

## Einige notwendige Optimalitätsbedingungen für einfache reguläre Aufgaben der optimalen Steuerung

HOÀNG XUÂN PHÚ

Es werden drei notwendige Optimalitätsbedingungen für einfache reguläre Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen bewiesen und dann zur Lösung einer Aufgabenklasse angewandt.

Доказываются три необходимые условия оптимальности для простых, регулярных задач оптимального управления с ограничениями управления и состояния. Затем эти условия применяются для решения некоторого класса задач.

Three necessary conditions for optimal solutions of special regular optimal control problems with state and control constraints are proved. These conditions are then applied to a class of problems.

### Einleitung

Wir betrachten die Aufgabe der optimalen Steuerung

$$\mathfrak{F}(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf! \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq \beta, \quad |x(t)| \leq \alpha \quad \text{für } t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x(t_1) = 0,$$

wobei  $\alpha, \beta > 0$  und die Funktion  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar ist. Ferner ist  $f(t, \xi, \cdot)$  zweimal stetig differenzierbar mit

$$f_{vv}(t, \xi, v) > 0 \quad \text{für alle } (t, \xi, v) \in [t_0, t_1] \times [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta], \quad (2)$$

so daß (1)–(2) eine *reguläre Aufgabe der optimalen Steuerung* im Sinne eines Variationsproblems mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen ist.

Im weiteren wird die Funktion

$$h(t, \xi, v, w) := f_t(t, \xi, v) - f_{vt}(t, \xi, v) - f_{vt}(t, \xi, v) v - f_{vv}(t, \xi, v) w \quad (3)$$

gebraucht. In ihr wird später anstelle von  $w$  die Ableitung  $\dot{u}$  der Steuerung  $u$  gesetzt. Das ist nur möglich, nachdem das Folgende gezeigt wurde.

*Lemma: Es sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß der Aufgabe (1)–(2). Dann ist  $u$  stetig und fast überall differenzierbar.*

Wir wollen hier den Beweis nicht vorführen, vgl. dazu [3, 5]. Ein klassisches Vorbild hierfür finden wir nach WEIERSTRASS bei O. BOLZA [1: Seite 397].

## 1. Einige notwendige Optimalitätsbedingungen

Zuerst wollen wir eine notwendige Optimalitätsbedingung aus dem Pontrjaginschen Maximumprinzip ableiten.

Satz 1: *Es sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß der Aufgabe (1)–(2). Dann gilt*

a)  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) = 0$  fast überall in  $J_0(x, u)$ ,

b)  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) \leq 0$  fast überall in  $J_1(x, u)$ ,

c)  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) \geq 0$  fast überall in  $J_2(x, u)$

mit

$$J_0(x, u) := \{t \in [t_0, t_1] \mid |x(t)| < \alpha, |u(t)| < \beta\},$$

$$J_1(x, u) := \{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = \alpha, |u(t)| < \beta\},$$

$$J_2(x, u) := \{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = -\alpha, |u(t)| < \beta\}.$$

Beweis: Nach dem Pontrjaginschen Maximumprinzip (vgl. A. D. IOFFE und V. M. TICHOMIROV [5: Seite 208]) gilt für jeden optimalen Prozeß  $(x, u)$  der Aufgabe (1)–(2)

$$(i) \quad p(t) = t_0 + \int_{t_0}^t \lambda_0 f_z(t, x(t), u(t)) dt + \int_{(t_0, t)} d\mu_1 - \int_{(t_0, t)} d\mu_2$$

$$(ii) \quad p(t) u(t) - \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) = \text{Max}_{|v| \leq \beta} [p(t) v - f(t, x(t), v)]$$

fast überall in  $[t_0, t_1]$ , wobei  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nichtnegative, reguläre und auf  $\{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = \alpha\}$  bzw.  $\{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = -\alpha\}$  konzentrierte Maße sind. Man kann  $\lambda_0 > 0$  zeigen (vgl. [2]), deshalb kann  $\lambda_0 = 1$  angenommen werden. Daraus folgt wegen (ii)

$$p(t) - f_v(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \text{f. ü. in } J(x, u) := \{t \in [t_0, t_1] \mid |u(t)| < \beta\},$$

weil  $f$  in  $v$  konvex ist. Durch Einsetzen in (i) ergibt sich wegen (3)

$$\begin{aligned} h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) \\ = f_z(t, x(t), u(t)) - \frac{d}{dt} f_0(t, x(t), u(t)) = \frac{d}{dt} \left[ \int_{(t_0, t)} d\mu_1 - \int_{(t_0, t)} d\mu_2 \right] \end{aligned}$$

fast überall in  $J(x, u)$ . Weil  $\mu_1$  auf  $\{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = \alpha\}$  und  $\mu_2$  auf  $\{t \in [t_0, t_1] \mid x(t) = -\alpha\}$  konzentriert und nicht negativ sind, ergibt sich die Behauptung des Satzes 1 unmittelbar aus dieser Gleichung ■

Anhand der Funktion  $h$  wird der Zustandsbereich

$$G = [t_0, t_1] \times [-\alpha, \alpha]$$

in drei Bereiche eingeteilt, die nicht unbedingt zusammenhängend sein müssen, nämlich

$$G^0 := \{(t, \xi) \in G \mid h(t, \xi, 0, 0) = 0\},$$

$$G^+ := \{(t, \xi) \in G \mid h(t, \xi, 0, 0) > 0\},$$

(4)

$$G^- := \{(t, \xi) \in G \mid h(t, \xi, 0, 0) < 0\}.$$

Nun gilt

Satz 2: *Es sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß der Aufgabe (1)–(2),  $G_i$  ein zusammenhängender Bereich in  $G$  und  $z, s_{i-1}, s_i \in [t_0, t_1]$  mit  $s_{i-1} < z < s_i$  derart, daß  $u(z) = 0$  und  $(t, x(t)) \in G_i$  für alle  $t \in (s_{i-1}, s_i)$  gilt.*

a) *Im Falle  $G_i \subset G^+$  ist  $u(t) \leq 0$  für  $t \in (s_{i-1}, z)$  und  $u(t) \geq 0$  für  $t \in (z, s_i)$ .*

b) *Im Falle  $G_i \subset G^-$  ist  $u(t) \geq 0$  für  $t \in (s_{i-1}, z)$  und  $u(t) \leq 0$  für  $t \in (z, s_i)$ .*

Beweis: Angenommen, die Behauptung a) wäre falsch. Dann muß ein  $z' \in (s_{i-1}, z)$  mit  $u(z') > 0$  oder ein  $z' \in (z, s_i)$  mit  $u(z') < 0$  existieren. Wir werden nur den ersten Fall erörtern, für den zweiten Fall sind die Überlegungen analog und b) kann analog zu a) bewiesen werden. Es sei also  $u(z') > 0$  für ein  $z' \in (s_{i-1}, z)$ . Wegen der Stetigkeit von  $u$  und  $u(z) = 0$  muß ein  $z'' \in (z', z)$  mit  $\dot{u}(z'') = 0$  und  $u(t) > 0$  für alle  $t \in [z', z'']$  existieren. Weil  $u$  fast überall differenzierbar ist (vgl. Lemma 1), gilt für alle  $\delta > 0$ , daß  $\dot{u}(t) < 0$  für alle  $t$  einer Menge von positivem Maß in  $(z'' - \delta, z'')$  ist. Aus

$$h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) - h(t, x(t), u(t), 0) = -f_{v\dot{v}}(t, x(t), u(t)) \dot{u}(t)$$

und (2) folgt weiter  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) > h(t, x(t), u(t), 0)$  für alle  $t$  einer Menge vom positiven Maß in  $(z'' - \delta, z'')$ . Da  $x, u$  und  $h$  stetig sind,  $h(t, x(t), 0, 0) > 0$  für  $t \in [z', z''] \subset (s_{i-1}, s_i)$  und  $u(z'') = 0$  ist, läßt sich  $\delta$  so klein wählen, daß gilt

$$h(t, x(t), \dot{u}(t), 0) > 0, \quad 0 < u(t) < \beta \quad \text{und} \quad z'' - \delta > z'$$

für alle  $t \in (z'' - \delta, z'')$ . Für dieses  $\delta$  gilt also  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) > 0$  für alle  $t$  einer Menge von positivem Maß in  $(z'' - \delta, z'')$ , im Widerspruch zu Satz 1, denn wegen  $0 < u(t) < \beta$  und  $\dot{x}(t) = u(t)$  für  $t$  aus  $(z'' - \delta, z'')$  gilt  $(z'' - \delta, z'') \subset J_0(x, u)$  ■

Folgerung 1: *Es mögen  $(x, u)$ ,  $G_i$  und  $s_{i-1}, s_i$  den Voraussetzungen in Satz 2 genügen. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) *Im Falle  $G_i \subset G^+$ ,  $z \in (s_{i-1}, s_i)$  und  $u(z) > 0$  ist  $u(t) > 0$  für alle  $t \in (z, s_i)$ .*

b) *Im Falle  $G_i \subset G^-$ ,  $z \in (s_{i-1}, s_i)$  und  $u(z) < 0$  ist  $u(t) < 0$  für alle  $t \in (z, s_i)$ .*

Beweis: Angenommen, die Behauptung a) wäre falsch. Dann existiert wegen der Stetigkeit von  $u$  ein  $z' \in (z, s_i)$  mit  $u(z') = 0$ . Nach Satz 2 muß  $u(z) \leq 0$  sein, weil  $z \in (s_{i-1}, z')$  ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Der Beweis für b) verläuft analog ■

Definition: Es heißt  $z \in (t_0, t_1)$  lokal strenge Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) der Funktion  $x$ , wenn für ein  $\delta_1 > 0$  gilt

$$|t - z| < \delta_1 \quad \text{impliziert} \quad x(t) \leq x(z) \quad (\text{bzw. } x(t) \geq x(z))$$

und wenn für alle  $\delta_2 > 0$  ein  $z'$  existiert mit

$$|z - z'| < \delta_2 \quad \text{und} \quad x(z') < x(z) \quad (\text{bzw. } x(z') > x(z)).$$

Mit diesen Begriffen formulieren wir jetzt eine andere notwendige Optimalitätsbedingung, die sich später in den Anwendungen als sehr wirksam erweisen wird.

Satz 3: *Es sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß der Aufgabe (1)–(2). Dann besitzt  $x$  keine lokal strenge Maximalstelle in  $G^+$  und keine lokal strenge Minimalstelle in  $G^-$ .*

Beweis: Angenommen,  $z$  wäre eine lokal strenge Maximalstelle von  $x$  in  $G^+$  (der Beweis betreffs einer lokal strengen Minimalstelle in  $G^-$  verläuft analog). Wegen

der Stetigkeit von  $u$  und  $\dot{x} = u$  gilt dann  $u(z) = 0$ . Wegen der Definition von  $G^+$  existieren  $s_{i-1}, s_i \in [t_0, t_1]$  und  $G_i \subset G^+$  mit

$$z \in (s_{i-1}, s_i) \quad \text{und} \quad (t, x(t)) \in G_i \quad \text{für alle } t \in (s_{i-1}, s_i).$$

Aus Satz 2 folgt  $u(t) \leq 0$  für alle  $t \in (s_{i-1}, z)$  und  $u(t) \geq 0$  für alle  $t \in (z, s_i)$ . Deshalb gilt  $x(t) \geq x(z)$  für alle  $t \in (s_{i-1}, s_i)$ , im Widerspruch zur Definition der lokal strengen Maximalstelle ■

## 2. Anwendungsbeispiele

Mit Hilfe der im Abschnitt 1 bewiesenen Optimalitätsbedingungen kann man schon viele Aufgaben der optimalen Steuerung lösen. Hier wollen wir einige typische Beispiele betrachten.

Beispiel 1: Wir betrachten die Aufgabe

$$\int_0^T (u^2 - ux - \cos x) dt \rightarrow \inf!$$

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq \beta, \quad |x| \leq \alpha, \quad x(0) = x(T) = 0.$$

( $0 < \alpha < \pi$ ). Für diese ist  $h(t, \xi, v, w) = \sin \xi - 2vw$ . Der Zustandsbereich  $G = [0, T] \times [-\alpha, \alpha]$  wird anhand  $h(\cdot, \cdot, 0, 0)$  in die drei Bereiche

$$G_1 := \{(t, \xi) \in G \mid 0 < \xi \leq \alpha\} = G^+,$$

$$G_2 := \{(t, \xi) \in G \mid \xi = 0\} = G^0,$$

$$G_3 := \{(t, \xi) \in G \mid 0 > \xi \geq -\alpha\} = G^-$$

eingeteilt. (vgl. Abb. 1).

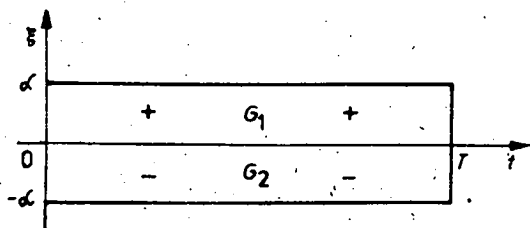


Abb. 1

Es sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß dieser Aufgabe. Dann kann  $x$  nicht in  $G_1$  eintreten, denn sonst existiert wegen  $x(0) = x(T) = 0$  mindestens eine lokal strenge Maximalstelle in  $G_1 = G^+$ , im Widerspruch zu Satz 3. Ebenso kann  $x$  nicht in  $G_3$  eintreten, sonst existiert eine lokal strenge Minimalstelle in  $G_3 = G^-$ . Also kann  $x$  nur noch in  $G_2$  bleiben. Ausgehend von der Existenz des optimalen Prozesses (vgl. [5, 7]) bedeutet das: Der einzige optimale Prozeß dieser Aufgabe ist  $(x, u)$  mit  $x(t) = 0$ ,  $u(t) = 0$  für alle  $t \in [0, T]$ .

Beispiel 2: Wir betrachten die Aufgabe

$$\int_0^T (u^2 - \sin x + x^2) dt \rightarrow \inf!$$

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq \beta, \quad |x| \leq \alpha, \quad x(0) = x(T) = 0.$$

( $1/2 < \alpha < \pi/2$ ,  $T$  und  $\beta$  hinreichend groß). Für diese ist  $h(t, \xi, v, w) = -\cos \xi + 2\xi - 2w$ . Es sei  $\xi_0$  die Lösung der Gleichung  $-\cos \xi + 2\xi = 0$  ( $\xi_0$  ist eindeutig und annähernd gleich 0,45). Dann wird der Zustandsbereich  $G$  anhand  $h(\cdot, \cdot, 0, 0)$  in die fünf Bereiche

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{(t, \xi) \in G \mid \xi > \xi_0\} = G^+, & G_4 &:= \{(t, \xi) \in G \mid \xi = 0\} \subset G^-, \\ G_2 &:= \{(t, \xi) \in G \mid \xi = \xi_0\} = G^0, & G_5 &:= \{(t, \xi) \in G \mid \xi < 0\} \subset G^-, \\ G_3 &:= \{(t, \xi) \in G \mid 0 < \xi < \xi_0\} \subset G^-, \end{aligned}$$

eingeteilt (vgl. Abb. 2).

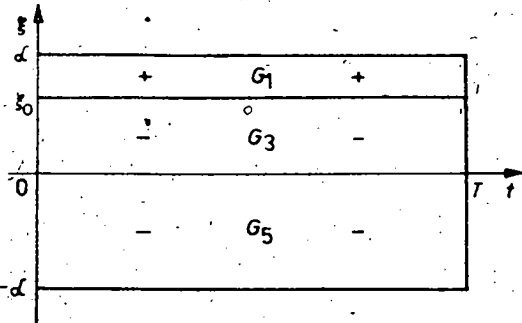


Abb. 2.

Wenn wir diese Aufgabe mit dem in [5] dargestellten Pontrjaginschen Maximumprinzip lösen, dann kommen wegen der verschiedenen möglichen Konstanten und Maße zunächst alle  $G_i$  in Betracht. Das ist natürlich sehr umfangreich. Mit Hilfe der Sätze 1–3 kann aber die Untersuchung erheblich verkürzt werden: Analog wie im Beispiel 1 kann kein optimaler Prozeß in  $G_1 = G^+$  eintreten, sonst würde eine lokal strenge Maximalstelle von  $x$  in  $G^+$  existieren, im Widerspruch zu Satz 3. Ebenso kann er auch nicht in  $G_5$  eintreten, sonst gäbe es eine lokal strenge Minimalstelle von  $x$  in  $G^-$ . Der optimale Prozeß  $(x, u)$  kann ebenfalls nicht in  $G_4$  bleiben, d. h.  $x(t) = 0, u(t) = 0$  für alle  $t \in [0, T]$  sein, denn sonst wäre  $h(t, x(t), u(t), \dot{u}(t)) = h(t, 0, 0, 0) < 0$  für alle  $t \in [0, T] = J_0(x, u)$ , im Widerspruch zu Satz 1. Also muß die Untersuchung nur noch in  $G_2 \cup G_3 \cup \{(0, 0), (0, T)\}$  durchgeführt werden (vgl. Abb. 3). Nun betrachten wir den Prozeß  $(x^*, u^*)$  mit

$$\begin{aligned} x^*(0) = x^*(T) = 0, & \quad z_1 < z_2, \\ x^*(t) = \xi_0, & \quad u^*(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [z_1, z_2], \\ 2x^*(t) - \cos x^*(t) - 2\dot{x}^*(t) = 0 & \quad \text{für alle } t \in (0, z_1) \cup (z_2, T) \end{aligned}$$

( $T$  und  $\beta$  seien so groß, daß  $z_1$  und  $z_2$  mit den obigen Eigenschaften existieren und  $\beta > u^*(0), \beta > -u^*(T)$  gilt). Es läßt sich zeigen, daß  $(x^*, u^*)$  sowie  $z_1$  und  $z_2$  dadurch eindeutig definiert sind. Man kann auch nachprüfen, daß dieser Prozeß der im Satz 1 angegebenen notwendigen Optimalitätsbedingung genügt, d. h. daß  $h(t, x^*(t), u^*(t), \dot{u}^*(t)) = 0$  für alle  $t \in [0, T] = J_0(x^*, u^*)$  ist.

Wir wollen jetzt den Beweis dafür skizzieren, daß  $(x^*, u^*)$  der einzige optimale Prozeß ist. Es sei zuerst  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß mit  $u(0) > u^*(0)$ . Dann kann man zeigen, daß  $x$  in  $G_3$  oberhalb von  $x^*$  liegt. Ist  $z_3$  derjenige Zeitpunkt mit  $x(z_3) = \xi_0$ , dann gilt  $u(z_3) \geq u^*(z_3) > 0$ . Also tritt  $x$  in  $G_1$  ein, im Widerspruch zur obigen Überlegung. Nun sei  $(x, u)$  ein optimaler Prozeß mit  $u(0) < u^*(0)$ . Dann kann man

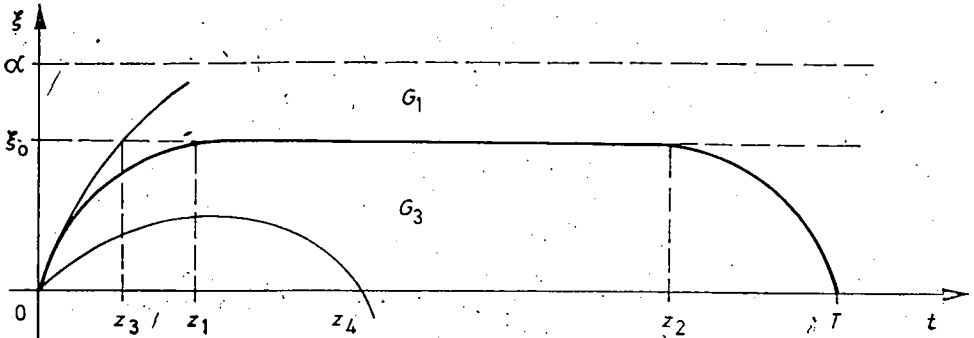


Abb. 3

zeigen, daß  $x$  unterhalb von  $x^*$  verläuft und die  $t$ -Achse in  $z_4$  mit  $z_4 < T$  schneidet. Dabei gilt  $u(z_4) < 0$ , d. h.  $x$  tritt in  $G_5$  ein, ebenfalls im Widerspruch zur obigen Überlegung. Damit muß  $u(0) = u^*(0)$  für einen beliebigen optimalen Prozeß  $(x, u)$  gelten. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der zugehörigen Differentialgleichung stimmen  $(x^*, u^*)$  und  $(x, u)$  in  $[0, z_1]$  überein. Analog kann man die Übereinstimmung  $(x, u)$  und  $(x^*, u^*)$  in  $[z_2, T]$  beweisen. In  $(z_1, z_2)$  schließlich müssen  $(x, u)$  und  $(x^*, u^*)$  auch identisch sein, denn sonst verlief  $x$  innerhalb von  $G_3$ , und wegen  $x(z_1) = x(z_2) = \xi_0$  gäbe es mindestens eine lokal strenge Minimalstelle in  $G_3 \subset G^-$ , im Widerspruch zu Satz 3. Ausgehend von der Existenz eines optimalen Prozesses (vgl. [5, 7]) folgt daraus, daß  $(x^*, u^*)$  der einzige optimale Prozeß ist.

Beispiel 3: Wir betrachten die Aufgabe

$$\int_0^T ((t+1)u^2 - ux + \sin x) dt \rightarrow \inf!$$

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq \beta, \quad |x| \leq \alpha, \quad x(0) = x(T) = 0$$

( $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $T$  und  $\beta$  hinreichend groß). Für diese ist  $h(t, \xi, v, w) = \cos \xi - 2v - 2(t+1)w$ . Damit ist  $h(t, \xi, 0, 0) > 0$  für alle  $(t, \xi) \in G$ , d. h.  $G^+ = G$  (vgl. Abb. 4). Analog wie im Beispiel 2 kann man zeigen, daß der wie folgt definierte Prozeß  $(x^*, u^*)$  der einzige optimale Prozeß dieser Aufgabe ist (vgl. Abb. 5):

$$x^*(0) = x^*(T) = 0, \quad z_1 < z_2,$$

$$x^*(t) = -\alpha, \quad u^*(t) = 0 \quad \text{für } t \in [z_1, z_2],$$

$$\cos x^*(t) - 2x^*(t) - 2(t+1)\dot{x}^*(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0, z_1) \cup (z_2, T).$$

Beispiel 4: Wir betrachten die Aufgabe

$$\mathfrak{F}(x, u) = \int_0^T \left( u^2 - \sin^2 x + \frac{x^2}{2} \right) dt \rightarrow \inf!$$

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq \beta, \quad |x| \leq \alpha, \quad x(0) = x(T) = 0$$

( $0 < \alpha \leq \pi/4$ ,  $T$  und  $\beta$  hinreichend groß). Dies ist die schwierigste unter den vier behandelten Beispielen. Sie wurde in [2] ausführlich behandelt. Hier wird die Lösung

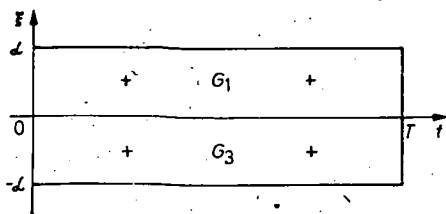


Abb. 4

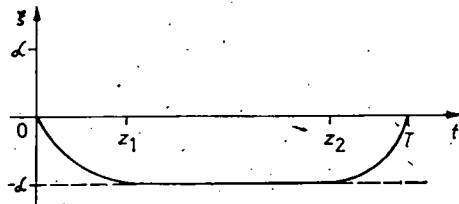


Abb. 5

nur angegeben. Es ist

$$h(t, \xi, v, w) = -\sin 2\xi + \xi - 2w.$$

Der Zustandsbereich wird in die drei Bereiche

$$G_1 := \{(t, \xi) \in G \mid \xi > 0\} = G^-,$$

$$G_2 := \{(t, \xi) \in G \mid \xi = 0\} = G^0,$$

$$G_3 := \{(t, \xi) \in G \mid \xi < 0\} = G^+$$

zerlegt (vgl. Abb. 6). Wir betrachten drei Prozesse  $(x_1, u_1)$ ,  $(x_2, u_2)$  und  $(x_3, u_3)$  mit

$$x_1(0) = x_1(T) = 0, \quad z_1 < z_2,$$

$$x_1(t) = \alpha, \quad u_1(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [z_1, z_2],$$

$$-\sin 2x_1(t) + x_1(t) - 2\ddot{x}_1(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in (0, z_1) \cup (z_2, T),$$

$$x_3(t) = -x_1(t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

(vgl. Abb. 7). Diese genügen der im Satz 1 dargestellten notwendigen Optimalitätsbedingung. Jedoch kommen nur  $(x_1, u_1)$  und  $(x_3, u_3)$  in Frage, weil  $\mathfrak{F}(x_1, u_1) = \mathfrak{F}(x_3, u_3) < 0 = \mathfrak{F}(x_2, u_2)$  gilt. Ferner kann man zeigen, daß es keinen optimalen Prozeß gibt, der von  $(x_1, u_1)$  und  $(x_3, u_3)$  verschieden ist. Ausgehend von der Existenz der optimalen Prozesse müssen  $(x_1, u_1)$  und  $(x_3, u_3)$  die einzigen optimalen Prozesse dieser Aufgabe sein.

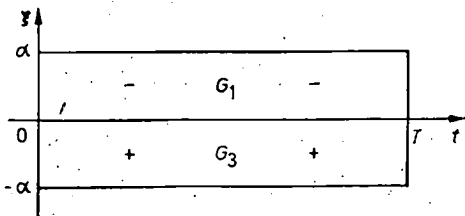


Abb. 6

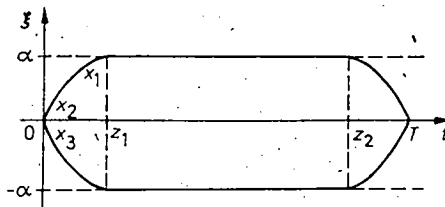


Abb. 7

Damit haben wir gesehen, wie die vorangestellten notwendigen Optimalitätsbedingungen die Konstruktion optimaler Trajektorien wesentlich vereinfachen können. Dieses Konstruktionsprinzip nennen wir *Methode der Bereichsanalyse*. Sie wird in anderen Fällen auch in [4] beschrieben.

Wir haben vier Beispiele untersucht. Diese besitzen die gemeinsame Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_{\xi}(t, \xi, v) - f_{vt}(t, \xi, v)) = 0 \quad \text{für alle } (t, \xi, v) \in [t_0, t_1] \times [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta].$$

Unter dieser Voraussetzung kann die Aufgabe (1)–(2) für hinreichend kleines  $\alpha$  außer den in den Beispielen 1–4 auftretenden Typen der Struktur von  $G$  nur noch die zwei in Abb. 8 und 9 dargestellten Typen haben, die sich aber ähnlich wie in den Beispielen 2 und 3 behandeln lassen. Dabei sind die mit „+“ und „-“ markierten Bereiche in  $G^+$  bzw.  $G^-$  enthalten.

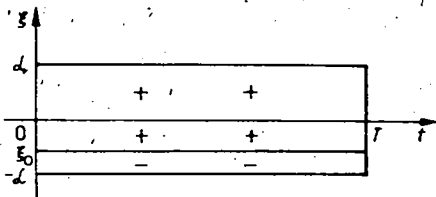


Abb. 8

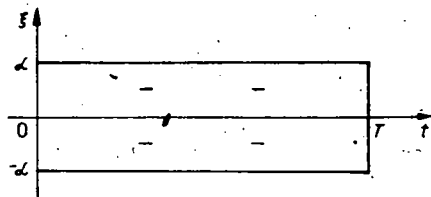


Abb. 9

Schließlich wollen wir noch ein angewandtes Beispiel untersuchen.

Beispiel 5: Gegeben sei eine Kurve  $K(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Zahl  $\alpha > 0$  mit  $K(t) > \alpha$  für  $t \in [0, T]$ ,  $K(\cdot) \in C^2[0, T]$ . Gesucht ist eine Kurve  $y(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(0) = K(0), \quad y(T) = K(T) \quad \text{und} \quad |y(t) - K(t)| \leq \alpha \quad \text{für } t \in [0, T],$$

so daß die Rotationsfläche, die durch Drehung des Kurvenbogens  $y(\cdot)$  um die  $t$ -Achse entsteht, einen minimalen Inhalt

$$J(y) = 2\pi \int_0^T y \sqrt{1 + y'^2} dt$$

ihrer Mantelfläche besitzt. Um diese Aufgabe in die Gestalt von (1) umzuformen, führen wir  $x := y - K$  als neue Variable ein. Damit entsteht die äquivalente Aufgabe

$$\mathfrak{F}(x, u) := \int_0^T (x + K(t)) \sqrt{1 + (u + \dot{K}(t))^2} dt \rightarrow \inf!$$

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq \beta, \quad |x| \leq \alpha, \quad x(0) = x(T) = 0.$$

Im folgenden untersuchen wir diese Aufgabe für hinreichend kleines  $\alpha$  und hinreichend großes  $\beta$ .

Die Funktion  $h$  lautet

$$h(t, \xi, v, w) = [1 + (v + \dot{K}(t))^2]^{-3/2} [1 + (v + \dot{K}(t))^2 - (\xi + K(t)) \times (w + \ddot{K}(t))]$$

und damit ist

$$h(t, \xi, 0, 0) = [1 + \dot{K}^2(t)]^{-3/2} [1 + \dot{K}^2(t) - (\xi + K(t)) \ddot{K}(t)].$$



Wir betrachten dazu zwei besondere Fälle:

*Fall a:*  $1 + \dot{K}^2(t) - (\alpha + K(t)) \ddot{K}(t) > 0$  für alle  $t \in [0, T]$ . (Zu beachten ist, daß dabei  $\dot{K}(t)$  wegen  $K(t) - \alpha > 0$  auch negativ sein kann.) In diesem Falle gilt

$$1 + \dot{K}^2(t) - (\xi + K(t)) \ddot{K}(t) > 0 \quad \text{für } t \in [0, T] \text{ und } \xi \in [-\alpha, \alpha],$$

d. h.  $G = G^+$ . Analog wie im Beispiel 3 gilt nun, daß der wie folgt definierte Prozeß  $(x^*, u^*)$  optimal ist:

$$x^*(0) = x^*(T) = 0, \quad z_1 < z_2,$$

$$x^*(t) = -\alpha, \quad u^*(t) = 0 \quad \text{für } t \in [z_1, z_2],$$

$$h(t, x^*(t), u^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0 \quad \text{für } t \in (0, z_1) \cup (z_2, T).$$

(Die Existenz und die Eindeutigkeit von  $(x^*, u^*)$  ist für hinreichend kleines  $\alpha$  gewährleistet.) Im Innern des Zustandsbereiches hat  $x^*$  die Gestalt

$$x^*(t) = c_1^{-1} \cosh(c_1 t + c_2) - K(t),$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  jeweils in  $(0, z_1)$  bzw.  $(z_2, T)$  geeignete Konstanten sind (vgl. A. KNESCHKE [6: Seite 287]). Wenn wir das Ergebnis auf die ursprüngliche Form zurückführen, hat die optimale Kurve  $y^*(\cdot)$  in diesem Fall die Gestalt

$$y^*(t) = K(t) - \alpha \quad \text{für } t \in [z_1, z_2],$$

$$y^*(t) = c_{1i}^{-1} \cosh(c_{1i} t + c_{2i}) \quad \text{für } t \in I_i,$$

wobei

$$I_1 = [0, z_1], \quad c_{11} = \frac{\sqrt{1 + \dot{K}^2(z_1)}}{K(z_1) - \alpha}, \quad c_{21} = \operatorname{arcosh}(c_{11} K(0)),$$

$$I_2 = [z_2, T], \quad c_{12} = \frac{\sqrt{1 + \dot{K}^2(z_2)}}{K(z_2) - \alpha}, \quad c_{22} = \operatorname{arcosh}(c_{12} K(T)) - c_{12} T$$

ist (vgl. dazu Abb. 10).

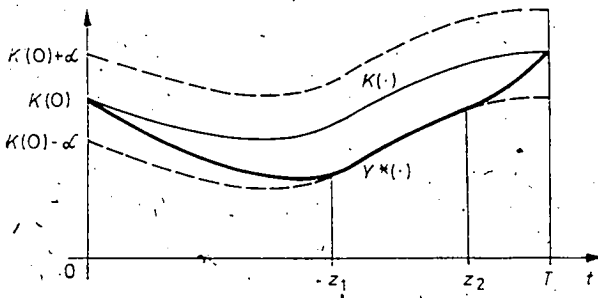


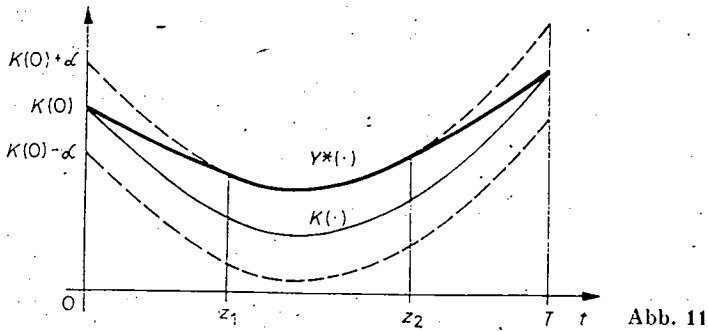
Abb. 10

*Fall b:*  $1 + \dot{K}^2(t) + (\alpha - K(t)) \ddot{K}(t) < 0$  für alle  $t \in [0, T]$ . In diesem Falle ist  $G = G^-$ . Für hinreichend kleines  $\alpha$  existiert genau ein Prozeß  $(x^*, u^*)$  mit

$$x^*(0) = x^*(T) = 0, \quad z_1 < z_2,$$

$$x^*(t) = \alpha, \quad u^*(t) = 0 \quad \text{für } t \in [z_1, z_2],$$

$$h(t, x^*(t), u^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0 \quad \text{für } t \in (0, z_1) \cup (z_2, T).$$



Analog wie oben kann man zeigen, daß  $(x^*, u^*)$  der einzige optimale Prozeß ist. Weil es sich aus der letzten Gleichung ergibt, daß im Innern des Zustandsbereiches  $x^*$  die Gestalt

$$x^*(t) = c_1^{-1} \cosh(c_1 t + c_2) - K(t)$$

hat, kann man zeigen, daß  $y^*(\cdot)$  mit

$$y^*(t) = K(t) + \alpha \quad \text{für } t \in [z_1, z_2],$$

$$y^*(t) = c_{ii}^{-1} \cosh(c_{ii} t + c_{2i}) \quad \text{für } t \in I_i$$

die einzige optimale Kurve der ursprünglichen Aufgabe ist, wobei

$$I_1 = [0, z_1], \quad c_{11} = \frac{\sqrt{1 + \dot{K}^2(z_1)}}{K(z_1) + \alpha}, \quad c_{21} = \operatorname{arcosh}(c_{11} K(0)),$$

$$I_2 = [z_2, T], \quad c_{12} = \frac{\sqrt{1 + \dot{K}^2(z_2)}}{K(z_2) + \alpha}, \quad c_{22} = \operatorname{arcosh}(c_{12} K(T)) - c_{12} T$$

ist (vgl. dazu Abb. 11).

Das Beispiel 5 ist verwandt mit folgender praktischer Aufgabe: Gesucht ist die stabile Lage  $y(\cdot)$  eines Seils, das in einer Röhre liegt und dessen Enden an zwei gegebenen Punkten festgebunden sind. Das ist gerade die Lage, in der die potentielle Energie

$$eg \int_0^T y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dt$$

minimalen Wert hat ( $\varrho$ : Massendichte des Seils,  $g$ : Erdbeschleunigung). Gemeinsam mit der Längerestriktion des Seils

$$\int_0^T \sqrt{1 + \dot{y}^2} dt = l$$

hat diese Aufgabe die Form des Lagrange-Problems

$$\int_0^T (y + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dt \rightarrow \text{Min!}$$

Unter Anwendung der obigen Lösungsmethode und der Bestimmung des Zusammenhangs zwischen dem Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  und der Länge  $l$  kann man schließlich analog die stabile Lage des Seils mit einer vorgegebenen Länge  $l$  ermitteln.

## LITERATUR

- [1] BOLZA, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1909.
- [2] HOÀNG XUÂN PHÚ: Methoden zur Lösung von Aufgaben der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.
- [3] HOÀNG XUÂN PHÚ: Zur Stetigkeit der Lösung der adjungierten Gleichung bei Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen. Z. Anal. Anw. 6 (1984), 527—539.
- [4] HOÀNG XUÂN PHÚ: Lösung einer einfachen regulären Aufgabe der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen anhand der Methode der Bereichsanalyse. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 16 (1985), 431—438.
- [5] IOFFE, A. D., und V. M. ТИХОМИРОВ: Theorie der Extremalaufgaben. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.
- [6] КНЕСЧКЕ, А.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Bd. III. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.
- [7] МОРБУХОВИЧ, Б. Ш.: Существование оптимальных управлений: Итоги науки, серия: Современные проблемы математики 6. Москва 1976, 207.

Manuskripteingang: 25. 06. 1983; in revidierter Fassung 27. 06. 1985

## VERFASSER:

Dr. HOÀNG XUÂN PHÚ  
 Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität  
 DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz

Ab April 1987: Viện Toán học  
 Institute of Mathematics  
 P.O. BOX 631 Bờ Hồ  
 Hanoi, Vietnam