n(s)\right\rangle ds$$

$$+ 2\int_0^t \left\langle A\big(s, X_n(s)\big) - \bar{v}(s), X_n^\varepsilon(s) - v(s)\right\rangle ds$$

$$- 2\varepsilon^2 \int_0^t \langle J\bar{v}(s), X_n^\varepsilon(s) - v(s)\rangle\, ds$$

$$\leqq \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + c_1 \int_0^t \|X_n^\varepsilon(s) - X_n(s)\|_H^2\, ds$$

$$+ 2\int_0^t \big\|A\big(s, X_n^\varepsilon(s)\big) - A\big(s, X_n(s)\big)\big\|_{V^*} \|X_n(s) - v(s)\|_V\, ds$$

$$+ 2\int_0^t \big\|A\big(s, X_n(s)\big) - \bar{v}(s)\big\|_{V^*} \|X_n^\varepsilon(s) - v(s)\|_V\, ds$$

$$- 2\varepsilon^2 \int_0^t \langle J\bar{v}(s), X_n^\varepsilon(s) - v(s)\rangle\, ds.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2$$

$$\leqq 2\mathsf{E}\, \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + 2c_1 \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n^\varepsilon(\tau) - X_n(\tau)\|_H^2\, ds$$

$$+ 2\left(\mathsf{E}\int_0^T \left(4f(s) + 4c_1^2 \|X_n^\varepsilon(s)\|_V^2 + 4\,\|X_n(s)\|_V^2\right) ds\right)^{1/2}$$

$$\times \left(\mathsf{E}\int_0^T \|X_n(s) - v(s)\|_V^2\, ds\right)^{1/2}$$

$$+ 2\left(\mathsf{E}\int_0^T \big\|A\big(s, X_n(s)\big) - \bar{v}(s)\big\|_V^2\, ds\right)^{1/2} \left(\mathsf{E}\int_0^T \|X_n^\varepsilon(s) - v(s)\|_V^2\, ds\right)^{1/2}$$

$$+ 2\varepsilon^2 \left(\mathsf{E}\int_0^T \|J\bar{v}(s)\|_{V^*}^2\, ds\right)^{1/2} \left(\mathsf{E}\int_0^T \left(2\,\|X_n^\varepsilon(s)\|_V^2 + 2\,\|v(s)\|_V^2\right) ds\right)^{1/2} + \frac{\eta}{2}.$$

Wegen Lemma 3.3 gibt es δ_n, $\bar{K}_n \in \mathbf{R}_+$, so daß für $\varepsilon \in (0, \delta_n]$ gilt

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 \leqq \mathsf{E}\, \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + c_1 \int_0^T \mathsf{E} \sup_{\tau\in[0,s]} \|X_n^\varepsilon(\tau) - X_n(\tau)\|_H^2\, ds$$
$$+ \bar{K}_n \left[\left(\mathsf{E} \int_0^T \|X_n(s) - v(s)\|_V^2\, ds\right)^{1/2} + \left(\mathsf{E} \int_0^T \|A(s, X_n(s)) - \bar{v}(s)\|_{V^*}^2\, ds\right)^{1/2}\right] + \varepsilon^2 \bar{K}_n + \frac{\eta}{2}.$$

Folglich erhält man mit dem Gronwallschen Lemma

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 \leqq \left[\mathsf{E}\, \|X_\varepsilon^0 - X_0\|_{V_\varepsilon}^2 + \bar{K}_n \sqrt{\eta} + \varepsilon^2 \bar{K}_n + \frac{\eta}{2}\right] \exp\{c_1 T\}.$$

Aus den Voraussetzungen folgt dann $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 \leqq \bar{K}_n \sqrt{\eta} \left(1 + \frac{\sqrt{\eta}}{2}\right)$ und, weil $\eta \in \mathbf{R}_+$ beliebig ist, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 = 0$ ∎

Bemerkung 3.6: Verschärft man die Voraussetzung (V 2) zur starken Monotonie (s. Bemerkung 3.2), so gilt für festes n

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathsf{E} \left[\sup_{t\in[0,T]} \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_H^2 + \int_0^T \|X_n^\varepsilon(t) - X_n(t)\|_V^2\, dt\right] = 0.$$

Faßt man die Sätze 3.1 und 3.5 zusammen, so ergibt sich

Satz 3.7: *Für jedes $\gamma \in \mathbf{R}_+$ gibt es ein $n_0 = n_0(\gamma) \in \mathbf{N}$ und ein $\delta_{n_0} \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $\varepsilon \in (0, \delta_{n_0}]$ gilt* $\left(\mathsf{E} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|X(t) - X_n^\varepsilon(t)\|_H^2\right)^{1/2} \leqq \gamma$.

LITERATUR

[1] Curtain, R. F., and A. J. Pritchard: Infinite dimensional linear systems theory (Lecture notes in control and informations sciences: Vol. 8). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1978.

[2] Gajewski, H., Gröger, K., und K. Zacharias: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1974.

[3] Grecksch, W.: Stochastische Evolutionsgleichungen und deren Steuerung (Teubner-Text zur Mathematik). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1987 (in Vorber.).

[4] Крылов, Н. В., и Б. И. Розовский: О случайных эволюционных уравнениях. В сб.: Итоги науки и техники 14. Москва: Изд-во ВИНИТИ 1979, 71—146.

[5] Лиске, Х.: Одна аппроксимационная схема для нахождения обобщённого решения начально-краевой задачи для стохастического параболического дифференциального уравнения. Preprint. Berlin: Akad. Wiss. DDR, Inst. für Mathematik. Preprint Math. 18/82.

Manuskripteingang: 03. 09. 1984

VERFASSER:

Doz. Dr. Wilfried Grecksch
Sektion Mathematik
der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna—Merseburg
DDR-4200 Merseburg, Otto-Nuschke-Str.