Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (6) 1986, S. 491–506

Zwei Versionen von verallgemeinerten Sätzen über implizite Funktionen

M. Günther

Es wird die Lösbarkeit der nichtlinearen impliziten Gleichung $F(u, f) = 0$ in Banachräumen untersucht. Theorem 1 behandelt Situationen, in denen D_uF^{-1} nicht existiert, aber F durch Abbildungen F_t mit besseren Eigenschaften approximiert werden kann. Theorem 2 ist vom Moser-Nash-Typ. Um optimale Regularitätsergebnisse zu erzielen, wird das Newtonverfahren mit einer dreifachen Approximationstechnik verknüpft, welche Glättungsoperatoren und die Eigenschaften gewisser Interpolationsräume benutzt.

Рассматривается разрешимость нелинейного неявного уравнения $F(u, f) = 0$ в Банаховых пространствах. Теорема 1 относится к случаям, когда D_uF^{-1} не существует, а F можно аппроксимировать отображениями F_t с лучшими свойствами. Теорема 2 — это теорема типа Мозера-Нėша. Чтобы достигнуть оптимальных результатов, метод Ньютона связывается троекратной аппроксимационной техникой, которая использует операторы сглаживания и некоторые пространства интерполяции.

The solvability of the nonlinear, implicit equation $F(u, f) = 0$ in Banach spaces is examined. Theorem 1 covers situations in which D_uF^{-1} does not exist, but F can be approximated by means of mappings F_t with better properties. Theorem 2 is of Moser-Nash type. In order to obtain optimal regularity results the Newton iteration method is combined with a triple approximation technique using smoothing operators and properties of certain interpolation spaces.

1. Einleitung

In dieser Arbeit werden zwei Verallgemeinerungen des klassischen Satzes über implizite Funktionen vorgestellt. Es sei dazu eine Abbildung $F: V \times W \to Z$, $V \times W \subseteqq X \times Y$ (X, Y, Z Banachräume) und $(\overline{u}, \overline{f}) \in V \times W$ mit $F(\overline{u}, \overline{f}) = 0$ gegeben. Wir suchen nun eine Umgebung U von $\overline{f}$, so daß es zu jedem $f \in U$ eine Lösung u von $F(u, f) = 0$ gibt. Unser Theorem 1 ist dann u. a. auf solche Fälle zugeschnitten, in denen $\left(D_uF(\overline{u}, \overline{f})\right)^{-1}$ nicht zu existieren braucht, es aber eine Familie von Abbildungen $F_t: V \times W \to Z$ ($t \in [0, 1]$, $F_0 \equiv F$) mit

$$\|F_{t_1}(u, f) - F_{t_2}(u, f)\|_Z \leqq M\,|t_1 - t_2| \quad \text{und} \quad \left\|\left(D_uF_t(u, f)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Z,X)} \leqq Mt^{-\gamma},$$

$\gamma < 1$, gibt; F muß sich also in bestimmter Weise durch Abbildungen mit „besseren" Eigenschaften approximieren lassen. In zwei Zusätzen geben wir noch Bedingungen an, unter denen man die Eindeutigkeit der Lösung erhält.

Theorem 2 ist ein Satz vom Moser-Nash-Typ. Er eignet sich u. a. zur Auflösung solcher impliziter Gleichungen $F(u, f) = 0$ in der Nähe einer Ausgangslösung $(\overline{u}, \overline{f})$, bei denen das linearisierte Problem mit einem Differenzierbarkeitsverlust behaftet ist. Darunter ist folgendes zu verstehen: Ist etwa $F: C^l \times C^l \to C^l$ und $\left(D_uF(\overline{u}, \overline{f})\right)^{-1}: C^l \to C^{l-1}$ für alle $l \geqq 1$, dann würde man bei jedem Schritt des üblichen Iterationsverfahrens (wie es beim Beweis des klassischen Satzes über implizite Funktionen benutzt wird) eine Ableitungsordnung einbüßen, und das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten zusammen. Seit Mitte der 50er Jahre wurden eine ganze Reihe von Methoden entwickelt, um Schwierigkeiten dieser oder ähnlicher Art überwinden zu können; genannt werden müssen vor allem die grundlegenden Arbeiten von J. NASH [11], J. MOSER [9, 10], L. HÖRMANDER [5], R. S. HAMILTON [3, 4] und E. ZEHNDER [15, 16]. Vgl. weiterhin H. JACOBOWITZ [7], J. SCHWARTZ [12] und F. SERGERAERT [13]. Abstrakte Formulierungen solcher Sätze benutzen Skalen X_t, Y_t, Z_t von Banachräumen (d. h., es ist $X_a \hookrightarrow X_b$ für $a \geqq b$, analog für Y_t, Z_t). Um *optimale* Regularitätsaussagen (d. h., die Lösung des nichtlinearen Problems ist mit dem gleichen Verlust behaftet wie die Lösung des linearen Problems) zu erzielen, definieren wir mit Hilfe der Interpolationstheorie neue Räume $X_{a,p}$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$. Besitzt die Skala X_t Glättungsoperatoren (vgl. die Definition in Abschnitt 3), dann stellen die Räume $X_{a,p}$ in einem gewissen Sinn nur eine „geringfügige" Abänderung von X_a dar. Für die in den Anwendungen häufig vorkommenden Raumklassen H^a (Hölderräume) und W_q^a (Sobolevräume) kann durch geeignete Wahl von p dann $X_{a,p} = X_a$ erreicht werden und Theorem 2 liefert besonders günstige Ergebnisse. Unsere im Beweis von Theorem 2 benutzte Methode stellt eine Verknüpfung des Newtonverfahrens mit C^∞-Glättungsoperatoren dar; dabei wird in jedem Iterationsschritt neben u und f auch $F(u, f)$ geglättet. Zusammen mit den Eigenschaften der Räume $X_{a,p}$ erhalten wir dann ein optimales Regularitätsergebnis. Die Kopplung des Newtonverfahrens mit C^∞-Glättungsoperatoren ergibt eine einfache und flexible Methode, die sich vielen Problemen anpassen läßt. Bekannte Sätze dieser Art liefern aber keine optimale Regularität (vgl. z. B. [15: Theorem 3.1]). Unsere Voraussetzungen an F sind ähnlich denjenigen im Nash-Hörmander-Theorem, in dessen Beweis ein anders geartetes Iterationsschema benutzt wird, vgl. [5, 6]. Allerdings betrachten wir wirklich implizite Gleichungen. Ferner sind unsere Forderungen an die Glättungsoperatoren schwächer. Schließlich geben wir auch an, auf welche Weise die Ausgangslösung $\bar{u}$, $\bar{f}$ (bzw. deren Normen) in unsere Konstruktion der Umgebung U (für $f \in U$ existiert eine Lösung U von $F(u, f) = 0$) eingeht. Auch zu Theorem 2 geben wir in einem Zusatz noch Bedingungen an, die die Eindeutigkeit der Lösung sichern.

In einer weiteren Arbeit werden wir eine Anwendung unserer abstrakten Sätze vorstellen.

2. Eine erste Verallgemeinerung

X, Y und Z seien Banachräume und $(F_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Familie von Abbildungen von $V \times W \subseteqq X \times Y$ nach Z. Dabei sei $V = \{u \in X \mid \|u - \bar{u}\|_X < R\}$ und $W = \{f \in Y \mid \|f - \bar{f}\|_y < P\}$, wobei $u \in X$, $\bar{f} \in Y$ und R, P positive reelle Zahlen sind. Ferner sei $F_0(u, \bar{f}) = 0$. Wir untersuchen nun die Auflösbarkeit nach u der Gleichung $F_0(u, f) = 0$ unter folgenden Voraussetzungen:

(i) Für alle $t \in (0, 1]$ und $(u, f) \in V \times W$ sei F_t bez. u Fréchet-differenzierbar: $D_uF_t(u, f) \in \mathcal{L}(X, Z)$. Für beliebige $u_1, u_2 \in V$ und $f \in W$ gelte

$$\|F_t(u_1, f) - F_t(u_2, f) - D_uF_t(u_2, f)(u_1 - u_2)\|_Z$$
$$\leqq \|u_1 - u_2\|_X \,\psi(t, \|u_1 - u_2\|_X).$$

Dabei sei ψ eine auf $(0, 1] \times [0, 2R]$ stetige Funktion mit $\psi(., 0) \equiv 0$.

(ii) Für alle $t \in (0, 1]$ und $(u, f) \in V \times W$ existiert ein Operator $L_t(u, f) \in \mathcal{L}(Z, X)$, so daß für alle $v \in Z$

$$D_uF_t(u, f)\big(L_t(u, f)\, v\big) = v \quad \text{und} \quad \|L_t(u, f)\, v\|_X \leqq \varphi(t)\, \|v\|_Z$$

mit einer auf $(0, 1]$ stetigen und monoton fallenden Funktion φ gilt.

(iii) Für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ und $(u, f) \in V \times W$ gilt

$$\|F_{t_1}(u, f) - F_{t_2}(u, f)\|_Z \leqq M\,|t_1 - t_2| \qquad (1 \leqq M, \text{ konstant}).$$

(iv) Es gilt

$$\lim_{t \to +0} \int_t^1 \varphi(t)\,dt < \infty.$$

(v) Für feste $f \in W$ ist $F_{(\cdot)}(\cdot, f)$ als Abbildung von $[0, 1] \times V$ nach Z in allen Punkten $(0, u)$ stetig.

Theorem 1: *Sind* (i)—(v) *erfüllt, dann existieren Konstanten* $C_1, C_2 > 0$, *so daß es für alle* $f \in W$ *mit* $\|F_0(\bar{u}, f)\|_Z < C_1$ *ein* $u \in V$ *mit* $F_0(u, f) = 0$ *und*

$$\|u - \bar{u}\|_X \leqq C_2 \int_0^\lambda \varphi(t)\,dt, \quad \lambda := \|F_0(\bar{u}, f)\|_Z \tag{1}$$

gibt.

1. Im Spezialfall $F_t(u, f) = G_t(u) - f$ und $\varphi(t) = Mt^{\varepsilon-1}$ mit einem $\varepsilon \in (0, 1]$ gilt also für die nach Theorem 1 konstruierte Lösung von $G_0(u) = f$ eine Abschätzung der Form $\|u - \bar{u}\|_X \leqq C_3 \|f - \bar{f}\|_Y^\varepsilon$. 2. Die in (i) geforderte Abschätzung ist stets mit einem geeigneten ψ erfüllbar, wenn bei festen $t \in (0, 1]$ die Abbildung $(u, f) \mapsto D_u F_t(u, f) \in \mathcal{L}(X, Z)$ gleichmäßig stetig auf $V \times W$ ist.

Beweis: 1. Wir zeigen zunächst folgendes: Ist $t \in (0, 1]$ fest gewählt und $(u^*, f) \in V \times W$ mit

$$2\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z < R - \|u^* - \bar{u}\|_X, \tag{2}$$

dann existiert ein $u \in V$ mit $F_t(u, f) = 0$ und

$$\|u - u^*\|_X \leqq 2\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z. \tag{3}$$

Zum Nachweis dieser Behauptung definieren wir die Iterationsfolge

$$u_0 = u^* \quad \text{und} \quad u_{n+1} = u_n - \sigma L_t(u_n, f)\big(F_t(u_n, f)\big) \quad \text{für } n \geqq 0,$$

wobei wir ein $\sigma \in (0, 1)$ mit

$$\varphi(t)\,\psi\big(t, \sigma\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z\big) \leqq 1/2 \tag{4}$$

wählen. Eine solche Wahl ist wegen $\psi(t, 0) = 0$ und der Stetigkeit von ψ stets möglich, wobei σ natürlich von t und $\|F_t(u^*, f)\|_Z$ abhängen kann. Es gilt dann:

$$\text{a)}\ \|F_t(u_n, f)\|_Z \leqq \|F_t(u^*, f)\|_Z \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^n,$$

$$\text{b)}\ \|u_{n+1} - u_n\|_X \leqq \sigma\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^n,$$

$$\|u_{n+1} - u_0\|_X \leqq 2\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z.$$

Der Beweis erfolgt induktiv. Für $n = 0$ ist a) trivialerweise richtig. Aus (ii) und unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung ergibt sich sofort

$$\|u_{n+1} - u_n\|_X \leqq \sigma\varphi(t)\,\|F_t(u_n, f)\|_Z \leqq \sigma\varphi(t)\,\|F_t(u^*, f)\|_Z \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^n,$$

sowie unter Beachtung von (2)

$$\|u_{n+1} - u_0\|_X \leqq \sum_{i=0}^{n} \|u_{i+1} - u_i\|_X \leqq \sigma\varphi(t)\, \|F_t(u^*, f)\|_Z \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^i$$
$$= 2\varphi(t)\, \|F_t(u^*, f)\|_Z < R - \|u_0 - \bar{u}\|_X .$$

Also ist $u_{n+1} \in V$. Es bleibt noch a) für $n + 1$ zu zeigen. Zunächst gilt (es kann $\psi(t, \cdot)$ als monoton wachsend angenommen werden)

$$\begin{aligned}\|F_t(u_{n+1}, f)\|_Z &\leqq \|F_t(u_{n+1}, f) - F_t(u_n, f) - D_uF_t(u_n, f)\,(u_{n+1} - u_n)\|_Z \\ &\quad + \|F_t(u_n, f) + D_uF_t(u_n, f)\,(u_{n+1} - u_n)\|_Z \\ &\leqq \|u_{n+1} - u_n\|_X\, \psi(t, \|u_{n+1} - u_n\|_X) + (1 - \sigma)\, \|F_t(u_n, f)\|_Z \\ &\leqq \|F_t(u^*, f)\|_Z \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^n \left\{\varphi(t)\, \psi\big(t, \sigma\varphi(t)\, \|F_t(u^*, f)\|_Z\big)\, \sigma + 1 - \sigma\right\}.\end{aligned}$$

Auf Grund von (4) ist nun hierin $\{\ldots\} \leqq \sigma/2 + 1 - \sigma = 1 - \sigma/2$, und wir erhalten $\|F_t(u_{n+1}, f)\|_Z \leqq \|F_t(u^*, f)\|_Z \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{n+1}$, also gerade a).

Aus b) folgt $u_n \to u \in V$ und $\|u - u^*\|_Z \leqq 2\varphi(t)\, \|F_t(u^*, f)\|_Z$. Aus a) folgt $\|F_t(u_n, f)\|_Z \to 0$ für $n \to \infty$, und wegen der Stetigkeit von F_t bez. u (siehe (i)) ergibt sich also $F_t(u, f) = 0$.

2. Es sei jetzt ein $t^* \in (0, 1)$ so gewählt, daß

$$16M \int_0^{t^*} \varphi(t)\, dt < R \tag{5}$$

gilt (wegen (iv) ist dies stets möglich). Wir behaupten nun: Ist $f \in W$ und $\|F_0(\bar{u}, f)\|_Z \leqq Mt^*$, so existiert ein $u \in V$ mit $F_0(u, f) = 0$. Dazu setzen wir $t_0 = \|F_0(\bar{u}, f)\|_Z/M$ (es ist also $t_0 \leqq t^*$) und wählen eine Zahlenfolge $\{t_n\}_{n\geqq 1}$ mit $t_n \in (0, t_{n-1})$,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t_n) < 2\varphi(t_{n-1}). \tag{6}$$

Wegen (iii) und (5) ist

$$\begin{aligned}2\varphi(t_0)\, \|F_{t_0}(\bar{u}, f)\|_Z &\leqq 2\varphi(t_0) \big(\|F_{t_0}(\bar{u}, f) - F_0(\bar{u}, f)\|_Z + \|F_0(\bar{u}, f)\|_Z\big) \\ &\leqq 4Mt_0\varphi(t_0) \leqq 4M \int_0^{t_0} \varphi(t)\, dt < R\end{aligned}$$

und nach Beweisschritt 1 existiert ein $u_0 \in V$ mit $F_{t_0}(u_0, f) = 0$ und

$$\|u_0 - \bar{u}\|_X \leqq 4Mt_0\varphi(t_0) < R/2. \tag{7}$$

Weiter existieren $u_n \in V (n \geqq 1)$ mit $F_{t_n}(u_n, f) = 0$ und

$$\|u_n - u_{n-1}\|_X \leqq 2M\varphi(t_n)\, (t_{n-1} - t_n), \tag{8}$$

$$\|u_n - \bar{u}\|_X < R/2. \tag{9}$$

Dazu haben wir nur sukzessive unser Ergebnis aus dem Beweisschritt 1 anzuwenden. Aus $F_{t_{n-1}}(u_{n-1}, f) = 0$ und (iii) folgt nämlich

$$\begin{aligned}2\varphi(t_n)\, \|F_{t_n}(u_{n-1}, f)\|_Z &\leqq 2M\varphi(t_n)\, (t_{n-1} - t_n) \\ &\leqq 4M \int_{t_n}^{t_{n-1}} \varphi(t)\, dt < R/2 < R - \|u_{n-1} - \bar{u}\|_X .\end{aligned}$$

Daher existiert ein $u_n \in V$ mit $F_{t_n}(u_n, f) = 0$ und es gilt (8). Aus (7) und (8) folgt weiter

$$\|u_n - \overline{u}\|_X \leqq \|\overline{u} - u_0\|_X + \sum_{i=1}^{n} \|u_i - u_{i-1}\|_X$$
$$\leqq 4Mt_0\varphi(t_0) + 4M \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_{i-1})\,(t_{i-1} - t_i) \leqq 8M \int_0^{t_0} \varphi(t)\,dt < R/2. \tag{10}$$

Aus (8) ergibt sich $u_n \to u \in V$ und wegen (v) folgt $F_0(u, f) = 0$. (10) liefert noch die Abschätzung $\|u - \overline{u}\|_X \leqq 8M \int_0^{Mt_0} \varphi(t)\,dt$, wegen $Mt_0 = \|F_0(\overline{u}, f)\|_Z$ also gerade (1) ∎

Sind die Operatoren $L_t(u, f)$ auch Linksinverse von $D_uF_t(u, f)$, d. h. gilt

$$L_t(u, f)\left(D_uF_t(u, f)\,v\right) = v \quad \text{für alle } v \in Z, \tag{11}$$

dann könnte man erwarten, daß sich (analog zum klassischen Satz über implizite Funktionen) auch eine Eindeutigkeitsaussage beweisen läßt. Das ist aber nur unter weiteren, einschränkenden Voraussetzungen der Fall.

Zusatz 1: *Es gelte* (i)—(iv) *sowie* (11). *Ferner möge es ein* $t^* \in (0, 1]$ *geben, so daß*

$$2\varphi(t)\,\psi\left(t, 4Mt\varphi(t)\right) < 1 \quad \text{für alle } t \in (0, t^*] \tag{12}$$

gilt. Sind dann $u, v \in V$ *und* $f \in W$ *mit* $F_0(u, f) = F_0(v, f)$ *und*

$$\|u - v\|_X \leqq 4Mt^*\varphi(t^*) \tag{13}$$

gegeben, so muß $u = v$ *sein.*

Beweis: Nach (iv) ist $t\varphi(t) \to 0$ für $t \to +0$. Ist nun $u \neq v$, dann gibt es wegen (13) also ein $\bar{t} \in (0, t^*]$ mit $\|u - v\|_X = 4M\bar{t}\varphi(\bar{t})$. Wir können dann schreiben

$$F_{\bar{t}}(u, f) - F_{\bar{t}}(v, f) = D_uF_{\bar{t}}(v, f)\,(u - v) + T, \tag{14}$$

wobei für T wegen (i) die Abschätzung $\|T\|_Z \leqq \|u - v\|_X\,\psi\left(\bar{t}, 4M\bar{t}\varphi(\bar{t})\right)$ gilt. Wenden wir nun auf (14) den Operator $L_{\bar{t}}(v, f)$ an und beachten (ii) und (iii), so folgt

$$\|u - v\|_X \leqq \|L_{\bar{t}}(v, f)\,T\|_X + \left\|L_{\bar{t}}(v, f)\left(F_{\bar{t}}(u, f) - F_{\bar{t}}(v, f)\right)\right\|_X$$
$$\leqq \|u - v\|_X\,\varphi(\bar{t})\,\psi\left(\bar{t}, 4M\bar{t}\varphi(\bar{t})\right) + 2M\bar{t}\varphi(\bar{t})$$
$$\leqq \|u - v\|_X\left(\varphi(\bar{t})\,\psi(\bar{t}, 4M\bar{t}\varphi(\bar{t})) + 1/2\right).$$

Wegen (12) ergibt sich hieraus der Widerspruch $\|u - v\|_X < \|u - v\|_X$ ∎

Zusatz 2: *Es gelte* (i)—(iv). *Ferner möge für alle* $t \in (0, 1]$ *aus* $F_t(u, f) = F_t(v, f) = 0$ *mit* $u, v \in V$ *und* $f \in W$ *stets* $u = v$ *folgen. Dann gilt dies auch für* F_0.

Beweis: Angenommen, es existieren $u, v \in V$ und $f \in W$ mit $F_0(u, f) = F_0(v, f) = 0$ und $u \neq v$. Wir wählen ein $t \in (0, 1]$, so daß

$$2Mt\varphi(t) < \min\{R - \|u - \overline{u}\|_X, R - \|v - \overline{u}\|_X, \|u - v\|_X/4\} \tag{16}$$

gilt. Es ist dann wegen (iii)

$$2\varphi(t)\,\|F_t(u, f)\|_Z \leqq 2Mt\varphi(t) < R - \|u - \overline{u}\|_X,$$
$$2\varphi(t)\,\|F_t(v, f)\|_Z \leqq 2Mt\varphi(t) < R - \|v - \overline{u}\|_X.$$

Aus dem Beweis von Theorem 1 (vgl. (2) und (3)) wissen wir aber, daß es dann Elemente $u_1, v_1 \in V$ mit $F_t(u_1, f) = F_t(v_1, f) = 0$ für alle t und $\|u_1 - u\|_X, \|v_1 - v\|_X \leqq 2Mt\varphi(t)$ gibt. Weiterhin gilt wegen (16)

$$\|u_1 - v_1\|_X \geqq \|u - v\|_X - \|u_1 - u\|_X - \|v_1 - v\|_X$$
$$\geqq \|u - v\|_X - 4Mt\varphi(t) \geqq \|u - v\|_X/2 > 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da nach Voraussetzung $u_1 = v_1$ sein muß ∎

3. Interpolation und Glättungsoperatoren

Es sei $(X_t, \|\cdot\|_t)_{0 \leq t < \infty}$ eine Familie von Banachräumen. Dabei gelte $X_a \hookrightarrow X_b$ für $a \geqq b$, d. h. $X_a \subseteqq X_b$ und $\|x\|_b \leqq C(a) \|x\|_a$ für alle $x \in X_a$. Die Konstanten $C(a)$ seien mit a beschränkt. Sind nun $p \in [1, \infty]$ und $a_2 > a_1 \geqq 0$ beliebig gegebene reelle Zahlen, dann definieren wir für $a \in (a_1, a_2)$ mittels der Interpolationstheorie neue Räume

$$X_{a,p} = (X_{a_1}, X_{a_2})^{\alpha,p} \quad \text{mit} \quad \alpha = (a_1 - a)/(a_1 - a_2).$$

Ein Element $x \in X_{a_1}$ gehört demnach zu $X_{a,p}$, falls es eine Darstellung

$$x = \int_0^\infty x(t) \frac{dt}{t} \quad \text{in } X_{a_1}, \quad x(t) \in X_{a_2}, \tag{17}$$

mit

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \ \text{bzw.}\ \operatorname*{vrai\,max}_{0<t<\infty} t^{-\alpha} J(t, x(t)) < \infty \quad \text{für} \quad p = \infty \tag{18}$$

besitzt, wobei wie üblich $J(t, y) = \max\{\|y\|_{a_1}, t\|y\|_{a_2}\}$, $y \in X_{a_2}$, das *J-Funktional von Peetre* bezeichnet. Die Norm $\|x\|_{a,p}$ wird als das Infimum der Ausdrücke (18) definiert, erstreckt über alle Funktionen $x(t)$ mit (17), (18). Für unsere Anwendung in Abschnitt 4 benötigen wir eine „diskrete" Formulierung dieser J-Methode. Dazu sei l_p der Banachraum aller komplexen Folgen $\{s_n\}_{n \geq 0}$ mit der üblichen Norm. Es sei weiter eine beliebige reelle Nullfolge $\{\vartheta_n\}_{n \geq 0}$ mit

$$1 \geqq \vartheta_0 > \vartheta_1 > \ldots > \vartheta_n > \vartheta_{n+1} > \ldots \text{und } \vartheta_n/\vartheta_{n+1} \leqq \vartheta < \infty$$

gegeben. Wir setzen $\Delta_0 = \vartheta_0$ und $\Delta_n = \vartheta_{n-1} - \vartheta_n$ für $n \geqq 1$. Im Beweis der nachfolgenden beiden Lemmata beschränken wir uns auf den Fall $1 < p < \infty$. Die notwendigen Modifikationen für $p = 1, \infty$ sind offensichtlich. Ferner sei $q \in [1, \infty]$ immer so gewählt, daß $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt.

Lemma 1: *Es sei $x \in X_{a,p}$. Dann existieren Folgen $\{s_n\} \in l_p$ und $\{x_n\} \subset X_{a_2}$ mit*

$$x = \sum_{n=0}^\infty x_n \quad \text{in } X_{a_1},$$

$$\|x_n\|_{a_1} \leqq |s_n| \, \Delta_n^{1/q} \vartheta_n^{\alpha - 1/q} \ \text{und}\ \|x_n\|_{a_2} \leqq |s_n| \, \Delta_n^{1/q} \vartheta_n^{\alpha - 1 - 1/q} \tag{19}$$

sowie

$$\|\{s_n\}\|_{l_p} \leqq C(a_1, a_2, a, p, \vartheta) \max\{\|x\|_{a,p}, \vartheta_0^{-\alpha} \|x\|_{a_1}\}.$$

Beweis: Das Element $x \in X_{\alpha,p}$ hat eine Darstellung (17) mit

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \leqq 2 \, \|x\|_{\alpha,p}.$$

Wir setzen nun mit einer geeigneten, von α, p, ϑ abhängigen Konstante $C \geqq 1$ (deren genauer Wert sich aus dem weiteren Beweis ergibt)

$$x_0 = \int_{\vartheta_0}^\infty x(t) \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad s_0 = C \max \{\|x\|_{\alpha,p}, \vartheta_0^{-\alpha} \|x\|_{a_1}\},$$

sowie

$$x_n = \int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} x(t) \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad s_n = C \left(\int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \quad \text{für } n \geqq 1.$$

Es gilt dann offenbar

$$\begin{aligned}\|x_0\|_{a_1} &\leqq \|x\|_{a_1} + \int_0^{\vartheta_0} J\big(t, x(t)\big) \frac{dt}{t} \\ &\leqq \|x\|_{a_1} + \left(\int_0^{\vartheta_0} \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \left(\int_0^{\vartheta_0} t^{\alpha q - 1} \, dt\right)^{1/q} \\ &\leqq C \vartheta_0^{\alpha} \max \{\|x\|_{\alpha,p}, \vartheta_0^{-\alpha} \|x\|_{a_1}\} \leqq s_0 \vartheta_0^{\alpha}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|x_0\|_{a_2} &\leqq \int_{\vartheta_0}^\infty J\big(t, x(t)\big) \frac{dt}{t^2} \\ &\leqq \left(\int_{\vartheta_0}^\infty \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \left(\int_{\vartheta_0}^\infty t^{-q+\alpha q - 1} \, dt\right)^{1/q} \\ &\leqq C \vartheta_0^{\alpha - 1} \|x\|_{\alpha,p} \leqq s_0 \vartheta_0^{\alpha - 1}.\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir für $n \geqq 1$

$$\begin{aligned}\|x_n\|_{a_1} &\leqq C^{-1} s_n \left(\int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} t^{\alpha q - 1} \, dt\right)^{1/q} \\ &\leqq C^{-1} s_n \Delta_n^{1/q} \max \{\vartheta_n^{\alpha - 1/q}, \vartheta_{n-1}^{\alpha - 1/q}\} \leqq s_n \Delta_n^{1/q} \vartheta_n^{\alpha - 1/q}\end{aligned}$$

und

$$\|x_n\|_{a_2} \leqq C^{-1} s_n \left(\int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} t^{-q+\alpha q - 1} \, dt\right)^{1/q} \leqq s_n \Delta_n^{1/q} \vartheta_n^{\alpha - 1 - 1/q} \quad \blacksquare$$

Lemma 2: *Sind* $\{s_n\} \in l_p$ *und* $\{x_n\} \subset X_{a_2}$ *Folgen mit den Eigenschaften* (19), *dann ist* $x \in X_{a,p}$, *und es gilt*

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} x_i \right\|_{a,p} \cdot \|x\|_{a,p} \leqq C(a_1, a_2, a, p, \vartheta) \, \|\{s_n\}\|_{l_p}.$$

Beweis: Wir setzen

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t > \vartheta\vartheta_0, \\ c_0 t^{\alpha/q} x_0 & \text{für} \quad \vartheta_0 < t \leqq \vartheta\vartheta_0, \\ c_n t^{\alpha/q} x_n & \text{für} \quad \vartheta_n < t \leqq \vartheta_{n-1}, \; n \geqq 1, \end{cases}$$

mit

$$c_0 = \left(\int_{\vartheta_0}^{\vartheta\vartheta_0} t^{\alpha/q-1} \, dt \right)^{-1} \quad \text{und} \quad c_n = \left(\int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} t^{\alpha/q-1} \, dt \right)^{-1}.$$

Offenbar gilt

$$c_n \leqq C_1 \Delta_n^{-1} \vartheta_n^{1-\alpha/q} \; (n \geqq 0) \quad \text{sowie} \quad \int_0^\infty x(t) \frac{dt}{t} = \sum_{n=0}^\infty x_n = x$$

in X_{a_1}. Es ist ferner für $t \leqq \vartheta\vartheta_0$

$$t^{-\alpha} J(t, x(t)) \leqq t^{-\alpha/p} c_n \max \{\|x_n\|_{a_1}, t \, \|x_n\|_{a_2}\}$$
$$\leqq s_n c_n \Delta_n^{1/q} \vartheta_n^{\alpha-1/q} t^{-\alpha/p} \max \{1, t\vartheta_n^{-1}\} \leqq C_2 s_n \Delta_n^{-1/p} \vartheta_n^{(1+\alpha)/p} t^{-\alpha/p},$$

wenn n so gewählt wird, daß $\vartheta_n < t \leqq \vartheta_{n-1}$ bzw. $\vartheta_0 < t \leqq \vartheta\vartheta_0$ gilt. Daraus folgt sofort

$$\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} J(t, x(t))\right)^p \frac{dt}{t}$$
$$\leqq C_2 \left\{ s_0^p \Delta_0^{-1} \vartheta_0^{1+\alpha} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta\vartheta_0} t^{-\alpha-1} \, dt + \sum_{n=1}^\infty s_n^p \Delta_n^{-1} \vartheta_n^{1+\alpha} \int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n-1}} t^{-\alpha-1} \, dt \right\} \leqq C_3 \sum_{n=0}^\infty s_n^p.$$

Die Konstanten C_1, C_2, C_3 hängen von $a_1, a_2, a, p, \vartheta$ ab ∎

Wichtig für unsere Anwendung ist, daß die Folge $\{\vartheta_n\}$ nur über die Größe ϑ in die Konstanten von Lemma 1 und 2 eingeht.

Definition: Eine Familie $(S_r)_{r \geqq 1}$ von linearen Operatoren von X_0 nach $X_\infty := \bigcap \{X_t \mid t \geqq 0\}$ wollen wir X_∞-*Glättungsoperatoren* nennen, falls gilt:

$$\|S_r x\|_a \leqq C(a) \, r^{a-b} \, \|x\|_b \quad \text{für} \quad a \geqq b, \; x \in X_b; \tag{20}$$

$$\|(1 - S_r) x\|_b \leqq C(a) \, r^{b-a} \, \|x\|_a \quad \text{für} \quad a \geqq b, \; x \in X_a. \tag{21}$$

Die Konstanten $C(a)$ seien mit a beschränkt.

Bekanntlich folgt aus der Existenz von Glättungsoperatoren mit den Eigenschaften (20), (21) die folgende Konvexitätsabschätzung für die Normen.

Lemma 3 (siehe z. B. [15: Lemma 3.1]): *Ist* $c = \lambda b + (1 - \lambda) a$ *mit* $0 \leqq \lambda \leqq 1$ *und* $0 \leqq b \leqq a < \infty$, *dann gilt*

$$\|x\|_c \leqq C(a) \, \|x\|_b^\lambda \, \|x\|_a^{1-\lambda} \quad \textit{für alle } x \in \hat{X}_a. \tag{22}$$

Die Konstanten $C(a)$ *sind mit* a *beschränkt.*

Lemma 4: *Es gilt:*

(i) $X_c \hookrightarrow X_{a,1} \hookrightarrow X_a \hookrightarrow X_{a,\infty} \hookrightarrow X_b$ *für* $c > a > b$;

(ii) $\|S_r x\|_b \leqq C r^{b-a} \|x\|_{a,p}$ *für* $b > a$, $x \in X_{a,p}$;

(iii) $\|(1 - S_r)\, x\|_b \leqq C r^{b-a} \|x\|_{a,p}$ *für* $b < a$, $x \in X_{a,p}$.

Beweis: (i): Aus (22) folgt sofort $X_{a,1} \hookrightarrow X_a$ (vgl. [1: Prop. 3.2.15]). Ist umgekehrt $x \in X_a$ und setzen wir $x_0 = S_1 x$ und $x_n = (S_{2^n} - S_{2^{n-1}})\, x$ für $n \geqq 1$, dann gilt

$$\|x_n\|_{a_1} \leqq C \|x\|_a 2^{(a_1 - a)n} \quad \text{und} \quad \|x_n\|_{a_2} \leqq C \|x\|_a 2^{(a_2 - a)n}.$$

Nach Lemma 2 (mit $\vartheta_n = 2^{(a_1 - a_2)n}$) folgt aber daraus $X_a \hookrightarrow X_{a,\infty}$. Schließlich haben wir für $c > a > b$ noch $X_{c,\infty} \hookrightarrow X_{a,1}$ und $X_{a,\infty} \hookrightarrow X_{b,1}$ als allgemeine Eigenschaften der Interpolationsräume.

(ii): Es genügt offenbar, den Fall $p = \infty$ zu betrachten. Ist $x \in X_{a,\infty}$, dann seien $\{s_n\}$ und $\{x_n\}$ Folgen mit den Eigenschaften (19), wobei wir $\vartheta_n = 2^{(a_1 - a_2)n}$ wählen. Ferner sei $b_1 = \min\{b, a_2\} > a$ und $n_0 \in \mathbf{Z}$ mit $2^{n_0} \leqq r < 2^{n_0+1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|S_r x\|_b &\leqq C_1 r^{b-b_1} \sum_{n=0}^{n_0} \|x_n\|_{b_1} + C_1 r^{b-a_1} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|x_n\|_{a_1} \\ &\leqq C_2 \|\{s_n\}\|_{l_\infty} r^{b-a} \{r^{a-b_1} 2^{(b_1-a)n_0} + r^{a-a_1} 2^{(a_1-a)(n_0+1)}\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber wegen unserer Wahl von n_0 höchstens gleich 2. Analog wird (iii) bewiesen ∎

Die Aussagen (ii) und (iii) gelten nicht ohne weiteres auch für $a = b$: Die Konstanten C können für $b \to a$ beliebig groß werden.

Aus Lemma 4 (i) und dem Reiterationssatz (siehe z. B. [1: Prop. 3.2.16]) ergibt sich: Besitzt die Familie (X_t) Glättungsoperatoren, dann ist die Definition der Räume $X_{a,p}$ von a_1, a_2 unabhängig; wir dürfen also wirklich einfach $X_{a,p}$ schreiben. (Verschiedene Werte von a_1, a_2 führen nur zu äquivalenten Normen in $X_{a,p}$!)

4. Ein Theorem vom Moser-Nash-Typ

Es seien X_t, Y_t, Z_t, $t \geqq 0$, drei Skalen von Banachräumen, die Glättungsoperatoren besitzen. Wir wählen ein festes $p \in [1, \infty]$ und schreiben zur Abkürzung jetzt X_a' und Y_a' für $X_{a,p}$ bzw. $Y_{a,p}$ und $a > 0$. Ferner sei $\|.\|_a'$ eine der äquivalenten Normen in X_a' bzw. Y_a'. Wir wollen nun wieder die Auflösbarkeit der Gleichung $F(u, f) = 0$ untersuchen, und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

(i) F ist eine Abbildung von $V \times W \subseteqq X_\tau' \times Y_{\tau+\delta}'$ nach Z_0. Dabei seien $\tau > 0$, $\delta \geqq 0$,

$$V = \{u \in X_\tau' \mid \|u - \bar{u}\|_\tau' < R\} \quad \text{und} \quad W = \{f \in Y_{\tau+\delta}' \mid \|f - \bar{f}\|_{\tau+\delta}' < P\}$$

$(R, P > 0)$ sowie $\bar{u} \in X_{a_F+\mu}$ und $\bar{f} \in Y_{a_F+\mu+\delta}$ mit $a_F > \tau$, $\mu \geqq 0$.

(ii) Es gelte mit einem $\nu \in [0, a_F]$: Für $f \in W \cap Y_{a_F+\mu+\delta}$ ist $F(., f)$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von $V \cap X_{a_F}$ nach Z_ν, d. h. $D_u F(u, f) \in \mathscr{L}(X_{a_F}, Z_\nu)$.

(iii) Für $u \in V \cap X_{a_F}$ und $f_1, f_2 \in W \cap Y_{a_F+\mu+\delta}$ gelte mit $\alpha \in [0, \nu]$ und $\beta \in [0, a_F - \nu]$

$$\|F(u_1, f) - F(u_2, f)\|_0 \leqq C_{a_F} \|f_1 - f_2\|_0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\|F(u_1, f) - F(u_2, f)\|_\nu \\ &\leqq C_{a_F}\{\|f_1 - f_2\|_\nu + \|f_1 - f_2\|_\alpha (\|u\|_{\nu+\beta} + \|f_1\|_{\nu+\beta+\delta} + \|f_2\|_{\nu+\beta+\delta})\}. \end{aligned} \tag{23'}$$

(iv) Für $u \in V \cap X_{a_F+\mu}$ und $f \in W \cap Y_{a_F+\mu+\delta}$ möge es eine lineare Abbildung $L(u, f)$: $Z_\infty \to X_{a_F}$ geben, so daß $D_uF(u, f)\big(L(u, f)\, v\big) = v$ für alle $v \in Z_\infty$ gilt. Weiter sei für $0 \leqq a \leqq a_F$ und $v \in Z_\infty$ mit einem $\varkappa \in [0, \delta]$

$$\|L(u, f)\, v\|_a \leqq C_{a_F}\{(\|u\|_{a+\mu} + \|f\|_{a+\mu+\delta})\, \|v\|_\varkappa + \|v\|_{a+\delta}\}. \tag{24}$$

(v) Schließlich gelte für alle $u_1, u_2 \in V \cap X_{a_F}$, $f \in W \cap Y_{a_F+\mu+\delta}$, $v \in X_{a_F}$ und $a = 0, \nu$

$$\|D_uF(u_1, f)\, v - D_uF(u_2, f)\, v\|_a$$
$$\leqq C_{a_F} \sum_{i=1}^{l} \|v\|_{m_i(a)}\, \|u_1 - u_2\|_{m_i'(a)}\, (1 + \|u_1\|_{m_i''(a)} + \|u_2\|_{m_i''(a)})\, (1 + \|f\|_{m_i'''(a)}) \tag{25}$$

mit einem $l \in N$ sowie für $i = 1, \ldots, l$

$$0 \leqq m_i(a), m_i'(a), m_i''(a) \leqq a_F \quad \text{und} \quad 0 \leqq m_i'''(a) \leqq a_F + \mu + \delta.$$

Ist $\lambda \in \mathbf{R}$, so setzen wir noch

$$M(a) = \max_{i=1,\ldots,l} \big\{m_i(a) + m_i'(a) + \max\{m_i''(a) - \lambda + \delta, 0\} + \max\{m_i'''(a) - \lambda, 0\}\big\}.$$

Theorem 2: *Es gelte* (i)—(v) *sowie für* $a = 0, \nu$

$$\nu > \lambda \geqq \max\{\tau + \delta, \mu + \varkappa, \alpha + \beta + \delta\} \text{ und } M(a) < \lambda - 2\delta + a.$$

Ferner sei die Abbildung $F: (V \cap X_{\lambda'-\delta}) \times (W \cap Y_{\lambda'}) \to Z_0$ *für ein* $\lambda' < \lambda$ *stetig. Dann existieren Konstanten* ε, $M > 0$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $f \in Y_\lambda'$ *und*

$$\varepsilon(f) := \big(\|F(\bar u, \bar f)\|_0 + \|f - \bar f\|_0\big) \max\{\|\bar u\|_{a_F+\mu}, \|\bar f\|_{a_F+\mu+\delta}\}^{\lambda/(a_F+\mu+\delta-\lambda)}$$
$$+ \|F(\bar u, \bar f)\|_\lambda' + \|f - \bar f\|_\lambda' < \varepsilon,$$

so gibt es ein $u(f) \in V \cap X_{\lambda-\delta}'$ *mit* $F\big(u(f), f\big) = 0$ *und* $\|u(f) - \bar u\|_{\lambda-\delta}' \leqq M\varepsilon(f)$. *Dabei hängen* M *und* ε *neben den Eigenschaften der Räume und den Konstanten* $\lambda, \tau, \delta, \ldots$ *auch von* $\|\bar u\|_{\lambda-\delta}$ *und* $\|\bar f\|_\lambda$ *ab, aber nicht von* $\|\bar u\|_{\lambda-\delta+a}$ *und* $\|\bar f\|_{\lambda+a}$ *für* $a \in (0, a_F + \mu + \delta - \lambda]$.

Beweis: Wir können zunächst $F(\bar u, \bar f) = 0$ annehmen, denn ist dies nicht der Fall, dann definiert $\tilde F\big(u, (f, v)\big) = F(u, f) - F(\bar u, \bar f) + v$ eine neue Abbildung $\tilde F$, die offenbar wieder Voraussetzungen der Form (i)—(v) in den drei Skalen X_t, $(Y_t \times Z_t)$, Z_t von Banachräumen und $\tilde F\big(\bar u, (\bar f, 0)\big) = 0$ erfüllt. Wir wählen ein $\gamma \in (0, \nu - \lambda]$, so daß

$$M(a) - a + 4\gamma \leqq \lambda - 2\delta \quad \text{für} \quad a = 0, \nu \tag{26}$$

gilt. Weiter sei $C = \max\{1, C_{a_F}, \bar C, \|\bar u\|_{\lambda-\delta}, \|\bar f\|_\lambda\}$, wobei $\bar C$ das Maximum der in (20) bis (22) vorkommenden Konstanten $C(a)$ für $0 \leqq a \leqq a_F + \mu + \delta$ ist. Schließlich seien

$$\sigma = (8C)^{1/(\nu-\lambda)}, \quad M_1 = 1120 C^8 \sigma^\lambda, \quad M_2 = 224 C^4 \sigma^\lambda, M_3 = 28 C^3, \tag{27}$$

sowie

$$A = \max\{1, \|\bar u\|_{a_F+\mu}, \|\bar f\|_{a_F+\mu+\delta}\}^{1/(a_F+\mu+\delta-\lambda)}.$$

Für $a = a_F + \mu + \delta - \lambda$ gilt dann $\|\bar u\|_{\lambda-\delta+a}, \|f\|_{\lambda+a} \leqq A^a$, und wegen $\|\bar u\|_{\lambda-\delta}, \|\bar f\|_\lambda \leqq C$ folgt daraus mittels der Konvexitätsabschätzung (22)

$$\begin{aligned} \|\bar u\|_a &\leqq C^2 A^{\max\{a-\lambda+\delta, 0\}} && \text{für} \quad 0 \leqq a \leqq a_F + \mu, \\ \|\bar f\|_a &\leqq C^2 A^{\max\{a-\lambda, 0\}} && \text{für} \quad 0 \leqq a \leqq a_F + \mu + \delta. \end{aligned} \tag{28}$$

Mit $C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen wir im weiteren verschiedene Konstanten, die nicht von A abhängen. Ist $f \in Y_\lambda'$ und $\varepsilon(f)$ der in der Formulierung des Theorems angegebene Ausdruck (mit $F(\bar{u}, \bar{f}) = 0$), so gilt $\max\{\|f - \bar{f}\|_0\, A^\lambda, \|f - \bar{f}\|_\lambda'\} \leqq C_1\varepsilon(f)$. Nach Lemma 1 existieren dann Folgen $\{l_n\} \in l_p$, $\{\bar{f}_n\} \subset Y_{a_F+\mu+\delta}$ mit $f = \bar{f} + (\bar{f}_0 + \bar{f}_1 + \ldots)$ in Y_0,

$$\|\{l_n\}\|_{l_p} \leqq C_2\varepsilon(f) \quad \text{und} \quad \|\bar{f}_n\|_a \leqq |l_n|\, a_n^{a-\lambda} \quad \text{für} \quad 0 \leqq a \leqq a_F + \mu + \delta, \tag{29}$$

wobei $a_n = A\sigma^n$ sei. Wir setzen nun $f_n = \bar{f} + (\bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_n)$. Nach Lemma 2 ist für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$ dann $f_n \in W$, und es gilt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_a &\leqq \|\bar{f}\|_a + \sup_{0 \leqq m \leqq n} |l_m| \sum_{i=0}^{n} a_i^{a-\lambda} \\ &\leqq C^2 A^{\max\{a-\lambda,0\}} + a_n^{\max\{a-\lambda,\gamma\}} \leqq 2C^2 a_n^{\max\{a-\lambda,\gamma\}} \end{aligned} \tag{30}$$

für $0 \leqq a \leqq a_F + \mu + \delta$. Weiter sei $s_0 = |l_0|$ und $s_n = \max\{|l_n|, s_{n-1}/2\}$ für $n \geqq 1$. Es gilt dann offenbar

$$|l_n| \leqq s_n, \ \|\{s_n\}\|_\infty = \|\{l_n\}\|_\infty \quad \text{und} \quad \|\{s_n\}\|_{l_p} \leqq 2\, \|\{l_n\}\|_{l_p}. \tag{31}$$

Wir definieren nun für $n \geqq 0$

$$u_0 = \bar{u}, \quad u_{n+1} = u_n - L(v_n, f_n)\big(S_{a_n}F(u_n, f_n)\big) \quad \text{mit} \quad v_n = S_{a_n}(u_n - \bar{u}) + \bar{u}. \tag{32}$$

Setzen wir zur Abkürzung $F_n = F(u_n, f_n)$ und ist $\varepsilon(f)$ hinreichend klein, so gilt für $n \geqq 0$

$$(s_1, n)\colon \ \|u_{n+1} - u_n\|_a \leqq M_1 s_n a_n^{a+\delta-\lambda} \quad \text{für} \quad \gamma \leqq a \leqq a_F,\ u_{n+1} \in V;$$

$$(s_2, n)\colon \ \|F_n\|_0 \leqq M_2 s_n a_n^{-\lambda} \quad \text{und} \quad \|F_n\|_\nu \leqq M_3 s_n a_n^{\nu-\lambda}.$$

In den nachfolgenden Induktionsschritten zeigen wir für $n \geqq 0$, daß aus der Gültigkeit von $(s_1, m-1)$ und (s_2, m) für $m \leqq n$ die Gültigkeit von (s_1, n) und $(s_2, n+1)$ folgt. Wir müssen also zunächst $(s_2, 0)$ zeigen. Aus (23) und (29) folgt aber sofort:

$$\|F_0\|_0 = \|F(\bar{u}, \bar{f}) - F(\bar{u}, f_0)\|_0 \leqq C\, \|\bar{f}_0\|_0 \leqq C\, |l_0|\, a_0^{-\lambda} \leqq M_2 s_0 a_0^{-\lambda}.$$

Aus (23′) ergibt sich weiterhin unter Beachtung von (28)—(30)

$$\begin{aligned} \|F_0\|_\nu &\leqq C\{\|\bar{f}_0\|_\nu + \|\bar{f}_0\|_\alpha\, (\|\bar{u}\|_{\nu+\beta} + \|\bar{f}\|_{\nu+\beta+\delta} + \|f_0\|_{\nu+\beta+\delta})\} \\ &\leqq C\, |l_0|\, (a_0^{\nu-\lambda} + 4C^2 a_0^{\alpha-\lambda} a_0^{\nu+\beta+\delta-\lambda}) \leqq M_3 s_0 a_0^{\nu-\lambda}, \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt $\lambda \geqq \alpha + \beta + \delta$ ausgenutzt haben. Damit ist $(s_2, 0)$ bereits gezeigt.

Schritt 1: *Abschätzung von* $\|u_{n+1} - u_n\|_a$ *für* $\gamma \leqq a \leqq a_F$. Zunächst folgt sofort aus (24) und der Eigenschaft (20) der Glättungsoperatoren

$$\|u_{n+1} - u_n\|_a \leqq C^2\, \|F_n\|_0\, \{(\|v_n\|_{a+\mu} + \|f_n\|_{a+\mu+\delta})\, a_n^\varkappa + a_n^{a+\delta}\}.$$

Wegen $a \geqq \gamma$, $\delta \geqq \varkappa$ und $\lambda \geqq \mu + \varkappa$ ergibt sich aus (30)

$$\|f_n\|_{a+\mu+\delta} \leqq 2C^2 a_n^{\max\{a+\mu+\delta-\lambda,\gamma\}} \leqq 2C^2 a_n^{a+\delta-\varkappa}.$$

Weiterhin folgt aus Lemma 4 (ii) wegen $\lambda \geqq \mu + \varkappa$ und $a \geqq \gamma > 0$

$$\|v_n\|_{a+\mu} \leqq \|\bar{u}\|_{a+\mu} + C\, \|S_{a_n}(u_n - \bar{u})\|_{a+\lambda-\varkappa} \leqq \|\bar{u}\|_{a+\mu} + C_3 a_n^{a+\delta-\varkappa}\, \|u_n - \bar{u}\|_{\lambda-\delta}'$$

(man beachte, daß wir diese Abschätzung nicht ohne weitere Voraussetzungen auch für $a = 0$ erhalten; vgl. die Bemerkung nach Lemma 4). Aus (s_1, m) für $m \leqq n - 1$ und Lemma 2 ergibt sich $\|u_n - \bar{u}\|_{\lambda-\delta}' \leqq C_4\, \|\{s_n\}\|_{l_p} \leqq 2C_2C_4\varepsilon(f)$.

Unter Berücksichtigung von (28) und $\lambda \geqq \mu + \varkappa$ erhalten wir also für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$

$$\|v_n\|_{a+\mu} \leqq C^2 A^{\max\{a+\mu-\lambda+\delta,0\}} + a_n^{a+\delta-\varkappa} \leqq 2C^2 a_n^{a+\delta-\varkappa}.$$

Also haben wir wegen der Induktionsvoraussetzung (s_2, n) für $\gamma \leqq a \leqq a_F$

$$\|u_{n+1} - u_n\|_a \leqq 5M_2C^4 s_n a_n^{a+\delta-\lambda} \leqq M_1 s_n a_n^{a+\delta-\lambda}.$$

Nach Lemma 2 ist wieder $\|u_{n+1} - \bar{u}\|'_{\lambda-\delta} \leqq C_4\|\{s_n\}\|_{l_p}$. Wegen $\lambda - \delta \geqq \tau$ gilt daher für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$ auch $u_{n+1} \in V$. Damit ist (s_1, n) gezeigt.

Bevor wir $(s_2, n+1)$ zeigen können, sind einige Vorbetrachtungen nötig. Es gilt

$$\begin{aligned} F_{n+1} = {} & \{F(u_{n+1}, f_{n+1}) - F(u_{n+1}, f_n)\} \\ & + \{F(u_n, f_n) + D_uF(v_n, f_n)(u_{n+1} - u_n)\} \\ & + \{(D_uF(u_n, f_n) - D_uF(v_n, f_n))(u_{n+1} - u_n)\} \\ & + \{F(u_{n+1}, f_n) - F(u_n, f_n) - D_uF(u_n, f_n)(u_{n+1} - u_n)\}. \end{aligned}$$

Die in $\{\ldots\}$ stehenden Ausdrücke seien mit R_1, R_2, R_3, R_4 bezeichnet. Aus der Definition (32) unserer Folge $\{u_n\}$ und der Voraussetzung (iv) ergibt sich sofort

$$R_2 = (1 - S_{a_n}) F_n. \tag{33}$$

Wegen (ii) und $u_n, u_{n+1} \in V \cap X_{a_F}$ können wir $\|R_4\|_a$ für $0 \leqq a \leqq \nu$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes abschätzen:

$$\|R_4\|_a \leqq \sup_{0 \leqq \vartheta \leqq 1} \{\|(D_uF(u_n + \vartheta(u_{n+1} - u_n), f_n) - D_uF(u_n, f_n))(u_{n+1} - u_n)\|_a\}. \tag{34}$$

Aus (s_1, m) mit $m \leqq n$ folgt nun für $0 \leqq a \leqq a_F$

$$\begin{aligned} \|u_n - \bar{u}\|_a, \|u_{n+1} - \bar{u}\|_a & \leqq C \sum_{i=0}^{n} \|u_{i+1} - u_i\|_{\max\{a,\gamma\}} \\ & \leqq M_1 \sup_{0 \leqq m \leqq n} s_m \sum_{i=0}^{n} a_i^{\max\{a,\gamma\}+\delta-\lambda} \leqq C_5 \sup_{m \geqq 0} s_m a_n^{\max\{a-\lambda+\delta,\gamma\}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Wegen $\|v_n\|_a \leqq \|\bar{u}\|_a + C\|u_n - \bar{u}\|_a$ und (28) erhalten wir also für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$

$$\|v_n\|_a, \|u_n\|_a, \|u_{n+1}\|_a \leqq \|\bar{u}\|_a + Ca_n^{\max\{a-\lambda+\delta,\gamma\}} \leqq 2C^2 a_n^{\max\{a-\lambda+\delta,\gamma\}}. \tag{36}$$

Unter Benutzung von (35) ergibt sich ferner für $0 \leqq a \leqq a_F$

$$\|v_n - u_n\|_a = \|(1 - S_{a_n})(u_n - \bar{u})\|_a \leqq Ca_n^{a-a_F}\|u_n - \bar{u}\|_{a_F} \leqq C_6 \sup_{m \geqq 0} s_m a_n^{a-\lambda+\delta}. \tag{37}$$

Berücksichtigen wir nun (30), (36) und (37), dann folgt aus (34) und (25) sofort für $\|R_3\|_a$ und $\|R_4\|_a$ mit $a = 0, \nu$ die Abschätzung

$$\|R_3\|_a, \|R_4\|_a \leqq C_7 s_n \sup_{m \geqq 0} s_m a_n^{\bar{M}(a)+2\delta-2\lambda},$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{M}(a) = \max_{i=1,\ldots,l} \{ & \max\{m_i(a), \gamma\} + \max\{m_i'(a), \gamma\} \\ & + \max\{m_i''(a) - \lambda + \delta, \gamma\} + \max\{m_i'''(a) - \lambda, \gamma\}\}. \end{aligned}$$

sei. Offenbar ist $\overline{M}(a) \leqq M(a) + 4\gamma$ und wegen (26) gilt $\overline{M}(a) + 2\delta - 2\lambda \leqq a - \lambda$ für $a = 0, \nu$. Für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$ erhalten wir daher (man beachte $s_{n+1} \geqq s_n/2$)

$$\|R_3\|_a, \|R_4\|_a \leqq \frac{1}{4} s_{n+1} \overline{M}_3 a_{n+1}^{a-\lambda} \quad \text{für} \quad a = 0, \nu. \tag{38}$$

Schritt 2: *Abschätzung von* $\|F_{n+1}\|_0$ *und* $\|F_{n+1}\|_\nu$. Aus (23) ergibt sich

$$\|R_1\|_0 \leqq C \|\bar{f}_{n+1}\|_0 \leqq C s_{n+1} a_{n+1}^{-\lambda} \leqq \frac{1}{4} M_2 s_{n+1} a_{n+1}^{-\lambda} \tag{39}$$

und aus (23′)

$$\|R_1\|_\nu \leqq C s_{n+1} \{a_{n+1}^{\nu-\lambda} + a_{n+1}^{\alpha-\lambda} (\|u_{n+1}\|_{\nu+\beta} + \|f_n\|_{\nu+\beta+\delta} + \|f_{n+1}\|_{\nu+\beta+\delta})\}.$$

Benutzen wir (30), (36) und beachten $\lambda \geqq \alpha + \beta + \delta$ und $\nu + \beta + \delta - \lambda \geqq \gamma$, so folgt also

$$\|R_1\|_\nu \leqq C s_{n+1} (a_{n+1}^{\nu-\lambda} + 6C^2 a_{n+1}^{\alpha-\lambda} a_{n+1}^{\nu+\beta+\delta-\lambda}) \leqq \frac{1}{4} M_3 s_{n+1} a_{n+1}^{\nu-\lambda}. \tag{40}$$

Schließlich ergibt sich noch aus (33)

$$\|R_2\|_0 \leqq C a_n^{-\nu} \|F_n\|_\nu \leqq C M_3 s_n a_n^{-\lambda} \leqq \frac{1}{4} M_2 s_{n+1} a_{n+1}^{-\lambda} \tag{41}$$

und

$$\|R_2\|_\nu \leqq C \|F_n\|_\nu \leqq C M_3 s_n a_n^{\nu-\lambda} \leqq \frac{1}{4} M_3 s_{n+1} a_{n+1}^{\nu-\lambda}, \tag{42}$$

wobei wir $CM_3\sigma^\lambda \leqq M_2/8$ und $8C \leqq \sigma^{\nu-\lambda}$ (wegen (27)) beachtet haben. Die Abschätzungen (38)—(42) liefern aber nun sofort

$$\|F_{n+1}\|_0 \leqq M_2 s_{n+1} a_{n+1}^{-\lambda} \quad \text{und} \quad \|F_{n+1}\|_\nu \leqq M_3 s_{n+1} a_{n+1}^{\nu-\lambda},$$

d. h. gerade $(s_2, n+1)$.

Aus (s_1, n) ergibt sich, daß die Folge $\{u_n\}$ in X_a für $a < \lambda - \delta$ gegen ein Element $u(f) \in V \cap X'_{\lambda-\delta}$ konvergiert. Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert in Y_a für $a < \lambda$ gegen $f \in W$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $F: (V \cap X_{\lambda'-\delta}) \times (W \cap Y_{\lambda'}) \to Z_0$ für ein $\lambda' < \lambda$ folgt daher $\|F_n - F(u(f), f)\|_0 \to 0$ für $n \to \infty$. Aus (s_2, n) erhalten wir also $F(u(f), f) = 0$.

Wir haben in den Induktionsschritten mehrfach gefordert, daß $\varepsilon(f)$ hinreichend klein sei. Man beachte, daß diese Forderungen stets sowohl von n als auch von A unabhängig waren, $\varepsilon(f)$ also nicht in jedem Schritt erneut verkleinert werden muß ∎

1. Werden die Räume $X_a' = X_{a,p}$ und $Y_a' = Y_{a,p}$ mit einem $p < \infty$ gebildet, dann konvergieren die Folgen $\{u_n\}$ und $\{f_n\}$ auch in der $\|\cdot\|'_{\lambda-\delta}$- bzw. $\|\cdot\|_\lambda'$-Norm gegen $u(f)$ bzw. f. In diesen Fällen genügt es also, wenn F als Abbildung von $(V \cap X'_{\lambda-\delta}) \times (W \cap Y_\lambda')$ nach Z_0 stetig ist. **2.** Es genügt, die Abschätzung (24) für $a = \gamma$ und $a = a_F$ zu kennen. Für die anderen Werte von a kann im Beweis mittels der Konvexitätsabschätzung (22) geschlossen werden.

Zusatz 1: *Gilt* $X'_{\lambda-\delta} \hookrightarrow X_{\lambda-\delta}$ *und* $Y_\lambda' \hookrightarrow Y_\lambda$ *(das ist für* $p = 1$ *stets der Fall!), dann genügt es für die Richtigkeit von Theorem 2 anstelle von* $M(a) < \lambda - 2\delta + a$ *nur* $M(a) \leqq \lambda - 2\delta + a$ *für* $a = 0, \nu$ *zu fordern. (Alle anderen Voraussetzungen bleiben unverändert.)*

Beweis: Wir führen nur die wenigen Änderungen an, die sich gegenüber dem Beweis von Theorem 2 ergeben. Wir setzen jetzt $\gamma = 0$. Wegen $Y_\lambda' \hookrightarrow Y_\lambda$ und Lemma 2 ist $\|f_n - \bar{f}\|_\lambda \leqq C_8 \|f_n - \bar{f}\|_\lambda' \leqq C_9 \|\{l_n\}\|_{l_p} \leqq C_2 C_9 \varepsilon(f)$. Für hinreichend kleines $\varepsilon(f)$ kann damit (30) zu $\|f_n\|_a \leqq 2C^2 a_n^{\max\{a-\lambda, 0\}}$ für $0 \leqq a \leqq a_F + \mu + \delta$ verschärft werden.

Wegen $\|u_n - \bar{u}\|'_{\lambda-\delta} \leqq 2C_2C_4\varepsilon(f)$ und $X'_{\lambda-\delta} \hookrightarrow X_{\lambda-\delta}$ erhalten wir ferner bei genügend kleinem $\varepsilon(f)$

$$\|v_n\|_{a+\mu} \leqq \|\bar{u}\|_{a+\mu} + C^2 a_n^{a+\delta-\varkappa} \|u_n - \bar{u}\|_{\lambda-\delta} \leqq 2C^2 a_n^{a+\delta-\varkappa}$$

für $0 \leqq a \leqq a_F$. Damit können wir (s_1, n) für alle $a \in [0, a_F]$ zeigen. Analog läßt sich auch (36) verschärfen:

$$\|v_n\|_a, \|u_n\|_a, \|u_{n+1}\|_a \leqq 2C^2 a_n^{\max\{a-\lambda+\delta,0\}} \quad \text{für} \quad 0 \leqq a \leqq a_F.$$

Damit ergibt sich dann

$$\|R_3\|_a, \|R_4\|_a \leqq C_7 s_n \sup_{m \geqq 0} s_m a_n^{M(a)+2\delta-2\lambda} \quad \text{für} \quad a = 0, \nu.$$

Nach unserer Voraussetzung ist $M(a) + 2\delta - 2\lambda \leqq a - \lambda$ für $a = 0, \nu$, und wir können Abschätzungen der Form (38) erhalten. Weiter wird wie im Beweis von Theorem 2 geschlossen ∎

1. Benutzt man im Beweis von Theorem 2 die etwas einfachere Iterationsfolge $u_{n+1} = u_n - L(S_{a_n}u_n, f_n)\,(S_{a_n}F(u_n, f_n))$, so genügt es, wenn wir $\bar{u} \in X_{a_F}$ voraussetzen. Jedoch kann damit nicht ohne weiteres auch Zusatz 1 bewiesen werden. 2. Unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen können auch schneller konvergente Verfahren angegeben werden, indem man $a_n = A^{\sigma^n}$ mit $\sigma > 1$ setzt; vgl. [2] in einem Spezialfall. 3. Umgekehrt sind nach einigen Modifikationen auch langsamer konvergente Iterationen möglich, wenn man $a_n \doteq An^\zeta$ mit $\zeta > 0$ setzt. Dann werden die Differenzen $a_{n-1}^{-1} - a_n^{-1}$ bedeutsam, und es ist möglich, den Beitrag des R_4-Terms zu den Abschätzungen beliebig zu verkleinern. Bei unseren Voraussetzungen von Theorem 2 bringt dies keinen Vorteil, jedoch ergeben sich bei allgemeineren Situationen (z. B. $\varkappa > \delta$) Verbesserungen.

Eine Eindeutigkeitsaussage kann ganz analog wie in [5] erhalten werden. Der Vollständigkeit halber sei hier noch ein Ergebnis in dieser Richtung angeführt.

Zusatz 2: *Es gelte* (i), (ii), (iv), (v) *sowie zusätzlich* (vi). *Für alle* $u \in V \cap X_\infty$, $f \in W \cap Y_\infty$ *und* $v \in X_\infty$ *sei* $D_uF(u, f)\, v \in Z_\infty$, $F(u, f) \in Z_\infty$ *und* $L(u, f)\,(D_uF(u, f)\, v) = v$. *Ferner sei* $\lambda > \tau + \delta$, $\nu = \delta$ *und*

$$\lambda \geqq N := \max_{i=1,\ldots,l} \{\mu + \delta, m_i(\delta) + m_i'(\delta) + \delta, m_i''(\delta) + \delta, m_i'''(\delta)\}.$$

Schließlich sei F *für ein* $\lambda' < \lambda$ *eine stetige Abbildung von* $(V \cap X_{\lambda'-\delta}) \times (W \cap Y_{\lambda'})$ *nach* Z_δ. *Dann gibt es ein* $K > 0$, *so daß die Gleichung* $F(u, f) = 0$ *für* $f \in W \cap Y_\lambda$ *mit* $\|f - \bar{f}\|_\lambda \leqq 1$ *höchstens eine Lösung* $u \in Y \cap X_{\lambda-\delta}$ *mit* $\|u - \bar{u}\|_{\lambda-\delta} \leqq K$ *hat.*

Beweis: Angenommen, es seien $u, v \in V \cap X_{\lambda-\delta}$ mit $F(u, f) = F(v, f) = 0$ und $f \in W \cap Y_\lambda$; $\|f - \bar{f}\|_\lambda \leqq 1$, $\|u - \bar{u}\|_{\lambda-\delta} \leqq K$, $\|v - \bar{u}\|_{\lambda-\delta} \leqq K$. Wir setzen nun $u_n = S_{a_n}u$, $v_n = S_{a_n}v$ und $f_n = S_{a_n}f$, wobei $0 \leqq a_n \uparrow +\infty$ in $\mathbf{R}$ ist. Es gilt dann offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_a = \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_a = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{a+\delta} = 0$$

für $0 \leqq a < \lambda - \delta$. Wegen $\lambda > \tau + \delta$ gilt also für hinreichend großes n $u_n, v_n \in V \cap X_\infty$ und $f_n \in W \cap Y_\infty$. Wir können dann $F(u_n, f_n) - F(v_n, f_n) = D_uF(v_n, f_n)\,(u_n - v_n) - R_n$ schreiben und unter Benutzung von (vi) erhalten wir $u_n - v_n = L(v_n, f_n)\,(T_n + R_n)$, wobei zur Abkürzung $T_n = F(u_n, f_n) - F(v_n, f_n)$ gesetzt wurde. Auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaft von F ist $\|T_n\|_\delta \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $\lambda \geqq N$ gilt weiterhin

$$\|u_n\|_{m_i''(\delta)} \leqq C\,\|u\|_{\lambda-\delta}; \ \|v_n\|_\mu, \|v_n\|_{m_i''(\delta)} \leqq C\,\|v\|_{\lambda-\delta}; \ \|f_n\|_{\mu+\delta}, \|f_n\|_{m_i'''(\delta)} \leqq C\,\|f\|_\lambda \tag{43}$$

für $i = 1, \ldots, l$ und $n \geqq 0$. Aus (24) erhalten wir deshalb

$$\|u_n - v_n\|_0 \leqq C(\|R_n\|_\delta + \|T_n\|_\delta). \tag{44}$$

Um nun $\|R_n\|_\delta$ abzuschätzen, benutzen wir wieder den Mittelwertsatz sowie (25) und beachten (43). So ergibt sich

$$\|R_n\|_\delta \leqq C \sum_{i=1}^{l} \|u_n - v_n\|_{m_i(\delta)} \|u_n - v_n\|_{m_i'(\delta)}.$$

Mittels der Konvexitätsabschätzung (22) und wegen $\lambda \geqq N$ folgt

$$\|R_n\|_\delta \leqq C \|u_n - v_n\|_0 \|u_n - v_n\|_{\lambda-\delta} \leqq C' \|u - v\|_0 \|u - v\|_{\lambda-\delta}.$$

Vollziehen wir nun in (44) den Grenzübergang $n \to \infty$, so folgt $\|u - v\|_0 \leqq C \|u - v\|_0 \times \|u - v\|_{\lambda-\delta}$. Für hinreichend kleines K ergibt sich also ein Widerspruch ∎

Gilt $X_{\lambda-\delta} \hookrightarrow X_\tau'$ und $Y_\lambda \hookrightarrow Y'_{\tau+\delta}$ und liegen die linearen Räume X_∞ und Y_∞ dicht in $X_{\lambda-\delta}$ bzw. Y_λ, so kann in Zusatz 2 die Forderung $\lambda > \tau + \delta$ entfallen und $\lambda' = \lambda$ sein. Dann gibt es nämlich Folgen $\{u_n\}, \{v_n\} \subset V \cap X_\infty$ und $\{f_n\} \subset W \cap Y_\infty$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\lambda-\delta} = \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{\lambda-\delta} = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\lambda = 0,$$

und das genügt für das Gelingen des Beweises von Zusatz 2.

LITERATUR

[1] Butzer, P. L., and H. Behrens: Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1967.

[2] Günther, M.: Verallgemeinerte Sätze über implizite Funktionen und Anwendungen auf einige, aus der Geodäsie abgeleitete Problemstellungen. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.

[3] Hamilton, R. S.: The inverse function theorem of Nash and Moser. Preprint. Cornell Univ. 1974.

[4] Hamilton, R. S.: The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 7 (1982), 65—222.

[5] Hörmander, L.: The boundary problems of physical geodesy. Arch. Rat. Mech. Anal. 62 (1976), 1—52.

[6] Hörmander, L.: Implicit function theorems. Lectures at Stanford Univ. Summer Quarter 1977.

[7] Jacobowitz, H.: Implicit function theorems and isometric imbeddings. Ann. of Math. 95 (1972), 191—225.

[8] Kiremidjian, G. K.: A Nash-Moser type implicit function theorem and nonlinear boundary value problems. Pacific J. Math. 74 (1977), 105—132.

[9] Moser, J.: A new technique for the construction of solutions of nonlinear equations. Proc. Nat. Acad. Sci. 47 (1961), 1824—1831.

[10] Moser, J.: A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I, II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 265—315 and 499—535.

[11] Nash, J.: The imbedding problem for Riemann manifolds. Ann. of Math. 63 (1956), 20—63.

[12] Schwartz, J.: On Nash's implicit function theorem. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 509—530.

[13] Sergeraert, F.: Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4e Serie) 5 (1972), 599—660.

[14] TRIEBEL, H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Berlin: Dt. Verlag Wiss./Amsterdam—New York—Oxford: North Holland Publ. Comp. 1978.
[15] ZEHNDER, E.: Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I. Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 91—140.
[16] ZEHNDER, E.: Moser's implicit function theorem in the framework of analytic smoothing. Math. Ann. 219 (1976), 105—121.

Manuskripteingang: 03. 09. 1984

VERFASSER:

Dr. MATTHIAS GÜNTHER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10