Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (5) 1986, S. 457–463

Zum Begriff der Analytizität auf zusammenhängenden lokalkompakten Gruppen

H. F. Bauch

Es werden verschiedene Definitionen der Analytizität von Funktionen auf lokalkompakten Gruppen eingeführt und auf einem kompakten Solenoid im Vergleich mit den Eigenschaften der Fourierkoeffizienten getestet. Es erweist sich, daß Analytizität nicht die absolute Konvergenz der Fourierreihe bewirkt, und daß eine schnell fallende Folge von Fourierkoeffizienten einer auf einer dichten Teilmenge analytischen Funktion nicht exponentiell schnell fallen muß. Hingegen wird auf kompakten Gruppen die Analytizität von Funktionen mit exponentiell schnell fallenden Fourierkoeffizienten bewiesen.

Вводятся разные понятия аналитичности функций на локально компактных группах, которые исследуются на компактном соленоиде в сравнении со свойствами коэффициенмов фурье. Оказывается, что из аналитичности в общем не следует абсолютная сходимость ряда фурье и что быстро убывающая последовательность коэффициентов фурье функции, аналитичной на плотном подмножестве, может не экспоненциально быстро убывать. С другой стороны, оказывается что на компактных группах функции с экспоненциально быстро убывающей последовательностью коэффициентов фурье всегда аналитичны.

Several definitions of analyticity of functions on locally compact groups are introduced and tested in connection with the properties of the Fourier coefficients on a compact solenoid. It is proved that absolute convergence of the Fourier series does not follow from analyticity and that a rapidly decreasing sequence of Fourier coefficients of a function, which is analytic on a dense subset, need not exponentially rapidly decrease. On the other hand, on compact groups functions with exponentially rapidly decreasing Fourier coefficients are analytic.

0. In [4] wurde von Boseck der Begriff der analytischen Funktion auf einer zusammenhängenden lokalkompakten Gruppe definiert und mit verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffen (siehe [3]) verglichen. Für Funktionen auf einer kompakten oder abelschen Gruppe, die nicht liesch sein muß, ist es auch interessant, den Vergleich zu den Eigenschaften der Fouriertransformierten zu ziehen (vgl. [1, 5, 6, 8, 11–15]). Der Analytizitätsdefinition von Boseck werden im ersten Abschnitt Abschwächungen gegenübergestellt, die sich schon im Falle des Einheitskreises als sinnvoll erweisen: Im zweiten Abschnitt nutzen wir die Verallgemeinerung eines Beispiels von Katznelson [10] durch Hewitt und Ross [7] auf einem kompakten Solenoid, um zu zeigen, daß die Analytizität einer Funktion nicht die absolute Konvergenz ihrer Fourierreihe bewirkt. Fallen hingegen die Fourierkoeffizienten hinreichend schnell, so stellt die Fourierreihe eine analytische Funktion dar, wie im dritten Abschnitt bewiesen wird. Ein weiteres Beispiel auf dem Solenoid zeigt jedoch, daß es Funktionen gibt, die auf einer dichten Teilmenge analytisch sind und deren Fourierkoeffizienten schnell, aber nicht exponentiell schnell fallen.

1. Verschiedenen Analytizitätsdefinitionen stellen wir folgende Bezeichnungen voran. Es sei G eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe, $\mathfrak{U}$ ein fixiertes System von Umgebungen ihres Einselementes, $\mathfrak{O}$ die Familie der offenen Mengen

und Λ die Familie der einparametrigen Untergruppen, versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Λ besitzt die Struktur einer lieschen Algebra [3: S. 55]. Für beliebige $U \in \mathfrak{U}$, $n \in \mathsf{N}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ sei

$$U^{\lambda_1 \cdots \lambda_n} := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{R}^n : \lambda_1(t_1) \ldots \lambda_n(t_n) \in U\}.$$

Diese Menge ist offen und enthält den Ursprung. Ist $O \in \mathfrak{O}$, f eine komplexwertige Funktion auf O und $g \in O$ mit $gU \subseteqq O$, so sei $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ die durch

$$\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}(t_1, \ldots, t_n) := f(g\lambda_1(t_1) \ldots \lambda_n(t_n))$$

definierte komplexwertige Funktion auf $U^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$.

Definition 1 [4]: Eine Funktion f aus G in C heißt *streng* (bzw. *s-*) *analytisch auf* $O \in \mathfrak{O}$, wenn f auf O stetig ist und die folgende Bedingung erfüllt:

($\mathbf{A}_1$) Für jedes $g \in O$ existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $gU \subseteqq O$, so daß für alle $n \in \mathsf{N}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ die Funktion $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ in eine für alle $(t_1, \ldots, t_n) \in U^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ konvergente Taylorreihe um den Ursprung entwickelbar ist, deren Koeffizientenfunktionen auf $O \times \Lambda^n$ stetig sind.

Die Menge der auf O s-analytischen Funktionen sei $A_s(O)$.

Es erweist sich als nützlich, auch Analytizität in einem Punkt zu betrachten. Der benutzte Differenzierbarkeitsbegriff, der für liesche Gruppen mit dem üblichen übereinstimmt, ist z. B. in [3: S. 34, S. 61] definiert.

Definition 2: Eine Funktion f aus G in C heißt *s-analytisch in* $g \in G$, wenn ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert, so daß f auf gU beliebig oft stetig differenzierbar ist und die folgende Bedingung erfüllt:

($\mathbf{A}_2$) Für alle $n \in \mathsf{N}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ ist die Funktion $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ in eine für alle $(t_1, \ldots, t_n) \in U^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ konvergente Taylorreihe um den Ursprung entwickelbar.

Für wesentlich halten wir folgende Veränderung von Definition 1.

Definition 3: Eine Funktion f aus G in C heißt *analytisch auf* $O \in \mathfrak{O}$, wenn f auf O stetig ist und die folgende Bedingung erfüllt:

($\mathbf{A}_3$) Für jedes $g \in O$, $n \in \mathsf{N}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß die Funktion $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ in eine für alle $(t_1, \ldots, t_n)$ mit $|t_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ konvergente Taylorreihe entwickelbar ist, deren Koeffizientenfunktionen auf $O \times \Lambda^n$ stetig sind.

Die Menge der auf O analytischen Funktionen sei $A(O)$.

Die Beschränkung auf Analytizität in einem Punkt führt zu

Definition 4: Eine Funktion f aus G in C heißt *analytisch in* $g \in G$, wenn ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert, so daß f auf gU beliebig oft differenzierbar ist und die folgende Bedingung erfüllt:

($\mathbf{A}_4$) Für jedes $n \in \mathsf{N}$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß die Funktion $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ in eine für alle $(t_1, \ldots, t_n)$ mit $|t_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ konvergente Taylorreihe entwickelbar ist.

Da die Koeffizienten der Taylorreihe von $\tilde{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ gerade skalare Vielfache von Ableitungen von f im Sinne von [3] sind, erweisen sich die auf $O \in \mathfrak{O}$ analytischen Funktionen als auf O beliebig oft stetig differenzierbar. Ist M eine beliebige Teilmenge von G, so seien $A(M)$ und $A_s(M)$ die Mengen aller Funktionen, die für alle Elemente aus M analytisch bzw. s-analytisch sind. Offensichtlich ist $A_s(M) \subseteqq A(M)$. Nach Definition 4 existiert zu M ein $O \in \mathfrak{O}$ mit $M \subseteqq O$, so daß $A(M) \subseteqq C^\infty(O)$ ist. Daher sind die Bezeichnungen $A(M)$ und $A_s(M)$ gerechtfertigt. Offensichtlich sind die Mengen $A(M)$ und $A_s(M)$ lineare Räume.

Das folgende Lemma und seine Auswirkung auf die strenge Analytizität von Funktionen auf kompakten Gruppen macht deutlich, warum wir die Bedingungen ($\mathbf{A}_3$) und ($\mathbf{A}_4$) gegenüber ($\mathbf{A}_1$) und ($\mathbf{A}_2$) bevorzugen.

Lemma 1: *Es sei G eine kompakte Gruppe, $\lambda \in \Lambda$ und $U \in \mathfrak{U}$. Dann existiert zu jedem $C > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, $m > C$, so daß $m, -m \in U^\lambda$ sind.*

Beweis: Die Folge $(\lambda(n^2))_n$ hat einen Häufungswert $g \in G$. Sind dann V und W symmetrische Einsumgebungen mit $V^2 \subseteqq W \subseteqq U$, so existieren zu vorgegebenem $C > 0$ Zahlen $l, k \in \mathbb{N}$ mit $l > k > C$, so daß $\lambda(l^2), \lambda(k^2) \in Vg$ ist. Für $m := l^2 - k^2 > C$ erhalten wir $\lambda(m) \in Vgg^{-1}V \subseteqq W \subseteqq U$ und $\lambda(-m) \in W^{-1} = W \subseteqq U$ ∎

Unter den Voraussetzungen des Lemmas ist für jede in g s-analytische Funktion f die Taylorreihe von $f_g{}^\lambda$ für alle reellen t konvergent. Betrachtet man aber auf dem Einheitskreis $\mathbf{T}$ die Funktion f mit $f(g) = 2/(2-g)$, so sieht man leicht, daß diese auf $\mathbf{T}$ analytisch ist, aber für kein $g \in \mathbf{T}$ ihre Taylorreihe für alle reellen t konvergiert.

2. In [1] wurden der lineare Raum $S(G)$ der schnell fallenden $\mathbf{C}$-wertigen Funktionen auf einer kompakten zusammenhängenden Gruppe G definiert und Beziehungen zwischen den Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionen und dem Wachstum ihrer Fourierkoeffizienten bewiesen. Für den lieschen Fall siehe dazu auch [13, 15]. Mittels der in [2] beschriebenen Vereinfachung der Differenzierbarkeitsdefinition von Boseck und Czichowski für lokalkompakte Gruppen wurde gezeigt, daß jede Funktion $f \in S(G)$ auch beliebig oft differenzierbar ist. Wir wollen nun zeigen, daß auf nicht lokal zusammenhängenden kompakten Gruppen weder die C_∞- noch die A_s-Eigenschaft einer Funktion hinreichend für die absolute Konvergenz ihrer Fourierreihe ist. Der Beweis benutzt die bekannte Konstruktion einer stetigen Funktion mit nicht absolut summierbarer Fourierreihe von Katznelson [10: S. 99] und die Erweiterung dieser Konstruktion in [7: 37.19].

Beispiel 1: Es sei $G := \Sigma_a$ das a-adische Solenoid, dessen Charaktergruppe X zur additiven Gruppe $\mathbf{Q}_d$ der rationalen Zahlen in der diskreten Topologie isomorph ist. G ist eine abelsche Gruppe. Sie ist kompakt und zusammenhängend und besitzt eine eindimensionale Lie-Algebra Λ der einparametrigen Untergruppen. Es sei λ diejenige Untergruppe mit

$$\chi_r(\lambda(t)) = e^{irt} \qquad (t \in \mathbf{R},\ r \in \mathbf{Q},\ \chi_r \in \chi).$$

Für $f \in C^\infty(G)$ bezeichnen wir mit $f^{(k)}$ die k-fache Ableitung von f in Richtung der ausgezeichneten einparametrigen Untergruppe λ. Dann ist $f \in A_s(G)$ äquivalent zu

$$f(g\lambda(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(g)\,\frac{t^k}{k!} \qquad (g \in G,\ t \in \mathbf{R}).$$

Wir konstruieren nun eine auf G s-analytische Funktion f, deren Folge $(c_r) := (\hat{f}(\chi_r))$ der Fourierkoeffizienten nicht absolut summierbar ist. Dazu sei $f_0 := g_0 := \chi_0 := 1$ der Einscharakter und

$$\psi_m := \chi_{r_m}, \qquad f_{m+1} := f_m + \psi_m g_m, \qquad g_{m+1} := f_m - \psi_m g_m, \qquad r_m := 2^{-2^m}$$

für $m = 0, 1, \ldots$ Als Linearkombinationen von Charakteren sind alle f_m und g_m beliebig oft differenzierbar. Die folgende Aussage ist für $k = 0$ eine Folgerung aus [7: 37.19].

Lemma 2: *Für $k, m = 0, 1, \ldots$ gilt*

$$|f_m^{(k)}|^2 + |g_m^{(k)}|^2 \leqq 2^{m+1} \prod_{p=0}^{m-1} (1 + r_p)^{2k} \, 1 .$$

Beweis: Er wird mit vollständiger Induktion über m geführt. Man hat für beliebiges k erst einmal

$$|f_0^{(k)}|^2 + |g_0^{(k)}|^2 = 2 \, |1^{(k)}| \leqq 2 \cdot 1 \qquad \left(\prod_{p=0}^{-1} \ldots := 1 \right).$$

Die Aussage gelte nun für m und beliebiges k. Dann ist

$$\begin{aligned} |f_{m+1}^{(k)}|^2 + |g_{m+1}^{(k)}|^2 &= 2(|f_m^{(k)}|^2 + |(\psi_m g_m)^{(k)}|^2) \\ &= 2 \left(|f_m^{(k)}|^2 + \left| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (i r_m)^{k-l} \, g_m^{(l)} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Sind $z_0, z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{C}$ und $0 \leq r \in \mathbf{R}$, so gilt die Ungleichung

$$\left| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r^{k-l} z_l \right|^2 \leqq (1 + r)^k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r^{k-l} |z_l|^2 .$$

Sinngemäße Anwendung auf die Funktionen $i^{k-l} g_m^{(l)}$ und die Zahl r_m ergibt

$$\begin{aligned} |f_{m+1}^{(k)}|^2 + |g_{m+1}^{(k)}|^2 &\leqq 2 \left(|f_m^{(k)}|^2 + (1 + r_m)^k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r_m^{k-l} |g_m^{(l)}|^2 \right) \\ &\leqq 2(1 + r_m)^k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r_m^{k-l} (|f_m^{(l)}|^2 + |g_m^{(l)}|^2) \\ &\leqq 2(1 + r_m)^k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r_m^{k-l} 2^{m+1} \prod_{p=0}^{m-1} (1 + r_p)^{2l} \, 1 \\ &\leqq 2^{m+2} (1 + r_m)^k \prod_{p=0}^{m-1} (1 + r_p)^{2k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} r_m^{k-l} \, 1 \\ &= 2^{m+2} \prod_{p=0}^{m} (1 + r_p)^{2k} \, 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir fahren nun in der Konstruktion fort und betrachten die unendliche Reihe $\sum m^{-2} 2^{-m/2} \psi_m f_m$. Unter Benutzung von Lemma 2 und $(1 + r_1) \cdots (1 + r_p) \leqq 2$ folgt für alle $g \in G$

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-m/2} (\psi_m f_m)(g) \right| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-m/2} |\psi_m(g)| \, |f_m(g)| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-m/2} 2^{(m+1)/2} < \infty .$$

Da also die Reihe absolut und gleichmäßig auf G konvergiert, definiert sie eine stetige Funktion f. Zum Nachweis deren k-fachen Differenzierbarkeit differenzieren wir gliedweise und erhalten, analog zum Beweis von Lemma 2, $|(\psi_m f_m)^{(k)}(g)| \leqq 2^{(m+1+2k)/2}$ und folglich

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-m/2} (\psi_m f_m)^{(k)}(g) \right| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{k+1/2} < \infty .$$

Damit ist $f \in C^\infty(G)$. Es gilt weiterhin

$$f(g \lambda(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(g) \frac{t^k}{k!} < \infty \qquad (t \in \mathbf{R}, \, g \in G),$$

denn es existiert ein ϑ $(0 < \vartheta < 1)$, so daß für den Reihenrest

$$|R_{k-1}(t)| = \left| f^{(k)}(g\lambda(\vartheta t)) \frac{t^k}{k!} \right| \leqq 2^k \sqrt{2}\, \frac{\pi^2}{6} \frac{|t|^k}{k!} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

gilt. Es ist sogar $f \in A_s(G)$. Hingegen wurde in [7: 37.19] gezeigt, daß eine so konstruierte Funktion nicht in $l_1(\mathbf{Q}_d)$ liegt.

3. Es sei G eine beliebige kompakte zusammenhängende Gruppe mit dualem Objekt Σ (das sind die Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G). Bei Differenzierbarkeitsbetrachtungen kann man sich auf solche Gruppen beschränken, die eine endlichdimensionale Lie-Algebra Λ besitzen. Dann identifiziert man Σ mit der Menge der dominanten Integralformen auf einer Cartanschen Teilalgebra von Λ. Mittels der Killingform wird auf Λ und auf Σ ein absoluter Betrag definiert, den wir im folgenden wie üblich benutzen (vgl. dazu auch [1, 9, 13]).

Definition 5 [1]: Eine komplexwertige L_1-Funktion f auf G heißt *schnell fallend*, wenn für $k = 0, 1, \ldots$ gilt $\sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|\hat{f}(\sigma)\|_1 |\sigma|^k < \infty$. Die Menge dieser Funktionen sei $S(G)$.

Wir führen nun einen schärferen Begriff ein.

Definition 6: Eine komplexwertige L_1-Funktion f auf G heißt *ε-exponentiell schnell fallend* ($\varepsilon > 0$), wenn gilt $\sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|\hat{f}(\sigma)\|_1 e^{\varepsilon|\sigma|} < \infty$. Die Menge dieser Funktionen sei $ES_\varepsilon(G)$.

Wir bezeichnen

$$ES(G) := \bigcup_{\varepsilon > 0} ES_\varepsilon(G) \quad \text{und} \quad ES^\infty(G) := \bigcap_{\varepsilon > 0} ES_\varepsilon(G)$$

als die *Mengen der exponentiell* bzw. der *∞-exponentiell schnell fallenden Funktionen* $S(G)$, $ES_\varepsilon(G)$, $ES(G)$ und $ES^\infty(G)$ sind lineare Räume.

Satz: a) *Jede exponentiell schnell fallende Funktion ist schnell fallend.*
b) *Jede exponentiell schnell fallende Funktion ist analytisch auf G.*
c) *Jede ∞-exponentiell schnell fallende Funktion ist s-analytisch auf G.*

Beweis: a) Aus $|\sigma|^m \leqq \varepsilon^{-m} m!\, e^{\varepsilon|\sigma|}$ folgt für $f \in ES_\varepsilon(G)$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|\hat{f}(\sigma)\|_1 |\sigma|^m \leqq \frac{m!}{\varepsilon^m} \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|\hat{f}(\sigma)\|_1 e^{\varepsilon|\sigma|} < \infty.$$

b) Wir betrachten für $f \in ES(G)$, $g \in G$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ die Funktion $\bar{f} := \bar{f}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$. Wegen $f \in C^\infty(G)$ (vgl. [1]) ist auch $\bar{f}$ für kleine t_i beliebig oft differenzierbar. Nach [3: S. 36] gilt

$$\frac{\partial^k \bar{f}(0, \ldots, 0)}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_k}} = D^k f(g, \lambda_{i_k}, \ldots, \lambda_{i_1}) \quad (i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Die rechte Seite ist die k-fache Ableitung in Richtung der entsprechenden einparametrigen Untergruppen. Die Taylorreihe von $\bar{f}$ hat die Form

$$\sum_{k=0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_j = 1 \\ j = 1, \ldots, k}}^{n} \frac{\partial^k f(0, \ldots, 0)}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_k}} t_{i_1} \cdots t_{i_k}.$$

Es existieren ϑ_i mit $0 < \vartheta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so daß für das Restglied

$$R_{k-1}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_j=1 \\ j=1,\ldots,k}}^{n} \frac{\partial^k \tilde{f}(\vartheta_1 t_1, \ldots, \vartheta_n t_n)}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_k}} t_{i_1} \cdots t_{i_k}$$

gilt. Nach [3: S. 36] ist

$$\frac{\partial^k \tilde{f}(\vartheta_1 t_1, \ldots, \vartheta_n t_n)}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_k}} = D^k f\big(g\lambda_1(\vartheta_1 t_1) \cdots \lambda_n(\vartheta_n t_n), \lambda'_{i_k}, \ldots, \lambda'_{i_1}\big),$$

wobei λ'_{i_j} eine gewisse zu λ_{i_j} konjugierte Untergruppe aus Λ ist (vgl. [3: S. 15]) und folglich den gleichen absoluten Betrag wie λ_{i_j} hat. Für $D^k f := D^k f(\cdot, \lambda'_{i_k}, \ldots, \lambda'_{i_1})$ erhält man mittels $\|(Df(\cdot, \lambda))^\wedge(\sigma)\|_1 \leqq |\lambda|\, |\sigma|\, \|\hat{f}(\sigma)\|_1$ (siehe [1] für eine analoge Ungleichung) die Abschätzung

$$\|D^k f\|_\infty \leqq \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma\, |\lambda_{i_1}| \cdots |\lambda_{i_k}|\, |\sigma|^k\, \|\hat{f}(\sigma)\|_1 .$$

Da für ein $\varepsilon > 0$ die Reihe $\sum d_\sigma \|\hat{f}(\sigma)\|_1 e^{\varepsilon|\sigma|}$ konvergiert, folgt für $|\lambda_i| \leqq M$ und $|t_i| < \varepsilon' \leqq \varepsilon/nM$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$|R_{k-1}(t)| \leqq \frac{n^k M^k \varepsilon'^k}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma\, |\sigma|^k\, \|\hat{f}(\sigma)\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Damit ist f analytisch auf G.

c) Wenn ε beliebig groß gewählt werden kann, liegt auch für ε' keine Beschränkung vor, und f ist s-analytisch auf G ∎

In einer weiteren Arbeit werden wir zeigen, daß für jede kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra Λ die Gleichung $A(\exp \Lambda) = ES(G)$ gilt.

Für den Fall, daß G keine Lie-Gruppe ist, wollen wir dazu jetzt ein Gegenbeispiel angeben, das wir wesentlich D. VOGT verdanken.

Beispiel 2: Alle Bezeichnungen seien wie im Beispiel 1. Wir wählen $\varepsilon_m = m^{-2} 3^{-m^2}$, $\gamma_m = m^{-\sqrt{m}}$ und definieren eine Folge $(c_r)_{r\in\mathbf{Q}}$, indem wir $c_m := \gamma_m$, $c_{m-\varepsilon_m} := -\gamma_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und $c_r = 0$ für die restlichen rationalen Zahlen r setzen. Dann definiert $\sum c_r \chi_r$ eine Funktion $f \in S(G)$, denn

$$\sum_{r\in\mathbf{Q}} |c_r|\, |r|^k = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (m^k + (m - \varepsilon_m)^k) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} 2m^{-\sqrt{m}} m^k$$

$$= \sum_{m=1}^{(k+2)^2} 2m^{-\sqrt{m}+k} + \sum_{m=(k+2)^2+1}^{\infty} 2m^{k-\sqrt{m}} \leqq C(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} < \infty.$$

Für diese beliebig oft differenzierbare Funktion gilt

$$f^{(k)}(g) = \sum_{r\in\mathbf{Q}} c_r (ir)^k \chi_r(g) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\sqrt{m}} \big((im)^k \chi_m(g) - (i(m - \varepsilon_m))^k \chi_{m-\varepsilon_m}(g)\big).$$

Sie ist analytisch, sogar s-analytisch auf $\exp \Lambda$, da für alle $t \in \mathbf{R}$ und $g \in \exp \Lambda$

$$f(g\lambda(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(g) \frac{t^k}{k!} < \infty$$

gilt. Zum Beweis zeigen wir, daß $R_{k-1}(t) \to 0$ für $k \to \infty$. Für $g = \lambda(s)$ und $0 < \vartheta < 1$ ist

$$f^{(k)}(g\lambda(\vartheta t)) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \big((im)^k e^{im(s+\vartheta t)} - (i(m - \varepsilon_m))^k e^{i(m-\varepsilon_m)(s+\vartheta t)}\big).$$

Wendet man auf $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h(x) := (ix)^k e^{i(s+\theta t)x}$, auf den Intervallen $[m - \varepsilon_m, m]$ den Mittelwertsatz an, so kann man $|h(m - \varepsilon_m) - h(m)|$ durch $\varepsilon_m(km^{k-1} + (|s| + |t|) m^k)$ abschätzen und erhält

$$|R_{k-1}(t)| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \varepsilon_m (km^{k-1} + (|s| + |t|) m^k) \frac{|t|^k}{k!} \leqq (|s| + |t|) \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{(m|t|)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(m|t|)^k}{k!}\right).$$

Da die Reihe $\sum m^{-2} \exp(-m^2 \ln 3 + |t| m)$ konvergiert, ist ihre definierende Folge und damit auch $(R_{k-1}(t))_k$ eine Nullfolge. Diese auf $\exp \Lambda$ s-analytische, schnell fallende Funktion f ist jedoch nicht exponentiell schnell fallend: Für jedes $\delta > 0$ ist

$$\sum_{|r|=0}^{n} |c_r| e^{|r|\delta} = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m (e^{\delta m} + e^{(m-\varepsilon_m)\delta}) > \sum_{m=1}^{n} \gamma_m e^{\delta m} = \sum_{m=1}^{n} e^{\delta m - \sqrt{m} \ln m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

LITERATUR

[1] Bauch, H. F.: Test Functions and Generalized Functions on Topological Groups IV Math. Nachr. **103** (1981), 167–176.

[2] Bauch, H. F., und K. P. Rudolph: Zum Differenzierbarkeitsbegriff von Boseck und Czichowski auf lokalkompakten Gruppen. Preprint. Greifswald: Ernst-Moritz-Arndt-Universität 1978.

[3] Boseck, H., Czichowski, G., and K. P. Rudolph: Analysis on Topological Groups — General Lie Theory. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1981.

[4] Boseck, H.: Analytic Vectors in the Representation Theory of Connected Locally Compact Groups. Bull. d. L'Acad. Pol. des Sc. **29** (1981), 213–218.

[5] Drisch, Th., und W. Hazod: Analytische Vektoren von Faltungshalbgruppen. II: Funktionenräume auf lokalkompakten Gruppen. Monatsh. für Math. **88** (1979), 107–122.

[6] Frota-Mattos, L. A.: Analytic Continuation of the Fourier Series on Connected Compact Lie Groups. J. Funct. Anal. **29** (1978), 1–15.

[7] Hewitt, E., and K. A. Ross: Abstract Harmonic Analysis II. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1970.

[8] Hugelshofer, R.: Die Laplacetransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen. Diss. Nr. 5803. Zürich: Eidgen. Techn. Hochschule 1976.

[9] Humphreys, J. E.: Introduction to Lie algebras and representation theory. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1972.

[10] Katznelson, Y.: An introduction to harmonic analysis. New York, N. Y.: John Wiley & Sons 1968.

[11] Osborne, M. S.: On the Schwartz-Bruhat space and the Paley-Wiener theorem for locally compact Abelian groups. J. Funct. Anal. **19** (1975), 40–49.

[12] Petzsche, H. J., and D. Vogt: Almost Analytic Extension of Ultradifferentiable Functions and the Boundary Values of Holomorphic Functions. Math. Ann. **267** (1984), 17–36.

[13] Sugiura, M.: Fourier series of smooth functions on compact Lie groups. Osaka J. Math. **8** (1971), 33–47.

[14] Vogt, D.: Charakterisierung der Unterräume von s. Math. Z. **155** (1977), 109–117.

[15] Wallach, N.: Harmonic analysis on homogeneous spaces. New York, N. Y.: Dekker 1973.

Manuskripteingang: 29. 05. 1984; in revidierter Fassung 19. 07. 1985

VERFASSER:

Dr. Hans F. Bauch
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
DDR-2200 Greifswald, Friedrich-Ludwig-Jahn-Straße 15a