Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (6) 1986, S. 533–542

# Entartete lineare elliptische Differentialgleichungen und anisotrope Sobolewräume: Regularität schwacher Lösungen

H.-J. HERRLER

Es werden Untersuchungen zur Regularität der schwachen Lösungen von Randwertproblemen für gewisse Klassen entarteter linearer elliptischer Systeme im Inneren eines beschränkten Gebietes geführt. In Abhängigkeit von der Struktur des Systems ergeben sich Differenzierbarkeitsaussagen nur bezüglich einiger Variablen.

Исследуется вопрос о регулярности обобщенного решения краевой задачи для некоторых классов вырожденных линейных эллиптических систем внутри ограниченной области. Оказывается, что в зависимости от структуры системы решение обладает высшими производными лишь по некоторым координатам.

Boundary value problems for certain classes of degenerated linear elliptic systems are studied. Here we investigate the interior regularity of weak solutions. In dependence on the structure of the system the existence of higher derivatives with respect to only some variables can be proved.

## 1. Einleitung

In [3] leiteten wir für eine Klasse stark anisotroper linearer Differentialoperatoren — d. h. für Operatoren, bei denen die höchsten Ableitungen in den einzelnen Richtungen unterschiedliche Ordnung aufweisen — eine Gårdingsche Ungleichung über anisotropen Sobolewräumen her. Damit konnten wir Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für schwache Lösungen von Dirichletproblemen in beschränkten Gebieten gewinnen. In der vorliegenden Arbeit wenden wir uns der Untersuchung der Regularität solcher schwachen Lösungen im Inneren des Gebietes zu. Bei den von uns behandelten Operatoren können charakteristische Flächen auftreten. Wir werden in Abhängigkeit von der Struktur des Operators die Regularität nur in gewissen Koordinatenrichtungen nachweisen: in regulären bzw. streng regulären Richtungen. Falls wir bereits wissen, daß die Lösung in den nicht regulären Richtungen differenzierbar ist, so können wir die Existenz klassischer Ableitungen in allen Richtungen zeigen (Satz 6.2). Dieses Resultat umfaßt (unter unserer zusätzlichen Voraussetzung, daß der Operator stark elliptisch im Sinne von [3] ist) die von HÖRMANDER in [4] bewiesene Aussage für partiell hypoelliptische Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Darüber hinaus leiten wir die Existenz verallgemeinerter Ableitungen in den streng regulären Richtungen (diese bilden eine Teilmenge der regulären Richtungen) ohne weitere Annahmen über die Differenzierbarkeit in den nicht streng regulären Richtungen her (Satz 6.1). Daraus ergibt sich durch Anwendung des Lemmas von Sobolew beispielsweise die Existenz klassischer Ableitungen in den streng regulären Richtungen, wenn man die Lösung nur als Funktion eben dieser Variablen auffaßt, für fast alle Werte der übrigen Variablen. Die Existenz verallgemeinerter Ableitungen der Lösung wird bewiesen, indem sukzessiv die Konvergenz der Fourierreihe des entsprechenden Differenzenquotienten im Raum $L_2$ nachgewiesen wird. Bedingt durch die Struktur des anisotropen Operators gewinnt man dabei in jedem Schritt möglicherweise auch keine ganze Ableitungsordnung, sondern nur einen Bruchteil. Aus diesem Grunde werden wir einige Hilfssätze benötigen, die die Abschätzung gewisser Fourierreihen eines Produktes von Funktionen gestatten. Im Falle (ganzzahliger) Ableitungsordnungen ist dies die Leibnizsche Produktregel.

Wie in [3] gelten unsere Ergebnisse für Systeme, im Hinblick auf eine übersichtliche Schreibweise beschränken wir uns aber in der Darstellung auf den Fall einer Gleichung.

## 2. Bezeichnungen

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und analog $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und $\pi$ seien (gewöhnliche) $r$-dimensionale Multiindizes. $\varrho$ und $\sigma$ stehen für $r$-dimensionale „rationale Multiindizes". Ihre Komponenten mögen nichtnegative, ganzzahlige Vielfache einer festen rationalen Zahl $\tau > 0$ sein, von der wir annehmen, daß ihr Kehrwert natürlich ist. Diese Zahl $\tau$ wird sich später aus der Struktur des Operators ableiten. Im Zusammenhang mit Fourierentwicklungen sei $k$ ein ganzzahliger Vektor. Ferner sei $\theta$ der Nullvektor, wir setzen $0^0 = 1$ und schreiben

$$\varrho \leqq \sigma \quad \text{falls} \quad \varrho_\nu \leqq \sigma_\nu \, (\nu = 1, \ldots, r), \; |\varrho| = \varrho_1 + \cdots + \varrho_r,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_r^{\alpha_r}}, \quad k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot k_r^{\alpha_r}, \quad \overset{+}{k}{}^\sigma = |k_1|^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot |k_r|^{\sigma_r}.$$

Bei Integrationen verzichten wir auf Angabe des Integrationsgebietes $\Omega$, welches in einem achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $2\pi$ enthalten sein möge, und $\|\cdot\|_0$ sei die übliche Norm im Funktionenraum $L_2(\Omega)$. Unter conv $A$ verstehen wir die konvexe Hülle der Menge $A$ in $\mathbf{R}^r$. Positive Konstanten in Ungleichungen, deren konkreter Wert nicht von Belang ist, bezeichnen wir meist einheitlich mit $c$.

## 3. Problem

$\Omega \subset \mathbf{R}^r$ $(r \geqq 2)$ sei ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten Differentialoperatoren der Form

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta \in E} D^\beta [b_{\alpha\beta}(x) \, D^\alpha u(x)]. \tag{3.1}$$

Dabei sei $E$ eine nichtleere, endliche Menge $r$-dimensionaler Multiindizes mit folgenden Eigenschaften:

(E1) $E$ ist (als diskrete Menge) konvex.

(E2) Falls $\alpha \in E$ und $\beta \leqq \alpha$, so ist $\beta \in E$.

(E3) $\{\alpha : |\alpha| \leqq 1\} \subset E$.

Wir setzen weiter

$$\tilde{E} = \{\alpha = \beta + \gamma : \beta, \gamma \in E\},$$

$$S = \{\alpha \in E : \lambda\alpha \notin \text{conv } E \text{ für alle } \lambda > 1\},$$

$$\tilde{S} = \{\alpha \in \tilde{E} : \lambda\alpha \notin \text{conv } \tilde{E} \text{ für alle } \lambda > 1\}.$$

$\tilde{S}$ charakterisiert gerade die „höchsten Ableitungen" in unserem Operator. Die starke Elliptizität eines Operators (3.1) gemäß [3] werden wir in folgender äquivalenten Form gebrauchen:

$L$ heißt *stark elliptisch*, falls die Ungleichung

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} i^{|\alpha+\beta|}\xi^{\alpha+\beta} b_{\alpha\beta}(x)\right\} \geqq c \sum_{\alpha\in S} \xi^{2\alpha} \tag{3.2}$$

mit einer positiven Konstanten $c$ für alle Vektoren $\xi \in \mathbf{R}^r$ und alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

In [3] untersuchten wir die Existenz schwacher Lösungen der Gleichung $Lu = f$ in anisotropen Sobolewräumen $W_0^E(\Omega)$. Diese Sobolewräume wurden bereits in [6] als Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_E = \sum \|D^\alpha \cdot\|_0$ (Summation über $\alpha \in E$) definiert. Hier interessieren wir uns für die Existenz höherer Ableitungen der schwachen Lösungen.

## 4. Definitionen

Wir geben jetzt die Definition der regulären bzw. streng regulären Koordinatenrichtungen, die wir in beiden Fällen mit $x_1, \ldots, x_l$ $(1 \leqq l \leqq r)$ bezeichnen wollen; die Richtungen $x_{l+1}, \ldots, x_r$ sind dann nicht (streng) regulär. Aus dem Zusammenhang wird jeweils hervorgehen, ob es sich um reguläre oder streng reguläre Richtungen handelt. Wir vereinbaren noch: Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, so sei $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ und $\alpha'' = (\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_r)$. Wir schreiben auch $\alpha = (\alpha', \alpha'')$. Am Nullvektor $\theta$ unterdrücken wir die Striche.

Definition 4.1: $x_1, \ldots, x_l$ heißen *reguläre Koordinatenrichtungen*, falls folgende Aussagen gelten:

(i) Aus $\alpha \in \tilde{E}$, $\alpha'' \neq \theta$ folgt $(\alpha', \theta) \notin \tilde{S}$.[1])

(ii) Aus $\alpha \in \tilde{E}$, $\alpha'' = \theta$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\alpha_j \neq 0$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_l, 0, \ldots, 0) \notin \tilde{S}$.[1])

Für den Fall $l = r$ gab Nikol'skij [5] eine geometrische Bedingung an, die die Hypoelliptizität eines Operators garantiert und unserer Bedingung (ii) entspricht.

Definition 4.2: $x_1, \ldots, x_l$ heißen *streng reguläre Koordinatenrichtungen*, falls es eine positive Zahl $\tau$ gibt, so daß für alle $\alpha, \beta \in \tilde{E}$ mit $\beta \leqq \alpha$ und $\beta \neq \alpha$ und für jedes $j \in \{1, \ldots, l\}$ gilt $(\beta_1, \ldots, \beta_j + \tau, \ldots, \beta_r) \in \operatorname{conv} \tilde{E}$.

Anstelle $\alpha, \beta \in \tilde{E}$ genügt es, in obigen Definitionen $\alpha, \beta \in \tilde{S}$ zu schreiben. Von der Zahl $\tau$ nehmen wir ohne Einschränkung im folgenden an, daß sie der Kehrwert einer natürlichen Zahl ist. Außerdem möge $\tau$ so klein sein, daß man bei der Anwendung von Lemma 5.5 für alle $\alpha \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$ mit $\varepsilon = \tau$ rechnen kann.

Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar, daß streng reguläre Richtungen auch regulär sind. Die Umkehrung trifft im allgemeinen nicht zu, gilt aber für zahlreiche (praktisch interessante) Operatoren. Es besteht jedoch folgender Zusammenhang mit den in [3] definierten *kritischen Richtungen*.

Lemma 4.3: *Folgende drei Aussagen sind äquivalent:*

a) *Der Operator besitzt keine kritische Richtung.*

b) *Alle Richtungen sind streng regulär.*

c) *Alle Richtungen sind regulär.*

---

[1]) (i) entfällt für $l = r$. Das gleiche gilt für $\alpha'' = \theta$ in (ii).

Im zwei- und dreidimensionalen Falle lassen sich die streng regulären Richtungen in einfacher Weise auch geometrisch charakterisieren: conv $\tilde{E}$ ist ein konvexes Polyeder, und $\tilde{S}$ enthält solche Punkte aus $\tilde{E}$, die jenen begrenzenden Vielecken (Seiten) des Polyeders angehören, welche nicht innerhalb der Koordinatenebenen liegen. Man betrachte nun sämtliche (nicht in den Koordinatenebenen liegende) Seitenflächen des Polyeders, die zu wenigstens einer Koordinatenachse parallel sind. Genau die Koordinatenrichtungen, zu denen alle betrachteten Flächen parallel sind, sind streng regulär. Falls es keine zu einer Achse parallele Fläche gibt, so sind alle Richtungen streng regulär.

In [4] untersuchte HÖRMANDER partiell hypoelliptische Operatoren mit konstanten Koeffizienten. Hierzu gibt es folgende Beziehung: Ist $L$ ein stark elliptischer Differentialoperator (3.1), (3.2) mit konstanten Koeffizienten, der partiell hypoelliptisch bezüglich $x_1, \ldots, x_l$ ist, so sind diese Richtungen regulär.

## 5. Einige Hilfssätze

Zur Vorbereitung des Regularitätsbeweises stellen wir einige Lemmata zusammen. In ihnen bezeichne $[\cdot]$ den ganzen Anteil einer Zahl.

Lemma 5.1: *Es sei $s \geqq \tau$ und ein ganzzahliges Vielfaches von $\tau$, ferner $k$ und $n$ beliebige ganze Zahlen. Dann gibt es eine von $k$ und $n$ unabhängige Konstante $c$ mit*

$$|k|^{2s} \leqq c\left\{|n|^{2s} + \sum_{0 \leqq t \leqq s-\tau} |n|^{2t} (k-n)^{2N}\right\},$$

*wobei $N = -[-s]$ ist. Dabei erstreckt sich die Summation nur über solche $t$, die ganzzahlige Vielfache von $\tau$ sind.*

Beweis: Für $n = 0$ ist dies offenbar richtig. Es sei nun $n \neq 0$. Wir entwickeln die Funktion $x^s$ für $x > 0$ nach der Taylorschen Formel:

$$(x+h)^s = x^s + s x^{s-1} h + \cdots + \binom{s}{N} (x + \vartheta h)^{s-N} h^N \quad (0 < \vartheta < 1),$$

und schätzen weiter ab

$$\begin{aligned} |k|^{2s} &= \big((n + (k-n))^2\big)^s \leqq 2^s\big(n^2 + (k-n)^2\big)^s \\ &= 2^s\left\{|n|^{2s} + s\,|n|^{2(s-1)}(k-n)^2 + \cdots + \binom{s}{N}\big(n^2 + \vartheta(k-n)^2\big)^{s-N}(k-n)^{2N}\right\} \\ &\leqq c\{|n|^{2s} + (|n|^{2(s-1)} + \cdots + 1)(k-n)^{2N}\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. Falls $s \leqq 1$ (d. h. $N = 1$) ist, so treten nur der erste und letzte Summand auf ∎

Lemma 5.2: *$k$ und $n$ seien $r$-dimensionale Vektoren mit ganzzahligen Komponenten und $\sigma \geqq 0$. Weiter sei $N = (N_1, \ldots, N_r)$ mit $N_\nu = -[-\sigma_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, r$. Dann gibt es eine von $k$ und $n$ unabhängige Konstante $c$ mit*

$$\overset{+}{k}{}^{2\sigma} \leqq c\left\{\overset{+}{n}{}^{2\sigma} + \sum_{\substack{\varrho \leqq \sigma \\ |\varrho| \leqq |\sigma| - \tau}} \overset{+}{n}{}^{2\varrho} \sum_{\gamma \leqq N} (k-n)^{2\gamma}\right\}. \tag{5.1}$$

Beweis: In $\overset{+}{k}{}^{2\sigma} = |k_1|^{2\sigma_1} \cdot \cdots \cdot |k_r|^{2\sigma_r}$ wende man auf jeden Faktor mit nichtverschwindendem Exponenten Lemma 5.1 an. Da aus $\sigma_\nu = 0$ bereits $\varrho_\nu = \gamma_\nu = 0$ folgt, spielen die Faktoren mit Exponent Null in Formel (5.1) keine Rolle ∎

Lemma 5.3: *Es sei $\sigma \geqq \theta$ und $N = (N_1, \ldots, N_r)$ mit $N_\nu = -[-\sigma_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, r$. Ferner seien $f$, $g$ und $fg$ quadratisch integrierbare Funktionen, für die die Ableitungen auf der rechten Seite der folgenden Ungleichung* (5.2) *existieren und die Reihen konvergieren. Dann gibt es von $f$ und $g$ unabhängige Konstanten $c$ mit*

$$\sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma} \left|\int fg\, e^{-ikx}\, dx\right|^2 \leqq c\, \|g\|_0^2 \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma} \left|\int f\, e^{-ikx}\, dx\right|^2$$
$$+ c \sum_{\gamma \leqq N} \|D^\gamma g\|_0^2 \sum_{\substack{\varrho \leqq \sigma \\ |\varrho| \leqq |\sigma| - \tau}} \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\varrho} \left|\int f\, e^{-ikx}\, dx\right|^2. \tag{5.2}$$

Beweis: Wir nutzen zunächst die Fourier-Darstellungen

$$f = \sum_k a_k\, e^{ikx}, \quad g = \sum_k b_k\, e^{ikx} \quad \text{und} \quad fg = \sum_{k,n} a_n b_{k-n}\, e^{ikx}$$

und wenden dann Lemma 5.2 an. Es ergibt sich

$$\sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma} \left|\int fg\, e^{-ikx}\, dx\right|^2 = \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma} \left|\sum_n a_n b_{k-n}\right|^2$$
$$\leqq c \sum_k \sum_n \overset{+}{n}{}^{2\sigma} |a_n|^2 |b_{k-n}|^2$$
$$+ c \sum_k \sum_n \sum_{\substack{\varrho \leqq \sigma \\ |\varrho| \leqq |\sigma| - \tau}} \overset{+}{n}{}^{2\varrho} \sum_{\gamma \leqq N} (k-n)^{2\gamma} |a_n|^2 |b_{k-n}|^2$$
$$= c\, \|g\|_0^2 \sum_n \overset{+}{n}{}^{2\sigma} \left|\int f\, e^{-inx}\, dx\right|^2$$
$$+ c \sum_{\gamma \leqq N} \|D^\gamma g\|_0^2 \sum_{\substack{\varrho \leqq \sigma \\ |\varrho| \leqq |\sigma| - \tau}} \sum_n \overset{+}{n}{}^{2\varrho} \left|\int f\, e^{-inx}\, dx\right|^2 \blacksquare$$

Zum Beweis des Regularitätssatzes werden wir ein weiteres Lemma benötigen. Es gestattet eine ähnliche Abschätzung wie (5.2) auch in dem Fall, daß bei $k_j$ möglicherweise negative Exponenten auftreten: $\overset{+}{k}{}^{2\sigma} |k_j|^{2(\tau-1)}$. Wir verzichten auf Einzelheiten und geben nur eine kurze Beweisskizze. Ausgehend von der Ungleichung

$$|k|^{-1} \leqq 2\left(|n|^{-1} + n^{-2}(k-n)^2\right)$$

für ganz Zahlen $k \neq 0$ und $n \neq 0$ läßt sich für $s = 0$ bzw. $-1 < s \leqq -1/2$ die Relation

$$|k|^{2s} \leqq c\{|n|^{2s} + n^{-2}(k-n)^2\}$$

ableiten. Zusammen mit Lemma 5.2 kommt man damit zu folgender Aussage.

Lemma 5.4: *Es sei $j \in \{1, \ldots, r\}$ fixiert und $\sigma \geqq \theta$. Für $r$-dimensionale Vektoren $k$ und $n$ mit ganzzahligen Komponenten gelte $k_j \neq 0$ und $n_j \neq 0$. Wir setzen $N = (N_1, \ldots, N_{j-1}, N_j + 1, N_{j+1}, \ldots, N_r)$ mit $N_\nu = -[-\sigma_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, r$. Dann gibt es eine von $k$ und $n$ unabhängige Konstante $c$ mit*

$$\overset{+}{k}{}^{2\sigma} |k_j|^{2(\tau-1)} \leqq c \left\{ \overset{+}{n}{}^{2\sigma} |n_j|^{2(\tau-1)} + n_j^{-2} \sum_{\substack{\varrho \leqq (\sigma_1, \ldots, \sigma_j + \tau, \ldots, \sigma_r) \\ |\varrho| \leqq |\sigma|}} \overset{+}{n}{}^{2\varrho} \sum_{\delta \leqq N} (k-n)^{2\delta} \right\}.$$

Auf der Grundlage dieses Lemmas läßt sich mit der Methode aus dem Beweis zu Lemma 5.3 eine zu (5.2) analoge Ungleichung für den Fall negativer Exponenten bei $k_j$ beweisen.

Die Aussage des folgenden Lemmas verallgemeinert eine im isotropen Fall elementare Tatsache.

Lemma 5.5: *Ist* $\alpha \in \tilde{E} \setminus \tilde{S}$, *so gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *mit*

$$\alpha + \varepsilon(0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \operatorname{conv} \tilde{E}.$$

Beweis: Es ist $\lambda\alpha \in \operatorname{conv} \tilde{E}$ für ein gewisses $\lambda > 1$. Wegen (E3) ist $(0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in E$ und folglich $2(0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \tilde{E}$. Demnach gehört die konvexe Linearkombination

$$\lambda^{-1}(\lambda\alpha) + 2(1 - \lambda^{-1})(0, \ldots, 1, \ldots, 0) = \alpha + \varepsilon(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

mit $\varepsilon = 2(1 - \lambda^{-1})$ zu $\operatorname{conv} \tilde{E}$ ∎

Lemma 5.6: *Es sei* $\sigma \in \operatorname{conv} \tilde{E}$ *und* $k \neq \theta$. *Dann gibt es eine von* $k$ *unabhängige positive Konstante* $c$ *mit*

$$\overset{+}{k}{}^{\sigma} \leqq c \sum_{\alpha \in S} k^{2\alpha}.$$

Der Beweis stützt sich auf die Konvexität der Potenzfunktion. In [3: Formel (5.4)] hatten wir eine ähnliche Relation bewiesen. Man überzeugt sich leicht, daß sich die Beweisidee auch auf unsere modifizierten Voraussetzungen übertragen läßt ∎

## 6. Regularität schwacher Lösungen

Nunmehr sind wir in der Lage, das Hauptresultat anzugeben. Am Ende dieses Abschnitts bringen wir ein illustrierendes Beispiel.

Satz 6.1: *$L$ sei ein stark elliptischer Differentialoperator* (3.1), (3.2) *und* $u \in W_0^E(\Omega)$ *eine schwache Lösung von* $Lu = f$. *Weiter gelte:*

(i) $x_1, \ldots, x_l$ *seien streng reguläre Richtungen;*
(ii) $\pi, \pi^0$ *seien Multiindizes mit* $\pi^0 \in \tilde{E}$ *und* $\pi^0 \leqq \pi$;
(iii) $D^\gamma b_{\alpha\beta} \in C(\Omega)$ *(stetig differenzierbar) für alle* $\alpha, \beta \in E$ *und jedes* $\gamma \leqq \alpha + \pi$;
(iv) $\dfrac{\partial}{\partial x_j} D^\gamma b_{\alpha\beta} \in C(\Omega)$ *für alle* $\alpha, \beta \in E$ *mit* $\alpha + \beta \in \tilde{S}$, *für alle* $\gamma \leqq \pi$ *und für jede streng reguläre Richtung* $x_j$;
(v) $D^\gamma f \in L_2(\Omega)$ *für alle* $\gamma \leqq \pi - \pi^0$;
(vi) $D^\gamma u \in L_2(\Omega)$ *für alle* $\gamma \leqq (\theta, \pi'')$.

*Dann hat u eine verallgemeinerte Ableitung* $D^\pi u$ *in jedem kompakten Teilgebiet von* $\Omega$.

Für $\pi'' = \theta$ ergibt sich insbesondere die Existenz verallgemeinerter Ableitungen in streng regulären Richtungen ohne weitere Annahmen über die Differenzierbarkeit der Lösung in den übrigen Richtungen. Ist allerdings bekannt, daß die Lösung gewisse Ableitungen auch in den nicht streng regulären Richtungen besitzt ($\pi'' \neq \theta$), so überträgt sich diese Eigenschaft auf die höheren Ableitungen in streng regulärer Richtung. Die Voraussetzungen an die Koeffizienten werden wir im angegebenen Beweis nicht im einzelnen verfolgen — dort nehmen wir hinreichend hohe Differenzierbarkeit an.

Beweisskizze (im isotropen Fall vergleiche hierzu Fichera [1]): Wir setzen

$$L^*(x, D) = \sum_{\alpha,\beta \in E} (-1)^{|\alpha+\beta|} D^\alpha\left(\overline{b_{\alpha\beta}(x)}\, D^\beta \cdot\right)$$

und

$$L_H(x, ik) = \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} (ik)^{\alpha+\beta}\, b_{\alpha\beta}(x).$$

$x^0 \in \Omega$ sei ein beliebiger fester Punkt, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine reellwertige Funktion mit $x^0 \in \operatorname{supp}\varphi$ und $k = (k_1, \ldots, k_r) \neq \theta$ ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten. Mit $v(x) := \varphi(x)\, e^{ikx}$ können wir schreiben

$$L^*(x, D)\, v = \overline{L_H(x, ik)}\, v + \sum_{(*)} \Phi_{\alpha\beta}(x, \varphi)\, k^{\alpha-\beta}\, e^{ikx},$$

wobei $\Phi_{\alpha\beta}$ gewisse Ableitungen von $\varphi$ und den Koeffizienten enthält und $(*)$ für die Summation über alle $\alpha \in \tilde{E}$ und alle $\beta \leqq \alpha$ mit der Einschränkung $\beta \neq \theta$ bei $\alpha \in \tilde{S}$ steht. Mit der Abkürzung $U(x) = \varphi(x)\, u(x)$ gilt

$$L_H(x^0, ik) \int U\, e^{-ikx}\, dx = \int \varphi f\, e^{-ikx}\, dx - \sum_{(*)} k^{\alpha-\beta} \int \Phi_{\alpha\beta}\, u\, e^{-ikx}\, dx$$
$$+ \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} k^{\alpha+\beta} \int i^{|\alpha+\beta|}[b_{\alpha\beta}(x^0) - b_{\alpha\beta}(x)]\, U\, e^{-ikx}\, dx. \tag{6.1}$$

Dabei haben wir beachtet, daß $u$ schwache Lösung ist. Im weiteren setzen wir

$$B_{\alpha\beta}(x) = i^{|\alpha+\beta|}[b_{\alpha\beta}(x^0) - b_{\alpha\beta}(x)]$$

und

$$E_{kt} = \frac{e^{ik_jt} - 1}{t} \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, l\} \text{ und } t \text{ reell, } t \neq 0.$$

Dann ist

$$|E_{kt}|^2 \leqq k_j^2 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0} |E_{kt}|^2 = k_j^2. \tag{6.2}$$

Bezeichnen wir mit $\Delta$ den Differenzenquotienten des unmittelbar folgenden Terms, so gilt für hinreichend kleines $t$ die bekannte Beziehung

$$E_{kt} \int B_{\alpha\beta}(x)\, U(x)\, e^{-ikx}\, dx$$
$$= \int B_{\alpha\beta}(\bar{x})\, \Delta U(x)\, e^{-ikx}\, dx + \int \Delta B_{\alpha\beta}(x)\, U(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{6.3}$$

mit $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_r)$. Aus der starken Elliptizität des Operators $L$ folgt die Ungleichung

$$|L_H(x^0, ik)^{-1}| \leqq c \Big(\sum_{\alpha\in S} k^{2\alpha}\Big)^{-1}. \tag{6.4}$$

Unter Beachtung von (6.2)—(6.4) können wir aus (6.1) für $k_j \neq 0$ ableiten

$$|E_{kt}|^2\, \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0}\, |k_j|^{2(\tau-1)}\, \Big|\int U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2$$
$$\leqq \Big(\sum_{\alpha\in S} k^{2\alpha}\Big)^{-2} \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} \Big\{c\, |k_j|^{2\tau} \Big|\int \varphi f\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2$$
$$+ c \Big(\sum_{(*)} |k^{\alpha-\beta}|^2\Big) |k_j|^{2\tau} \sum_{(*)} \Big|\int \Phi_{\alpha\beta} u\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2$$
$$+ c \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} |k^{\alpha+\beta}|^2 \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} \Big|\int \Delta B_{\alpha\beta} U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2$$
$$+ c \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} |k^{\alpha+\beta}|^2\, |k_j|^{2(\tau-1)} \sum_{\alpha+\beta\in\tilde{S}} \Big|\int B_{\alpha\beta}\, \Delta U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2. \tag{6.5}$$

Lemma 5.6 liefert

$$\Big(\sum_{\alpha\in S} k^{2\alpha}\Big)^{-2} \sum_{\alpha+\beta\in\tilde S} |k^{\alpha+\beta}|^2 \leqq c$$

und

$$\Big(\sum_{\alpha\in S} k^{2\alpha}\Big)^{-2} \sum_{(*)} |k^{\alpha-\beta}|^2\, |k_j|^{2\tau} \leqq c,$$

da $x_j$ streng reguläre Richtung ist (vgl. auch Lemma 5.5). Summation dieser Ungleichungen für alle $k$ mit $k_j \neq 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\sum_k |E_{kl}|^2\, \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0}\, |k_j|^{2(\tau-1)} \Big|\int U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 \\
&\leqq c \sum_k \Big(\sum_{\alpha\in S} k^{2\alpha}\Big)^{-2} \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0}\, |k_j|^{2\tau} \Big|\int \varphi f\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 \\
&\quad + c \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} \sum_{(*)} \Big|\int \Phi_{\alpha\beta} u\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 \\
&\quad + c \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} \sum_{\alpha+\beta\in\tilde S} \Big|\int \Delta B_{\alpha\beta} U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 \\
&\quad + c \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0}\, |k_j|^{2(\tau-1)} \sum_{\alpha+\beta\in\tilde S} \Big|\int B_{\alpha\beta}\, \Delta U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 .
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Damit sind wir in der Lage, die Konvergenz von

$$\sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma} \Big|\int U\, e^{-ikx}\, dx\Big|^2 \tag{6.7}$$

nacheinander für alle $\sigma \leqq \pi$ mit $|\sigma| = 1$, $|\sigma| = 1 + \tau$, $|\sigma| = 1 + 2\tau$, ... zu zeigen.

Für $\sigma$ mit $|\sigma| = 1$ ist dies klar: Jedes solche $\sigma$ ist konvexe Linearkombination von Multiindizes der Länge höchstens eins, die gemäß (E3) sämtlich zu $E$ gehören. Mit $u \in W_0^E(\Omega)$ (schwache Lösung) ist aber auch $U = \varphi u \in W_0^E(\Omega)$.

In den folgenden Schritten hat man mit $\sigma$ auch die Funktion $\varphi$ zu verändern. Es möge also (6.7) für alle $\sigma \leqq \pi$ mit $|\sigma| \leqq s$ und einem gewissen $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergieren. Wir weisen nach, daß (6.7) dann auch für alle $\sigma \leqq \pi$, $|\sigma| \leqq s + \tau$ mit einem anderen $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert. Dabei soll gelten: $\varphi_i \geqq 0$, supp $\varphi_i \ni x^0$, $\varphi_i(x) = 1$ in $U_{\varepsilon_i}(x^0)$ $(i = 0, 1;\ 0 < 2\varepsilon_1 < \varepsilon_0)$, supp $\varphi_1 \subset U_{2\varepsilon_1}(x^0)$ (vgl. Abb. 1).

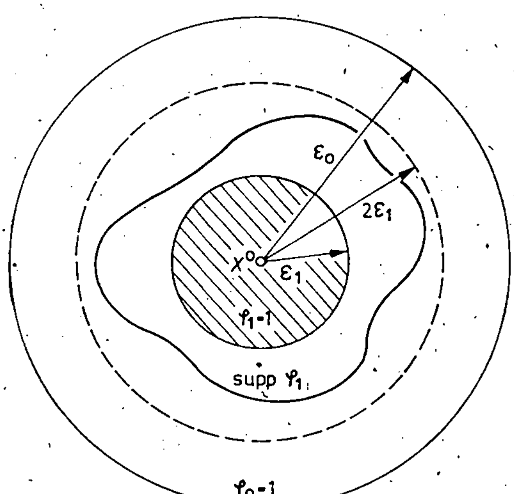


Abb. 1

Hat ein $\sigma \leqq \pi$ mit $|\sigma| \leqq s + \tau$ die Form $\sigma = (\theta, \sigma'')$, so liegt Konvergenz nach Voraussetzung (vi) vor. Andernfalls gibt es ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ mit $\sigma_j \geqq \tau$. Wir setzen $\sigma^0 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_j - \tau, \ldots, \sigma_r)$ und haben

$$\overset{+}{k}{}^{2\sigma} = \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} |k_j|^{2\tau}, \quad \sigma^0 \leqq \pi \quad \text{und} \quad |\sigma^0| \leqq s.$$

Zunächst konvergiert (6.7) für $\sigma = \sigma^0$ auch mit $\varphi = \varphi_1$: Es ist

$$\sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} \left| \int \varphi_1 u \, e^{-ikx} \, dx \right|^2 = \sum_k \overset{+}{k}{}^{2\sigma^0} \left| \int \varphi_1 \varphi_0 u \, e^{-ikx} \, dx \right|^2.$$

Hierauf wendet man Lemma 5.3 mit $f = \varphi_0 u$ und $g = \varphi_1$ an; die Reihen auf der rechten Seite von (5.2) konvergieren nach unserer Annahme.

Wir betrachten nun (6.6) speziell mit $\varphi = \varphi_1$ und diskutieren die Summanden auf der rechten Seite, die wir der Reihe nach mit $A$, $B$, $C$ und $D$ abkürzen wollen, einzeln.

*A:* Voraussetzung (ii) und Lemma 5.6 liefern

$$\Big(\sum_{\alpha \in S} k^{2\alpha}\Big)^{-2} k^{2\pi^0} \leqq c.$$

Damit ergibt sich die Konvergenz nach Voraussetzung (v).

*B* und *C:* Wir wenden Lemma 5.3 an und nutzen die Induktionsvoraussetzung.

*D:* Für jedes feste $t$ folgt die Konvergenz aus der zu Lemma 5.3 analogen Aussage für negative Exponenten. Folglich konvergiert die Reihe auf der linken Seite von (6.6) ebenfalls. Da $B_{\alpha\beta} \to 0$ bei $x \to x^0$, kann nach erneuter Anwendung von (6.3) der höchste Term in (6.6) (in einer hinreichend kleinen Umgebung — Wahl von $\varepsilon_1$) subtrahiert werden. Die somit gefundene Majorante für die linke Seite von (6.6) ist unabhängig von $t$. Der gliedweise Grenzübergang $t \to 0$ ergibt wegen (6.2) gerade (6.7).

Insgesamt haben wir nach Wiederholung unseres Schlusses die Konvergenz von (6.7) für alle $\sigma \leqq \pi$ mit gewissen Funktionen $\varphi$ gezeigt. Wegen $\varphi \equiv 1$ in der Nähe von $x^0$ existiert dort die verallgemeinerte Ableitung $D^\pi u$. Mittels Zerlegung der Einheit dehnt man diese Aussage auf kompakte Teilgebiete aus ∎

Satz 6.2: *$L$ sei ein stark elliptischer Differentialoperator* (3.1), (3.2) *und* $u \in W_0^E(\Omega)$ *eine schwache Lösung von* $Lu = f$. *Weiter gelte:*

(i) $x_1, \ldots, x_l$ *seien reguläre Koordinatenrichtungen;*

(ii) $b_{\alpha\beta} \in C^\infty(\Omega)$;

(iii) $f \in C^\infty(\Omega)$;

(iv) $D^\gamma u \in L_2(\Omega)$ *für alle* $\gamma$ *mit* $\gamma' = 0$ *(d. h., es mögen verallgemeinerte Ableitungen beliebig hoher Ordnung in den nicht regulären Richtungen existieren).*

*Dann ist* $u \in C^\infty(\Omega)$.

Möchte man lediglich die Existenz von höheren Ableitungen der Lösung bis zu einer gewissen, festen Ordnung zeigen, kann man die Voraussetzungen (ii)—(iv) entsprechend abschwächen.

Der Beweis erfolgt zunächst wie bei Satz 6.1 bis zur Formel (6.5). Nutzt man nun die Eigenschaften regulärer Richtungen, bekommt man eine Ungleichung, die sich von (6.6) nur im zweiten Summanden $B$ unterscheidet. Diese Summanden werden wiederum einzeln abgeschätzt. Eine ausführliche Darstellung findet man in [2] ∎

Durch Anwendung des Lemmas von Sobolew lassen sich aus dem Regularitätssatz 6.1 Aussagen über die Existenz klassischer Ableitungen der schwachen Lösung gewinnen. Wir verzichten auf eine detaillierte Beschreibung und verdeutlichen die möglichen Resultate nur an einem Beispiel. Dazu betrachten wir den Differentialoperator

$$Lu = a(x_1, x_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + b(x_1, x_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - c(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

mit $E = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1)\}$. Die Koeffizienten seien reell, hinreichend oft stetig differenzierbar und mögen über $\Omega$ ein positives Infimum besitzen (dies garantiert die starke Elliptizität). $x_1$ ist streng reguläre Koordinatenrichtung.

(i) Ist neben $f \in L_2$ auch $\partial f/\partial x_1 \in L_2$, so ist $D^\alpha u$ in kompakten Teilgebieten von $\Omega$ eine stetige Funktion von $x_1$ für fast alle Parameter $x_2$, wenn $\alpha \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 1), (4, 0), (3, 1)\}$ (Äquivalenz im Sinne des $L_2$).

(ii) Ist darüber hinaus bekannt, daß $\partial^2 u/\partial x_2^2 \in L_2$, so gilt die Aussage von (i) für alle $\alpha \in \tilde{E}$.

## LITERATUR


[1] FICHERA, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems (Lecture Notes in Mathematics: Bd. 8). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1965.

[2] HERRLER, H.-J.: Einige Anwendungen anisotroper Sobolevräume in der Theorie elliptischer Differentialgleichungssysteme. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.

[3] HERRLER, H.-J.: Entartete lineare elliptische Differentialgleichungen und anisotrope Sobolewräume: Existenz schwacher Lösungen. Z. Anal. Anw. **3** (1986), 223—236.

[4] HÖRMANDER, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.

[5] Никольский, С. М.: Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения. Докл. Акад. Наук СССР **146** (1962), 767—769.

[6] RÁKOSNÍK, J.: Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I, II. Beiträge zur Analysis **13** (1979), 55—68, and **15** (1981), 127—140.


Manuskripteingang: 05. 09. 1984

VERFASSER:

Dr. HANS-JÜRGEN HERRLER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz