Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (5) 1986, S. 445–456

# Ein transfiniter Durchmesser bei quasikonformen Normalabbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete

S. Kirsch

Der Begriff des transfiniten Durchmessers nach Fekete eines einfach zusammenhängenden Gebietes, der mit dessen konformen Radius zusammenhängt, wird auf eine gewisse Klasse quasikonformer Normalabbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes verallgemeinert. Für den konformen Fall werden Untersuchungen der Konvergenzgeschwindigkeit angeschlossen.

Трансфинитный диаметр по Фекете односвязной области, который связан с конформным радиусом области, обобщается на определённый класс квазиконформных канонических отображений многосвязной области. Для конформного случая скорость сходимости изучается.

The transfinite diameter of Fekete of a simply connected domain, which is connected with the conformal radius of the domain, is generalized for a certain class of quasiconformal canonical mappings of a multiply connected domain. For the conformal case the rate of convergence is studied.

## § 1. Einleitung

Beim Gaußschen Prinzip minimaler Energie wird eine Charakterisierung elektrostatischer Gleichgewichtsverteilungen von Ladungen auf Leiteroberflächen durch eine Extremaleigenschaft gegeben. Im Falle ebener elektrostatischer Probleme und konstanter Dielektrizitätskonstante führt dies zu einer Charakterisierung des konformen Radiuses eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Durch Diskretisierung des Energieintegrals gelangt man zu dem 1923 von M. Fekete eingeführten Begriff des *transfiniten Durchmessers* $d(M)$ einer beliebigen abgeschlossenen beschränkten Punktmenge $M$ der komplexen Zahlenebene als Grenzwert der Zahlenfolge $(d_n)$ mit

$$d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}(M) := \max_{z_i, z_k \in M} \prod_{1 \leq i < k \leq n} |z_i - z_k|. \tag{0}$$

Seitdem hat der Begriff des transfiniten Durchmessers zahlreiche Anwendungen [2–5, 7, 10, 12–15] und vielfältige Verallgemeinerungen erfahren. Während die Mengen mit transfinitem Durchmesser Null eine große Bedeutung in der modernen Potentialtheorie und z. B. in der Hebbarkeitstheorie analytischer und verallgemeinerter analytischer Funktionen haben, stehen in der geometrischen Funktionentheorie mehr die Mengen mit positivem transfinitem Durchmesser im Blickpunkt des Interesses.

Sämtliche Verallgemeinerungsansätze für den transfiniten Durchmesser laufen auf eine Modifizierung der euklidischen Abstandsfunktion in (0) hinaus. Bei Zugrundelegung nichteuklidischer Geometrien, z. B. der Geometrie der konformen Abbildungen auf der hyperbolischen bzw. elliptischen Ebene, und Ersetzung der euklidischen Abstandsfunktion in (0) durch $|z - \zeta|/|1 \mp \bar{\zeta} z|$, wobei $-$ im hyperbolischen und $+$ im elliptischen Fall zu setzen ist, kommt man zum Begriff des hyperbolischen [15] bzw. elliptischen [7] transfiniten Durchmessers. Bei dem von M. Tsuji [15] zuerst vorgeschlagenen, anderweitig nützlichen Begriff des elliptischen transfiniten Durchmessers geht die Analogie zum hyperbolischen transfiniten Durchmesser weitgehend verloren, nicht aber in [7], weil sich der hyperbolische und elliptische Fall nur in dem unterschiedlichen Vorzeichen unterscheiden. Dadurch übertragen sich die ganzen Untersuchungen in [15: III.12], und die Betrachtungen in [7] wurden ermöglicht im Rahmen einer gewissen Abrundung der ganzen Begriffsbildung.

T. Bagby [1] verallgemeinerte den Begriff des transfiniten Durchmessers auf Ringgebiete, was zu einer Charakterisierung des konformen Moduls des Ringgebietes führt. Anstelle des euklidischen Abstandes in (0) tritt dabei das Doppelverhältnis eines gewissen Quadrupels von Punkten der komplexen Zahlenebene. Für gewisse symmetrische Gebietskonstellationen ergibt sich übrigens wieder der hyperbolische transfinite Durchmesser.

In [4] wurde der Begriff des transfiniten Durchmessers auf den Fall ebener elektrostatischer Probleme und ortsabhängiger Dielektrizitätskonstante bei einfach zusammenhängenden Gebieten ausgedehnt. Eine zentrale Rolle spielen dabei die Differentialgleichung

$$w_{\bar{z}} = q(z)\,\overline{w_z}, \tag{1}$$

wobei $q(z)$ reell ist und $|q(z)| \leq q_0 < 1$ erfüllt, und eine Grundlösung mit logarithmischer Singularität $i \log \mathfrak{r}(z, \zeta)$ von (1). Hier tritt jetzt anstelle des euklidischen Abstandes in (0) der Ausdruck $|\mathfrak{r}(z, \zeta)|$. Für den Fall, daß $q$ innerhalb des Einheitskreises identisch Null und außerhalb desselben identisch konstant $q_0$ ist, führt dies auf eine einparametrische Schar von transfiniten Durchmessern, die den klassischen transfiniten Durchmesser von Fekete und den hyperbolischen transfiniten Durchmesser verbindet, wenn $q_0$ das Intervall $[0, 1]$ durchläuft. Man vergleiche dazu [10].

1979 gab R. Kühnau [10] mit Hilfe des Gaußschen Prinzips minimaler Energie Extremalprinzipien für eine quasikonforme Kreisscheibenschlitz- und Parallelschlitzabbildung an, die in [6] mit dem Energieprinzip der modernen Potentialtheorie neu begründet wurden zwecks Erweiterung auf allgemeinere Ladungsräume. Dies gestattet nun eine Verallgemeinerung des transfiniten Durchmessers bei quasikonformen Normalabbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete, auf die bereits R. Kühnau in [10] hingewiesen hat und die Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist. Diese Verallgemeinerung gelingt z. B. immer in solchen Fällen, wo die Normalabbildung als Extremalabbildung bezüglich eines Extremalproblems vom Grötzsch'schen Typ bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung auftritt und das zugehörige quadratische Differential ein vollständiges Quadrat ist. Nach nicht trivialer Diskretisierung gewisser den quasikonformen Normalabbildungen zugeordneter quadratischer Funktionale gelangt man zu verallgemeinerten $N$-ten transfiniten Durchmessern, siehe (10) ff., die für $N$ gegen Unendlich gegen Grenzwerte konvergieren, die mit gewissen Gebietsfunktionalen zusammenhängen. Im Gegensatz zu allen bisherigen Modifizierungen des transfiniten Durchmessers treten jetzt noch variierende reelle Parameter auf. Der Grund dafür ist darin zu sehen, daß die zu dem jeweiligen Extremalprinzip gehörende Extremalladung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ von unterschiedlichem Vorzeichen und verschwindender Gesamtmasse mit $\operatorname{supp} \nu^+ \cap \operatorname{supp} \nu^- \neq \emptyset$ ist, im Gegensatz zu allen bisherigen Verallgemeinerungsformen des transfiniten Durchmessers, wo die Extremalladung entweder nicht negativ mit der Gesamtmasse 1 oder wie bei T. Bagby [1] von unterschiedlichem Vorzeichen, der Gesamtmasse von $\mu^+$ und $\mu^-$ jeweils gleich 1 und $\operatorname{supp} \mu^+ \cap \operatorname{supp} \mu^- = \emptyset$ ist. Die Tatsache, daß $\operatorname{supp} \nu^+ \cap \operatorname{supp} \nu^- \neq \emptyset$ für die Extremalladung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ gilt, findet ihre Berücksichtigung bei der Verallgemeinerung des transfiniten Durchmessers dadurch, daß im Nenner des Ausdruckes (10) reelle Zahlen $r_N > 0$ (mit $(N^{-1} \log r_N)_N$ als Nullfolge) auftreten, da sonst das Supremum des Ausdruckes in (10) stets Unendlich wäre. Die Monotonieeigenschaft, wie man sie bei den Folgen der $N$-ten transfiniten Durchmesser bei den bisherigen Verallgemeinerungen antrifft, ist jetzt nicht so evident. Untersuchungen der Konvergenzgeschwindigkeit werden der Einfachheit halber für den konformen Fall durchgeführt.

## § 2. Bezeichnungen

Mit $G$ bezeichnen wir eine den unendlich fernen Punkt enthaltende offene $\mu$-fach zusammenhängende ebene Punktmenge, deren Rand $C$ aus $\mu$ ($\mu \geqq 1$) geschlossenen analytischen Jordankurven $C_k$ bestehe. $E_k$ sei die Abschließung des Innern von $C_k$, $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_\mu$, $D(C)$ der Durchmesser und $L$ die Länge von $C$. Der Rand $C$ sei dargestellt durch eine Parameterdarstellung $z = z(s)$ ($s$ sei die Bogenlänge, $0 \leqq s \leqq L$), wobei der Punkt $z(s)$ den *Rand* $C$ in mathematisch negativer Richtung durchläuft, wenn $s$ das Intervall von 0 bis $L$ überstreicht. Für $C$ existiert ein $\delta$ mit $0 < \delta < 1$, so daß bei $z_i = z(s_i)$, $i = 1, 2$,

$$|z_1 - z_2| \geqq \delta \Delta(s_1, s_2) \tag{2}$$

gilt, wobei $\Delta(s_1, s_2)$ die Länge des jeweilig kürzeren Teilbogens ist, der bei der Zerlegung einer Randkomponente von $C$ durch zwei auf ihr liegende Punkte $z_1$ und $z_2$ auftritt.

Weiter bezeichne $G_\varepsilon \subset G$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ dasjenige $\mu$-fach zusammenhängende, $\infty$ enthaltende Teilgebiet, dessen Rand $C_\varepsilon$ aus $C$ dadurch hervorgeht, daß jeder Punkt $z \in C$ in Richtung der Außennormale $\mathfrak{n}$ von $C$ im Punkt $z$ um die Strecke $\varepsilon$ verschoben wird. Die Parameterdarstellung von $C_\varepsilon$ habe die Gestalt

$$z_\varepsilon(s) = z(s) + i\varepsilon z'(s). \tag{3}$$

Damit $C_\varepsilon$ aus geschlossenen analytischen Jordankurven besteht, ist hinreichend $\varepsilon < \min(d/2, 1/\varkappa)$ zu wählen mit

$$|g(z(s_1), z(s_2))| = \left| i \frac{z'(s_1) - z'(s_2)}{z(s_1) - z(s_2)} \right| \leqq \varkappa \tag{4}$$

für beliebige $s_1, s_2 \in [0, L]$ ($d$ sei der kleinste Wert der Abstände zwischen zwei verschiedenen Randkomponenten), denn es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|\,|1 - \varepsilon\varkappa| &\leqq |z_\varepsilon(s_1) - z_\varepsilon(s_2)| \\ &= |z_1 - z_2|\,|1 + \varepsilon g(z_1, z_2)| \leqq |z_1 - z_2|\,|1 + \varepsilon\varkappa|. \end{aligned} \tag{5}$$

Der Neumannsche Kern

$$K(\zeta, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{n}_z} \log|z - \zeta| \qquad (z, \zeta \in C)$$

ist für stetig gekrümmten Rand $C$ stetig, mit

$$|K(\zeta, z)| \leqq c \quad \text{für } z, \zeta \in C. \tag{6}$$

Desweiteren bezeichne $p = p(z)$ eine in der gesamten $z$-Ebene definierte, reellwertige und glatte Funktion bis auf eine Ausnahmemenge $S$, die aus endlich vielen analytischen Jordankurven bestehe, mit $1/Q \leqq p(z) \leqq Q$. Sie sei in einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punnktes identisch Eins und gleich einer Konstanten in einem beidseitigen Umgebungsstreifen jeder Randkomponente von $G$. Weiter sei gesichert, daß alle eventuellen Sprunglinien von $p$ die Menge $E$ meiden. Wir setzen noch $q(z) = (p(z) - 1)/(p(z) + 1)$ und fordern $|q(z)| \leqq (Q - 1)/(Q + 1) < 1$. $T(q)$ sei der Träger von $q$ mit dem Durchmesser $D(T(q))$ und $R$ der Radius des kleinsten, zum Nullpunkt konzentrischen und $T(q)$ sowie $C$ haltenden Kreises.

$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(z, \zeta)$ sei diejenige eindeutig bestimmte stetige schlichte Abbildung der Vollebene auf sich, für die $\mathfrak{r}(\infty, \zeta) = \infty$ und $\mathfrak{r}(\zeta, \zeta) = 0$ ist und für die $i \log \mathfrak{r}(z, \zeta)$ in $z \neq \zeta$ die Differentialgleichung (1) erfüllt, wobei $\log \mathfrak{r}(z, \zeta)$ die Entwicklung

$$\log z + \varepsilon_1(z, \zeta) \quad \text{in} \quad z = \infty$$

und

$$\left(1 + q(\zeta)\right)^{-1} \left(\log (z - \zeta) - q(\zeta)\, \overline{\log (z - \zeta)}\right) + c(\zeta) + \varepsilon_2(z) \quad \text{in} \quad z = \zeta$$

aufweist mit nach Null strebenden Funktionen $\varepsilon_1$ (für $z \to \infty$) und $\varepsilon_2$ (für $z \to \zeta \notin S$), vgl. [8, 9]. Wir setzen noch

$$[z, \zeta] := |\mathfrak{r}(z, \zeta)|. \tag{7}$$

Diese Abstandsfunktion ist symmetrisch und stetig in $z$ und $\zeta$, vgl. [9, 10]. Für $p \equiv 1$ ist $[z, \zeta] \equiv |z - \zeta|$ und für gewisse andere Spezialfälle von $p$ ist (7) in [10] angegeben.

Mit $E = E(z)$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte stetige schlichte Abbildung von $G$, die $C_1$ in einen zum Nullpunkt konzentrischen Kreis mit dem Radius $R_1$ und die Randkomponenten $C_k$ ($k = 2, 3, \ldots, \mu$), falls vorhanden, in hierzu konzentrische Kreisbogenschlitze mit dem Radius $R_k$ und dem Öffnungswinkel im Bogenmaß $\varphi_k$ überführt, die den unendlich fernen Punkt festhält, und für die $i \log E(z)$ die Differentialgleichung (1) erfüllt und $E'(\infty) = 1$ gilt.

Schließlich sei $j_\theta = j_\theta(z)$ diejenige eindeutig bestimmte stetige schlichte Abbildung von $G$ mit $j_\theta(\infty) = \infty$, die die Randkomponenten $C_k$ in Strecken der Länge $l_{\theta,k}$ vom Neigungswinkel $\theta$ gegen die positive reelle Achse überführt und für die $e^{-i\theta} j_\theta(z)$ die Differentialgleichung (1) erfüllt, wobei in $z = \infty$ hydrodynamische Normierung gemäß

$$j_\theta(z) = z + a_{1,\theta} z^{-1} + \cdots \tag{8}$$

vorliegt. Die Abbildungsfunktion $\mathfrak{j}_\theta$ werde genau wie $j_\theta$ definiert, wobei $G$ durch die Vollebene zu ersetzen ist. In $z = \infty$ liege die Normierung

$$\mathfrak{j}_\theta(z) = z + \mathfrak{a}_{1,\theta} z^{-1} + \cdots \tag{9}$$

vor.

## § 3. Verallgemeinerte transfinite Durchmesser im Zusammenhang mit den quasikonformen Normalabbildungen $E$ und $j_\theta$

3.1 Im folgenden wird eine Verallgemeinerung des transfiniten Durchmessers im Zusammenhang mit der quasikonformen Kreisscheibenschlitzabbildung $E$ vorgenommen.

Definition 1: Ein System $\mathfrak{c}_N$ von komplexen Zahlen der Form

$$\mathfrak{c}_N = (z_1^1, \ldots, z_N^1; z_1^2, \ldots, z_N^2, \zeta_1^2, \ldots, \zeta_N^2; \ldots; z_1^\mu, \ldots, z_N^\mu, \zeta_1^\mu, \ldots, \zeta_N^\mu; \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)$$

heiße *zulässig* auf dem Rand $C$, wenn folgendes erfüllt ist:

a) $\lambda_k$ ist reell und $0 \leqq \lambda_k \leqq 1$ für $k = 2, 3, \ldots, \mu$;
b) $z_n^k, \zeta_n^k \in C_k$ für $n = 1, 2, \ldots, N$ und $k = 1, 2, \ldots, \mu$,

mit der Einschränkung, daß die zwei Punktesysteme $\{z_1^k, \ldots, z_N^k\}$ und $\{\zeta_1^k, \ldots, \zeta_N^k\}$ auf $C_k$ beliebig, aber getrennt liegen, d. h., daß sie jeweils auf zwei beliebigen disjunkten, die Randkurve $C_k$ ausmachenden Kurvenbögen liegen mögen.

Wir beginnen mit einer speziellen Ausmessung des Randes $C$ und setzen dazu

$$\omega^{(1)}(\mathfrak{c}_N)^{N^2} = \prod_{\substack{n,m=1\\ n\neq m}}^{N} \left[ [z_n^1, z_m^1] \prod_{k=2}^{\mu} \left( \frac{[z_n^1, z_m^k]}{[z_n^1, \zeta_m^k]} \right)^{2\lambda_k} \right.$$
$$\left. \times \prod_{k,l=2}^{\mu} \left( \frac{[z_n^k, z_m^l][\zeta_m^l, \zeta_n^k]}{([z_n^k, \zeta_m^l] + r_N)(r_N + [z_m^l, \zeta_n^k])} \right)^{\lambda_k \lambda_l} \right], \tag{10}$$

wobei $r_N = 2\big(2(a + 2D(T(q)))\big)^{1-1/Q} (a/N)^{1/Q}$ und $a$ eine so kleine positive reelle Zahl sei, daß in einem gewissen Uferstreifen von $C_a$ die Funktion $p$ identisch einer Konstanten und $a \leqq \min(\delta, d/2, 1/\varkappa)$ ist.

Es sei

$$d_N^{(1)} = d_N^{(1)}(C)$$

das Supremum von $\omega^{(1)}(\mathfrak{c}_N)$ in bezug auf alle zulässigen Systeme $\mathfrak{c}_N$ auf $C$.

Definition 2: Ein zulässiges System $\mathfrak{c}_N$ auf $C$ heißt *approximativ*, seine komplexen Komponenten $\overset{N}{z}_1{}^1, \ldots, \overset{N}{\zeta}_N{}^\mu$ heißen *N-te Approximativpunkte* von $C$ und die reellen Komponenten $\overset{N}{\lambda}_k$ $(k = 2, 3, \ldots, \mu)$ heißen *N-te Approximativparameter*, wenn

$$\omega^{(1)}(\overset{N}{z}_1{}^1, \ldots, \overset{N}{\zeta}_N{}^\mu, \overset{N}{\lambda}_2, \ldots, \overset{N}{\lambda}_\mu) \geqq d_N^{(1)}\, \mathrm{e}^{-1/N}$$

gilt.

Definition 3: Ein System $N$-ter Approximativpunkte auf $C$ nennen wir *orientiert*, wenn die Reihenfolge der $N$-ten Approximativpunkte

$$\overset{N}{z}_1{}^1, \ldots, \overset{N}{z}_N{}^1 \quad \text{und} \quad \overset{N}{z}_1{}^k, \ldots, \overset{N}{z}_N{}^k, \overset{N}{\zeta}_1{}^k, \ldots, \overset{N}{\zeta}_N{}^k$$

der Reihenfolge ihrer Durchlaufung auf $C_1$ bzw. $C_k$ für $k = 2, 3, \ldots, \mu$ in mathematisch negativer Richtung entspricht.

Diese Orientierung der $N$-ten Approximativpunkte nehmen wir im weiteren stets an, was nach eventueller Umnumerierung immer erreicht werden kann.

Satz 1: *Es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} d_N^{(1)}(C) = R_1, \tag{11}$$

*die Punktfolgen* $\overset{N}{z}_1{}^k$ *und* $\overset{N}{z}_N{}^k$ *konvergieren für* $N \to \infty$ *jeweils gegen diejenigen zwei verschiedenen Kurvenpunkte von* $C_k$ *für* $k = 2, 3, \ldots, \mu$, *die bei der Abbildung* $E$ *den Kreisbogenschlitzenden entsprechen,* (12)

*und*

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{\lambda}_k = \varphi_k/(2\pi) \quad \textit{für} \quad k = 2, 3, \ldots, \mu. \tag{13}$$

Beweis: 1. Es sei $\varepsilon_z'$ das auf den Kreis $K$ mit dem Mittelpunkt $z$ und dem Radius $a/N$ gefegte Maß des Dirac-Maßes $\varepsilon_z$ bezüglich des symmetrischen Potentialkernes

$-\log[z, \zeta]$. Die Ladung

$$\nu_N = \nu_{1,N}^+ + \sum_{k=2}^{\mu} (\nu_{k,N}^+ - \nu_{k,N}^-)$$

mit

$$\nu_{1,N}^+ = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{z_n^1}^{N\prime}, \quad \nu_{k,N}^+ = \frac{\lambda_k^N}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{z_n^k}^{N\prime} \text{ und } \nu_{k,N}^- = \frac{\lambda_k^N}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{\zeta_n^k}^{N\prime}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, \mu)$$

ist von endlicher Energie, ihr Träger ist in $E_{a/N}$ enthalten, und sie erfüllt die Normierungsbedingungen

$$\nu_N(E_{(a/N),1}) = 1 \quad \text{und} \quad \nu_N(E_{(a/N),k}) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, \mu).$$

Setzt man

$$(\nu_N, \nu_N) := -\iint \log[z, \zeta]\, d\nu_N(z)\, d\nu_N(\zeta),$$

so gilt nach einem Extremalprinzip für die quasikonforme Kreisscheibenschlitzabbildung $E$ (vgl. [6: Satz 5])

$$(\nu_N, \nu_N) > -\log R_1(C_{a/N}). \tag{14}$$

Unter Beachtung der Eigenschaft des Gefegten $\varepsilon_z'$ und Verwendung des Verzerrungssatzes [5: Lemma 1] ergeben sich für die wechselseitige Energie folgende Abschätzungen:

$$(\varepsilon_z', \varepsilon_\zeta') = (\varepsilon_z, \varepsilon_\zeta) = -\log[z, \zeta], \tag{15}$$

falls $|z - \zeta| \geqq 2a/N$ ist,

$$-\log\left([z, \zeta] + 2A(a/N)^{1/Q}\right) \leqq (\varepsilon_z', \varepsilon_\zeta') \leqq -\log[z, \zeta], \tag{16}$$

falls $z \neq \zeta$ ist, und

$$(\varepsilon_z', \varepsilon_z') \leqq -\log[B(a/N)^Q], \tag{17}$$

mit

$$A = \left[2\left(a + 2D(T(q))\right)\right]^{1-1/Q} \tag{18}$$

und

$$B = \left[2\left(a^{1/Q}\left(2\left(a + 2D(T(q))\right)\right)^{1-1/Q} + 2(3 + \sqrt{8})^{1-1/Q} D\left(T(\bar{q})\right)\right]^{1-Q}. \tag{19}$$

Bekanntlich gilt für stetige Lösungen $u = u(z)$ der Differentialgleichung $\operatorname{div}\left(p(z) \operatorname{grad} u(z)\right) = 0$ auf $K$ die Mittelwerteigenschaft, d. h.

$$u(z) = \int u(\zeta)\, d\varepsilon_z'(\zeta). \tag{20}$$

Bei Beachtung von (15)—(17) erhalten wir aus (14) die für alle zulässigen Punktesysteme $\mathfrak{c}_N$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} -\log R_1(C_{a/N}) \leqq (\nu_N, \nu_N) &\leqq e_1(N) - \log d_N^{(1)}(C) \\ &\leqq e_1(N) - \log \omega^{(1)}(\mathfrak{c}_N), \end{aligned} \tag{21}$$

wobei in $\omega^{(1)}$ noch $\lambda_k = \varphi_k/(2\pi)$ $(k = 2, 3, \ldots, \mu)$ gesetzt wird, mit

$$\begin{aligned} e_1(N) = (-1/N)\left(1 + 2(\mu - 1)^2\right) \log\left(B(a/N)^Q\right) \\ + \left(2\mu(\mu - 1)/N\right) \log\left(AD(C)^{1/Q}\right) - \left(2(\mu - 1)/N\right) \log(Bd^Q) + 1/N \end{aligned} \tag{22}$$

und den Konstanten $A$ und $B$ nach (18) und (19).

Für die auf $C$ gelegene Ladung $\nu^{(1)}$, die durch die Dichtefunktion

$$\frac{1}{2\pi}\, p(z)\, \frac{\partial}{\partial n} \log |E(z)|$$

mit

$$d\nu^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\, p(z)\, \frac{\partial}{\partial n} \log |E(z)|\, ds_z = -\frac{1}{2\pi}\, d \arg E(z)$$

erzeugt wird, gilt nach [10] $(\nu^{(1)}, \nu^{(1)}) = \log 1/R_1$. Mit $C_k^+$ und $C_k^-$ bezeichnen wir die Träger des Positiv- bzw. Negativteils der Ladung $\nu^{(1)}$ auf $C_k$, $k = 2, 3, \ldots, \mu$. Wird nun (21) multipliziert mit

$$d\nu^{(1)}_{|C_1}(z_n{}^1)\, d\nu^{(1)}_{|C_1}(z_m{}^1) \prod_{k=2}^{\mu} (2\pi/\varphi_k)^4\, d\nu^{(1)}_{|C_k^+}(z_n{}^k)\, d\nu^{(1)}_{|C_k^+}(z_m{}^k)\, d\nu^{(1)}_{|C_k^-}(\zeta_n{}^k)\, d\nu^{(1)}_{|C_k^-}(\zeta_m{}^k)$$

und $N(N-1)$-mal integriert über $C_1 \times C_1 \times \prod\limits_{k=2}^{\mu} C_k^+ \times C_k^+ \times C_k^- \times C_k^-$, so erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
-\log R_1(C_{a/N}) \leqq (\nu_N, \nu_N) &\leqq e_1(N) - \log d_N{}^{(1)}(C) \\
&\leqq e_1(N) + e_1'(N) + \frac{N-1}{N}\, (\nu^{(1)}, \nu^{(1)}) \\
&= e_1(N) + e_1'(N) - \left(\frac{N-1}{N}\right) \log \frac{R_1(C)}{2R} - \left(\frac{N-1}{N}\right) \log (2R) \\
&\leqq e_1(N) + e_1'(N) + \frac{1}{N} \log (2R) - \log R_1(C), \qquad (23)
\end{aligned}$$

wobei

$$e_1'(N) = 2\, \frac{N-1}{N} \iint \log \frac{[z, \zeta] + r_N}{[z, \zeta]}\, d\nu^{(1)}\Big|_{\sum\limits_{k=2}^{\mu} C_k^+}(z)\, d\nu^{(1)}\Big|_{\sum\limits_{k=2}^{\mu} C_k^-}(\zeta) \qquad (24)$$

gegen Null konvergiert für $N \to \infty$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Berücksichtigt man noch, daß nach [5: Lemma 2] (Kernkonvergenzsatz) die Radien $R_1(C_{a/N})$ für $N \to \infty$ gegen $R_1(C)$ streben, so erhalten wir aus (23) die Behauptung (11).

2. Weiter zeigen wir die starke Konvergenz von $\nu_N$ gegen $\nu^{(1)}$ bezüglich der Energienorm, die bekanntlich die schwache Konvergenz nach sich zieht, insbesondere die von $(\nu_{k,N}^+ - \nu_{k,N}^-)$ gegen $\nu^{(1)}_{|C_k}$. Unter Berufung auf das Extremalprinzip zur Charakterisierung von $E(z)$ und das gültige Energieprinzip in [6] gilt

$$\begin{aligned}
-\log R_1(C_{a/N}) &\leqq \frac{1}{4}\, (\nu_N + \nu^{(1)}, \nu_N + \nu^{(1)}) \\
&= \frac{1}{2} \left((\nu_N, \nu_N) + (\nu^{(1)}, \nu^{(1)})\right) - \frac{1}{4}\, (\nu_N - \nu^{(1)}, \nu_N - \nu^{(1)}) \\
&\leqq \frac{1}{2} \left((\nu_N, \nu_N) + (\nu^{(1)}, \nu^{(1)})\right), \qquad (25)
\end{aligned}$$

woraus mit (23) und $R_1(C_{a/N}) \to R_1(C)$ für $N \to \infty$ alles folgt.

Wir betrachten nun ein System orientierter $N$-ter Approximativpunkte auf $C_k$ ($k = 2, 3, \ldots, \mu$). Offenbar fallen die Urbildpunkte der Kreisbogenschlitzenden bezüglich $E$ mit den Endpunkten von $C_k^+$ ($k = 2, 3, \ldots, \mu$) zusammen. Würde nun (12) nicht gelten, so könnte man aus den dort genannten Punktfolgen jeweils eine konvergente Teilfolge, wieder mit dem Index $N$ versehen, aussondern, so daß einer der Grenzwerte ein von den Endpunkten von $C_k^+$ verschiedener Punkt auf $C_k$ ist. Dann wäre es aber immer möglich, einen Teilbogen $b$ auf $C_k^+$ (oder $C_k^-$) so anzugeben, daß für eine stetige Funktion $f$, die identisch Eins auf $b$ und identisch Null außerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung von $b$ ist,

$$\int f\,d\nu^{(1)} > 0 \qquad (\text{oder } \int f\,d\nu^{(1)} < 0)$$

ausfällt, während

$$0 \geqq \lim_{N\to\infty} \int f\,d\nu_N = \int f\,d\nu^{(1)} \quad (\text{oder } 0 \leqq \lim_{N\to\infty} \int f\,d\nu_N = \int f\,d\nu^{(1)})$$

gilt, was aber nicht möglich ist.

3. Nach Definition 1 gilt

$$0 \leqq \overset{N}{\lambda}_k = \nu_{k,N}^{\pm}(\mathbf{R}^2) \leqq 1 .$$

Wir betrachten irgendeine konvergente Teilfolge von $\overset{N}{\lambda}_k$ für $k = 2, 3, \ldots, \mu$, die wiederum mit $\overset{N}{\lambda}_k$ bezeichnet sei, und zeigen, daß sie für $N \to \infty$ gegen $\varphi_k/2\pi$ konvergiert. Wegen (25) sind die Folgen von zu $\nu_{k,N}^+$ und $\nu_{k,N}^-$ gehörigen positiven Linearformen schwach kompakt, d. h., sie enthalten jeweils eine schwach gegen eine stetige Linearform konvergente Teilfolge, wieder mit dem Index $N$ versehen, wobei die Grenzlinearform eindeutig mit Hilfe eines positiven Maßes $\nu_k^+$ bzw. $\nu_k^-$ darstellbar ist. Daß der Träger von $\nu_k^\pm$ in $C_k^\pm$ enthalten ist, entnimmt man unschwer (12). Nun ist einerseits $\nu_{k,N}^+ - \nu_{k,N}^-$ schwach konvergent gegen $\nu_k^+ - \nu_k^-$ und andererseits nach der Anfangsbemerkung unter Abschnitt 2 auch gegen $\nu^{(1)}_{|C_k}$, woraus $\nu_k^+ - \nu_k^- \equiv \nu^{(1)}_{|C_k}$ folgt. Mithin gilt

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{\lambda}_k = \nu_k^\pm(C_k^+) = \nu^{(1)}(C_k^+) = \int\limits_{C_k^+} d\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_k^+} d \arg E(z) = \varphi_k/2\pi$$

für $k = 2, 3, \ldots, \mu$. Damit gilt (13), und der Satz ist vollständig bewiesen ∎

3.2 Im folgenden geben wir noch eine Verallgemeinerung des transfiniten Durchmessers im Zusammenhang mit der quasikonformen Parallelschlitzabbildung $j_\theta$ an.

Definition 4: Ein System $\mathfrak{y}_N$ von komplexen Zahlen der Form

$$\mathfrak{y}_N = (z_1^1, \ldots, z_N^1, \zeta_1^1, \ldots, \zeta_N^1; \ldots; z_1^\mu, \ldots, z_N^\mu, \zeta_1^\mu, \ldots, \zeta_N^\mu; \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$$

heiße *zulässig* auf dem Rand $C$, wenn folgendes erfüllt ist:

a) $\lambda_k$ ist reell und $0 \leqq \lambda_k \leqq 2R/\pi$ für $k = 1, 2, \ldots, \mu$;

b) $z_n^k, \zeta_n^k \in C_k$ für $k = 1, 2, \ldots, \mu$,

mit der Einschränkung, daß die zwei Punktesysteme $\{z_1^k, \ldots, z_N^k\}$ und $\{\zeta_1^k, \ldots, \zeta_N^k\}$ auf $C_k$ beliebig, aber getrennt liegen, d. h., daß sie jeweils auf zwei beliebigen, die Randkurve $C_k$ ausmachenden Kurvenbögen liegen mögen.

Wir setzen jetzt

$$\omega^{(0)}(\mathfrak{y}_N)^{N^2} = \prod_{\substack{n,m=1\\ n\neq m}}^{N}\left[\prod_{k,l=1}^{\mu}\left(\frac{[z_n^k, z_m^l]\,[\zeta_m^l, \zeta_n^k]}{([z_n^k, \zeta_m^l] + r_N)\,(r_N + [z_m^l, \zeta_n^k])}\right)^{\lambda_k\lambda_l}\right]$$

$$\times \exp\left[\frac{N}{N-1}\sum_{k=1}^{\mu}\lambda_k\big(u(z_n^k) + u(z_m^k) - u(\zeta_n^k) - u(\zeta_m^k)\big)\right]$$

mit $u(z) = \mathrm{Re}\,\big(i\,e^{-i\theta}\mathfrak{j}_\theta(z)\big)$ und $r_N$ nach (10). Es sei

$$d_N^{(0)} = d_N^{(0)}(C)$$

das Supremum von $\omega^{(0)}(\mathfrak{y}_N)$ in bezug auf alle zulässigen Systeme $\mathfrak{y}_N$ auf $C$.

**Definition 5:** Ein zulässiges System $\mathfrak{y}_N$ auf $C$ heißt *approximativ*, seine komplexen Komponenten heißen *N-te Approximativpunkte*, und die reellen Komponenten heißen *N-te Approximativparameter*, wenn gilt

$$\omega^{(0)}(\overset{N}{\mathfrak{y}}_N) = \omega^{(0)}(\overset{N}{z}_1^1, \ldots, \overset{N}{\zeta}_N^k;\ \overset{N}{\lambda}_1, \ldots, \overset{N}{\lambda}_\mu) \geqq d_N^{(0)}\,e^{-1/N}.$$

Wir nehmen im weiteren an, daß die $N$-ten Approximativpunkte im Sinne der Definition 3 orientiert sind.

**Satz 2:** *Es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} d_N^{(0)}(C) = \exp\big[\mathrm{Re}\,\big(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\big)\big], \tag{26}$$

*die Punktfolgen $\overset{N}{z}_1^k$ und $\overset{N}{z}_N^k$ konvergieren für $N \to \infty$ jeweils gegen diejenigen zwei verschiedenen Kurvenpunkte von $C_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$, die bei der Abbildung $j_\theta$ den Parallelschlitzenden entsprechen, und* (27)

$$\lim_{N\to\infty} \overset{N}{\lambda}_k = l_{\theta,k}/2\pi \quad \text{für}\ \ k = 1, 2, \ldots, \mu. \tag{28}$$

**Beweis:** Wir gehen analog vor wie beim Beweis von Satz 1. Wir setzen jetzt

$$\nu_N = \sum_{k=1}^{\mu}\frac{\overset{N}{\lambda}_k}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(\varepsilon^N_{z_n^k} - \varepsilon^N_{\zeta_n^k}\big).$$

Diese Ladung endlicher Energie ist auf das Innere von $C_{a/N}$ eingeschränkt und hat jeweils verschwindende Masse auf den Komponenten $E_{(a/N),k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$. Nach einem Extremalprinzip zur Charakterisierung der quasikonformen Normalabbildung $j_\theta$ [6: Satz 6] gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[e^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\,(C_{a/N})] &\leqq (\nu_N, \nu_N) - 2\int \mathrm{Re}\,\big(i\,e^{-i\theta}\mathfrak{j}_\theta(z)\big)\,d\nu_N(z)\\ &\leqq e_2(N) - \log d_N^{(0)}(C) \leqq e_2(N) - \log \omega^{(0)}(\mathfrak{y}_N)\end{aligned} \tag{29}$$

mit

$$e_2(N) = 2N^{-1}(2\mu R\pi^{-1})^2 \log\,[AD(C)^{1/Q}\,N^Q/(a^Q B)] + 1/N, \tag{30}$$

wobei in $\omega^{(0)}(\mathfrak{y}_N)$ noch $\lambda_k = l_{\theta,k}/(2\pi)$ gesetzt wird. Es sei $\nu^{(0)}$ diejenige auf $C$ gelegene Ladung (= signiertes Maß), die durch das Differential

$$d\nu^{(0)} := \frac{1}{2\pi}\,p(z)\,\frac{\partial}{\partial\mathfrak{n}}\,\mathrm{Re}\,\big(i\,e^{-i\theta}j_\theta(z)\big)\,ds_z = -d\,\mathrm{Im}\,\big(i\,e^{-i\theta}j_\theta(z)\big)$$

charakterisiert ist und den Energiewert

$$(\nu^{(0)}, \nu^{(0)}) = \int \operatorname{Re}\left(i\, \mathrm{e}^{-i\theta} \mathfrak{j}_\theta(z)\right) d\nu^{(0)}(z) = \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\right] > 0$$

besitzt. Multipliziert man (29) mit

$$\prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{2\pi}{l_{\theta,k}}\right)^4 d\nu^{(0)}_{|C_k^+}(z_n^k)\, d\nu^{(0)}_{|C_k^+}(z_m^k)\, d\nu^{(0)}_{|C_k^-}(\zeta_n^k)\, d\nu^{(0)}_{|C_k^-}(\zeta_m^k),$$

wobei jetzt $C_k^{\pm}$ der Träger des Positiv- bzw. Negativteils von $\nu^{(0)}$ auf $C_k$ für $k = 1, 2, \ldots, \mu$ bedeutet, und integriert dann diese Ungleichung $N(N-1)$mal über

$$\mathop{\times}_{k=1}^{\mu} C_k^+ \times C_k^+ \times C_k^- \times C_k^-,$$

so kann man (29) weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} &e_2(N) + e_2'(N) + (N-1)N^{-1}(\nu^{(0)}, \nu^{(0)}) - 2\int \operatorname{Re}\left(i\,\mathrm{e}^{-i\theta}\mathfrak{j}_\theta(z)\right) d\nu^{(0)}(z) \\ &\leqq e_2(N) + e_2'(N) + \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\,(C)\right] \end{aligned} \tag{31}$$

mit

$$e_2'(N) = 2(N-1)N^{-1} \iint \log \frac{[z,\zeta] + r_N}{[z,\zeta]}\, d\nu\Big|_{\sum_{k=1}^{\mu} C_k^+}(z)\, d\nu\Big|_{\sum_{k=1}^{\mu} C_k^-}(\zeta). \tag{32}$$

Der letzte Term konvergiert für $N \to \infty$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen Null. Nach einem Kernkonvergenzsatz für quasikonforme Normalabbildungen [5: Lemma 2] (dort wurde er nur für die Kreisabbildung $E$ eines einfach zusammenhängenden Gebietes bewiesen, gilt aber sinngemäß natürlich auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete und für andere quasikonforme Normalabbildungen, wie z. B. die Parallelschlitzabbildung $j_\theta$) erhalten wir die Konvergenz

$$\operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\,(C_{a/N})\right] \to \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-2i\theta}(\mathfrak{a}_{1,\theta} - a_{1,\theta})\,(C)\right]$$

für $N \to \infty$. Die Ungleichungen (29) und (31) bestätigen somit (26). Die Behauptungen (27) und (28) beweist man ganz analog wie (12) und (13) ∎

3.3. Über die Güte der Konvergenz der Zahlenfolgen $d_N^{(1)}$ und $d_N^{(0)}$ für den konformen Fall ($q \equiv 1$) gibt Auskunft der

Satz 3: *Es gilt für* $N \geqq 2$

$$|R_1(C) - d_N^{(1)}(C)| \leqq a_1 N^{-1} \log N \tag{33}$$

*und*

$$\left|\exp\left[\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\right)\right] - d_N^{(0)}(C)\right| \leqq a_2 N^{-1} \log N, \tag{34}$$

*wobei die Konstanten $a_1$ und $a_2$ nur von der Geometrie des Kurvensystems $C$ abhängig sind.*

Beweis: Zunächst schätzen wir $R_1(C_\varepsilon)$ durch $R_1(C)$ nach oben ab, indem wir von den Größen $d_N^{(1)}(C_\varepsilon)$ ausgehen. Es sei $\mathfrak{c}_N$ ein System von $N$-ten Approximativpunkten auf $C_\varepsilon$ und $N$-ten Approximativparametern, $\varepsilon < \min(\delta, d/2, 1/\varkappa)$. Dann erhalten wir in Verbindung mit (5) die Ungleichung

$$\begin{aligned} d_N^{(1)}(C_\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-1/N} &\leqq \omega^{(1)}(\mathfrak{c}_N)\,(C) \\ &\leqq d_N^{(1)}(C)\left((1 + \varepsilon\varkappa)/(1 - \varepsilon\varkappa)\right)^{1+2\mu(\mu-1)}, \end{aligned}$$

wobei $d_N^{(1)}(C)$ das Supremum desjenigen analytischen Ausdruckes über alle zulässigen Punktesysteme $\mathfrak{c}_N$ auf $C$ bezeichnet, der aus $\omega^{(1)}(\mathfrak{c}_N)$ durch Ersetzen von $r_N = 2a/N$ durch $2a/(N(1 - \varepsilon\varkappa))$ entsteht. Mit Satz 1 bekommen wir nach vollzogenem Grenzübergang $N \to \infty$ und anschließender Ersetzung von $\varepsilon$ durch $a/N$ die Abschätzung

$$R_1(C_{a/N}) \leqq R_1(C)\left((1 + \varkappa a/N)/(1 - \varkappa a/N)\right)^{1+2\mu(\mu-1)}. \tag{35}$$

Dieselbe Abschätzungsmethode führt uns in Verbindung mit (4) und (5) zur Ungleichung

$$\begin{aligned}\exp\left[\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})(C_{a/N})\right)\right] &\leqq \exp\left[\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})(C)\right)\right] \\ &\times \left(\frac{1 + \varkappa a/N}{1 - \varkappa a/N}\right)^{8(\mu R\pi^{-1})^2} \cdot \exp\left(4\pi^{-1}\mu R D(C)\varkappa N^{-1}\right).\end{aligned} \tag{36}$$

Nun interessieren noch Abschätzungen von $e_1'(N)$ und $e_2'(N)$. Dazu werden die Dichtefunktionen $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(0)}$ über eine Integralgleichung abgeschätzt. Unter Beachtung der Potentialdarstellung von $\log|E(z)|$ bzw. $\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}j_\theta(z)\right)$ in [10] gilt auf $C$

$$\begin{aligned}\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\log|E(z)| = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_C \log(1/|z - \zeta|)\,\nu^{(1)}(\zeta)\,ds_\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[-\pi\nu^{(1)}(z) + \pi\int_C \nu^{(1)}(\zeta)\,K(\zeta, z)\,ds_\zeta\right],\end{aligned}$$

mithin

$$\nu^{(1)}(z) = -\int_C \nu^{(1)}(\zeta)\,K(\zeta, z)\,ds_\zeta \tag{37}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\nu^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}j_\theta(z)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}z\right) - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_C \log(1/|z - \zeta|)\,\nu^{(0)}(\zeta)\,ds_\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}z\right) - \frac{1}{2\pi}\left[-\pi\nu^{(1)}(z) + \pi\int_C \nu^{(1)}(\zeta)K(\zeta, z)\,ds_\zeta\right],\end{aligned}$$

mithin

$$\nu^{(0)}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}z\right) - \int_C \nu^{(0)}(\zeta)\,K(\zeta, z)\,ds_\zeta. \tag{38}$$

Aus den Beziehungen (37) und (38) ergibt sich mit (6) für $z \in C$

$$|\nu^{(1)}(z)| \leqq b_1 := c(2\mu - 1) \tag{39}$$

und

$$|\nu^{(0)}(z)| \leqq b_0 := 4\pi^{-1}c\mu R + \max_{z\in C}\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Re}\left(i\,e^{-i\theta}z\right). \tag{40}$$

Durch elementare Rechnung bestätigt man mit (2) leicht, daß

$$\int_C\int_C \log\frac{|z - \zeta| + aN^{-1}}{|z - \zeta|}\,ds_z\,ds_\zeta \leqq O(N^{-1}\log N) \tag{41}$$

gilt. Somit erhalten wir in Verbindung mit (22), (24), (30), (32), (39)—(41) die Beziehungen

$$e_i(N) = O(N^{-1} \log N) \quad \text{und} \quad e_i'(N) \leqq O(N^{-1} \log N) \qquad (i = 1, 2). \tag{42}$$

Setzt man alle gewonnenen Abschätzungen (35), (42) bzw. (30), (42) in (23) bzw. (31) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$|R_1 - d_N^{(1)}| = R_1 \, |1 - d_N^{(1)}/R_1| \leqq 2R \, |1 - d_N^{(1)}/R_1|$$

und

$$|x - d_N^{(0)}| = x \, |1 - d_N^{(0)}/x| \leqq e^{2R^2} \, |1 - d_N^{(0)}/x|$$

mit $x = \exp\left[\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta}(a_{1,\theta} - \mathfrak{a}_{1,\theta})\right)\right]$ die Abschätzungen (33) bzw. (34) ∎

## LITERATUR


[1] Bagby, T.: The modulus of a plane condenser. J. Math. Mech. **17** (1967), 315—329.

[2] Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1957.

[3] Hayman, W. K.: Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions. J. Anal. Math. **1** (1953), 155—179.

[4] Kirsch, S.: Ein verallgemeinerter transfiniter Durchmesser im Zusammenhang mit einer quasikonformen Normalabbildung. Complex Analysis. Banach Center Publications **11** (1982), 121—129.

[5] Kirsch, S.: Lageabschätzung für einen Kondensator minimaler Kapazität. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 119—131.

[6] Kirsch, S.: Extremalprinzipien zur Charakterisierung von quasikonformen Normalabbildungen und ihre Anwendung zur Abschätzung von Gebietsfunktionalen. Z. Anal. Anw. **6** (1984), 555—568.

[7] Kühnau, R.: Transfiniter Durchmesser, Kapazität und Tschebyschewsche Konstante in der euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie. J. reine angew. Math. **234** (1969), 216—220.

[8] Kühnau, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. **31** (1975), 269—289.

[9] Kühnau, R.: Identitäten bei quasikonformen Normalabbildungen und eine hiermit zusammenhängende Kernfunktion. Math. Nachr. **73** (1976), 73—106.

[10] Kühnau, R.: Gauß-Thomsonsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerte transfinite Durchmesser und quasikonforme Abbildungen. Lecture Notes Math. **743** (1979), 140—164.

[11] Lehto, O., und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1965.

[12] Menke, K.: Extremalpunkte und konforme Abbildungen. Math. Ann. **195** (1972), 292 bis 308.

[13] Pommerenke, Ch.: Über die Verteilung der Fekete-Punkte (I). Math. Ann. **168** (1967), 111—127.

[14] Pommerenke, Ch.: Über die Verteilung der Fekete-Punkte (II). Math. Ann. **179** (1969), 212—218.

[15] Tsuji, M.: Potential Theory in modern Function Theory. Tokyo: Maruzen 1959.


Manuskripteingang: 12. 07. 1984

VERFASSER:

Dr. Siegfried Kirsch
Sektion Mathematik/Physik
der Pädagogischen Hochschule „N. K. Krupskaja“
DDR-4020 Halle, Kröllwitzer Str. 44