Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (6) 1986, S. 555–561

# Invarianzeigenschaften bei Variationsproblemen mit nichtdifferenzierbaren Integranden

W. THÄMELT

Es wird ein neuer Beweis für von Rvačev bewiesene Invarianzsätze für Variationsprobleme mit nichtdifferenzierbaren, aber bestimmten Konvexitätsforderungen genügenden Integranden angegeben. Dieser Beweis ermöglicht es, die Resultate von Rvačev auf den mehrdimensionalen Fall auszudehnen. Verallgemeinerungen erfassen den physikalisch interessanten Fall, wo die Invarianzeigenschaft des Integranden erst unter Einschluß bestimmter Divergenzausdrücke zu sichern ist bzw. wo die Konvexität nur für einen Teil der Argumente vorliegt.

Приводится новое доказательство теоремы инвариантности для вариационных задач с негладкими, но выпуклыми интеграндами, раннее доказанной Рвачевым. Это доказательство дает возможность применять результаты Рвачева и в многомерном случае. Обсуждается физически интересный случай, где инвариантность интегранда получается только с помощью некоторого дополнительного терма типа дивергенции и также случай, где интегранд есть выпуклая функция только для части переменных.

A new proof of Rvačev's invariance theorem for variational problems with nonsmooth but convex Lagrangians is given. This proof is valid even for the multidimensional case. The results are extended to the physically interesting case where the invariance of the Lagrangian can only be obtained with the help of some divergence terms and to the case where the Lagrangian is merely convex for some part of the variables.

0. In einer Serie von Arbeiten [4–6] (s. auch [1, 8]) hat RVAČEV Variationsprobleme mit nichtdifferenzierbaren Integranden untersucht und mit Hilfsmitteln der konvexen Analysis gezeigt, daß beim Vorhandensein bestimmter Konvexitätseigenschaften Invarianzsätze vom Noetherschen Typ im eindimensionalen Fall gelten. Im Beweis werden dabei einige Schlüsse benutzt, die nicht ohne weiteres auf den mehrdimensionalen Fall übertragbar sind. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen neuen Beweis für diese Invarianzsätze anzugeben, der auch den mehrdimensionalen Fall erfaßt. Entscheidendes Hilfsmittel hierfür ist die Anwendung des folgenden Satzes von IOFFE und LEVIN [2] (zitiert nach [9]) über die Vertauschung von Subdifferential und Integral.

Satz: *Es sei $W$ ein separabler Banachraum, $(X, S, m)$ ein positiver Maßraum, $G \subset W$ eine offene konvexe Teilmenge, $w_0 \in G$, $f: X \times W \mapsto \mathbf{R}^1$ konvex bez. des 2. Argumentes auf $G$, stetig bez. des 2. Argumentes in $w_0$ für alle $x \in X$ und integrierbar bez. des 1. Argumentes für alle $w \in G$. Mit*

$$F(w) := \int_X f(x, w)\, dm(x)$$

*gilt dann für das Subdifferential von $F$ an der Stelle $w_0$*

$$\partial F(w_0) = \int_X \partial_w f(x, w_0)\, dm(x),$$

*wobei $\partial_w f(x, w_0)$ das Subdifferential der Funktion $f(x, \cdot)$ an der Stelle $w_0$ bezeichnet.*

1. In diesem Abschnitt werden die im folgenden erforderlichen Räume und Abbildungen eingeführt. Es sei

| | |
|---|---|
| $X \subset \mathbf{R}^k$ | ein beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial X$ aus endlich vielen stückweise glatten $(k-1)$-dimensionalen Hyperflächen besteht; |
| $M$ | eine $n$-dimensionale $\mathbf{C}^r$-Mannigfaltigkeit $(r \geqq 1)$; |
| $T_m M$ | der Tangentialraum an $M$ im Punkte $m \in M$; |
| $J(X, M)$ | der $\mathbf{C}^{r-1}$-Mannigfaltigkeit der Ströme aus $X$ in $M$, d. h. der Äquivalenzklassen von Abbildungen $u \in C^1(X, M)$, die in $x \in X$ gleiche Funktionswerte und gleiche 1. Ableitungen haben; |
| $(W, \|\cdot\|)$ | der Banachraum aller stetig differenzierbaren Abbildungen von $X$ in $\mathbf{R}^1$, die auf $\partial X$ verschwinden, mit $\|w\| = \sup_{x \in X} \|w(x)\| + \sup_{x \in X} \|w'(x)\|$ für $w \in W$; |
| $h: M \times \mathbf{R} \mapsto M$ | eine einparametrige Transformationsgruppe in $M$ mit $h \in C^1(M \times \mathbf{R}, M)$, $h(\cdot, r)$ bijektiv für alle $r \in \mathbf{R}$, $h(\cdot, 0) = Id_M$ und $h\big(h(m, r_1) r_2\big) = h(m, r_1 + r_2)$; |
| $j_u$ | die stetige Abbildung von $X$ in $J(X, M)$, die für ein $u \in C^1(X, M)$ jedem $x \in X$ den in $x$ beginnenden zu $u$ gehörigen Strom $j_u(x) \in J(X, M)$ zuordnet ($j_u(x)$ wird in der Form $j_u(x) = \big(x, u(x), Du(x)\big)$ dargestellt, in der $Du(x)$ die 1. Ableitung von $u$ an der Stelle $x$ bezeichnet); |
| $L: J(X, M) \mapsto \mathbf{R}$ | eine stetige Abbildung; |
| $k_u(x, w) = \big(x, u(x), Du(x) + D_2 h\big(u(x), 0\big) \circ Dw(x)\big)$ | für jedes $u \in \mathbf{C}^1(X, M)$ eine Abbildung von $X \times W$ in $J(X, M)$ ($D_2 h\big(u(x), 0\big)$ bezeichnet die 1. Ableitung der Funktion $h\big(u(x), \cdot\big)$ an der Stelle 0, analog wird $D_1 h(m, r)$ benutzt; $k_u$ ist stetig). |

Es wird vereinbart, Elemente endlichdimensionaler Vektorräume durch Spaltenvektoren und lineare Abbildungen endlichdimensionaler Vektorräume (und damit 1. Ableitungen) durch die zugehörigen Matrizen anzugeben.

2. Gegenstand der weiteren Ausführungen ist das mehrdimensionale Variationsproblem

$$\inf_{u \in U} \int_X L\big(x, u(x), D(u(x))\big)\, dx, \tag{1}$$

wobei $U$ die Menge aller Abbildungen $u \in C^1(X, M)$ mit $u(x) = u_0(x)$ auf $\partial X$ für ein gegebenes $u_0$ ist. Da $L$ nicht als differenzierbar vorausgesetzt wurde, kann dieses Problem nicht mit Mitteln der klassischen Variationstheorie behandelt werden. Unter Benutzung der eingeführten Abbildungen kann man (1) in der Form

$$\inf_{u \in U} I(u) \quad \text{mit} \quad I(u) := \int_X (L \circ j_u)(x)\, dx \tag{1'}$$

schreiben.

Definition 1: $L$ heißt *invariant bez. der einparametrigen Transformationsgruppe* $h$, falls für alle $u \in U$ und $r \in \mathbf{R}$ gilt

$$L \circ j_{h(\cdot, r) \circ u} = L \circ j_u, \tag{2}$$

bzw. in expliziter Form, falls für alle $x \in X$ gilt

$$L\big(x, h(u(x), r), D_1 h(u(x)\, r), Du(x)\big) = L\big(x, u(x), Du(x)\big).$$

Lemma 1: *Es gilt:*

1. *Ist $u \in U$, so ist für jedes $w \in W$ auch $h \circ (u, w) \in U$.*
2. *Für alle $w \in W$ und $u \in C^1(X, M)$ ist*

$$j_{h\circ(u,w)}(x) = \big(x, h(u(x), w(x)), D_1 h(u(x), w(x)) \circ [Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\big).$$

Beweis: 1. Offenbar ist $h \circ (u, w) \in C^1(X, M)$, und für $x \in X$ gilt $\big(h \circ (u, w)\big)(x) = h\big(u(x), w(x)\big) = h\big(u(x), 0\big) = u(x) = u_0(x)$.

2. Aus der Gruppeneigenschaft von $h$ folgt für festes $x \in X$ und beliebige $y \in X$

$$\big(h \circ (u, w)\big)(y) = h\big(u(y), w(y)\big) = h\big(h(u(y), w(y) - w(x)), w(x)\big) = \big[h\big(\cdot, w(x)\big) \circ h \circ \big(u, w - w(x)\big)\big](y).$$

Unter Benutzung der Kettenregel erhält man daraus

$$j_{h\circ(u,w)}(x) = \big(x, h\big(u(x), w(x)\big), D_1 h\big(h(u(x), 0), w(x)\big) \circ [D_1 h(u(x), 0)\, Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\big).$$

$h(\cdot, 0)$ ist die identische Abbildung in $M$, damit ist $D_1 h\big(u(x), 0\big)$ die identische Abbildung in $T_{u(x)}M$, und man erhält weiter

$$j_{h\circ(u,w)}(x) = \big(x, h(u(x), w(x)), D_1 h(u(x), w(x)) \circ [Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\big) \blacksquare$$

Lemma 2: *Ist $L$ invariant bez. $h$, so gilt*

$$(L \circ j_{h\circ(u,w)})(x) = (L \circ k_u)(x, w) \qquad \big(w \in W, u \in C^1(X, M)\big).$$

Beweis: Aus Lemma 1, der Invarianz von $L$ sowie der Definition von $k_u$ folgt sofort

$$\begin{aligned}
&(L \circ j_{h\circ(u,w)})(x)\\
&= L\big(x, h(u(x), w(x)), D_1 h(u(x), w(x)) \circ [Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\big)\\
&= L\big(x, u(x), Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)\big) = (L \circ k_u)(x, w).
\end{aligned}$$

(Im vorletzten Ausdruck steht als Argument ein Strom, der mit $j_u(x)$ Anfang und Ende gemeinsam, aber eine andere Richtung (d. h. ein anderes 3. Argument) hat. Hierauf wird die Abbildung $h(\cdot, r)$ mit $r = w(x)$ angewendet.) $\blacksquare$

3. Für festes $u \in U$ sei $F(w) := I\big(h \circ (u, w)\big)$ der Integralwert von (1′) für die zulässige Vergleichsfunktion $h \circ (u, w) \in U$ in Abhängigkeit von $w \in W$. Aus Lemma 2 folgt dann unmittelbar

Lemma 3: *Ist $L$ invariant bez. $h$, so gilt*

$$F(w) = \int_X (L \circ k_u)(x, w)\, dx.$$

*Ist $u$ eine optimale Lösung für (1), so muß $F(w) \geqq F(0)$ $(w \in W)$ sein.*

Hieraus erhält man das folgende notwendige Optimalitätskriterium.

Satz 1: *Es sei $L$ invariant bez. $h$, $(L \circ k_u)(x, \cdot)$ konvex für alle $x \in X$ und $u \in U$ optimal für* (1). *Dann gilt*

$$0 \in \int_X \partial_w(L \circ k_u)(x, 0)\, dx. \tag{3}$$

Beweis: Aus der Konvexität von $(L \circ k_u)(x, \cdot)$ folgt diejenige von $F$. Wie in Lemma 3 erwähnt, gilt $F(w) \geqq F(0)$ für $w \in W$. Das ist aber für invariantes $L$ genau dann der Fall, wenn

$$0 \in \partial F(0) = \partial \int_X (L \circ k_u)(x, 0)\, dx$$

ist. Wählt man $G = W$, $w_0 = 0$ und $f = L \circ k_u$, so sind alle Voraussetzungen des am Anfang genannten Satzes von Ioffe und Levin erfüllt, und man erhält (3) ∎

Ist die Abbildung $L$ konvex bez. des 3. Argumentes (d. h. ist $L$ konvex auf dem linearen Raume der Ströme mit festem aber beliebigem Anfangs- und Endpunkt), so ist offenbar $(L \circ k_u)(x, \cdot)$ konvex. Auf das Subdifferential dieser Funktion kann die Kettenregel für Subdifferentiale angewendet werden. Bezeichnet $\partial L_{x,u}(Du(x))$ das Subdifferential der konvexen Funktion $v \mapsto L(x, u(x), v)$ an der Stelle $Du(x)$, so erhält man aus der Linearität von $k_u$ in $w$ im Ergebnis einer einfachen Rechnung

Satz 2: *Es sei $L$ invariant bez. $h$ und konvex bez. des 3. Argumentes, und $u \in U$ sei optimal für* (1). *Dann läßt sich für jedes $x \in X$ eine $(n, k)$-Matrix $l(x) \in \partial L_{x,u}(Du(x))$ finden, so daß gilt*

$$0 = \int_X Dw(x)\, l^{\mathrm{T}}(x)\, D_2h(u(x), 0)\, dx \qquad (w \in W). \tag{4}$$

Im klassischen Fall ist $L$ ausreichend oft stetig differenzierbar. Deshalb kann (4) partiell integriert werden, und man erhält sofort den Noetherschen Invariantensatz. Im vorliegenden Fall ist die partielle Integration nicht möglich. Zur weiteren Auswertung wird der folgende Hilfssatz herangezogen.

Hilfssatz: *Es sei $f(x) \in \mathbf{R}^k$ für alle $x \in X$. Aus*

$$0 = \int_X Dw(x)\, f(x)\, dx \quad \text{für alle } w \in W$$

*folgt dann*

$$\int_G f(x)\, \overrightarrow{dF} = 0 \quad \text{für f.a. Kugeln } G \subset X.$$

Aus Satz 2 erhält man mittels dieses Hilfssatzes

Satz 3: *Es sei $L$ invariant bez. $h$ und konvex bez. des 3. Argumentes, und $u \in U$ sei optimal für* (1). *Dann läßt sich für jedes $x \in X$ ein $l(x) \in \partial L_{x,u}(Du(x))$ finden mit*

$$\int_{\partial G} l^{\mathrm{T}}(x)\, D_2h(u(x), 0)\, \overrightarrow{dF} = 0 \quad \text{für f.a. Kugeln } G \subset X. \tag{5}$$

Ist $k = 1$, so folgt aus (5) $l^{\mathrm{T}}(x)\, D_2h(u(x), 0) = \text{const}$ f. ü. Das ist gerade die von RVAČEV [6] angegebene Erweiterung des Noetherschen Invariantensatzes. Ist $l^{\mathrm{T}}(x)\, D_2h(u(x), 0)$ stetig differenzierbar in $x$, so ist die oben erwähnte partielle Integration mittels der Greenschen Formel möglich, und man erhält aus (5) die Aussage des klassischen Noetherschen Invariantensatzes $\operatorname{div}(l^{\mathrm{T}}(x)\, D_2h(u(x), 0)) = 0$ (vgl. z. B. [3, 7]). Damit wird sichtbar, daß Satz 3 ein Invariantensatz vom Noetherschen Typ für mehrdimensionale Variationsprobleme mit nichtdifferenzierbaren, aber bestimmten Konvexitätsforderungen genügenden Integranden ist.

4. Es werden jetzt einige Verallgemeinerungen der im vorherigen Abschnitt dargestellten Ergebnisse diskutiert. Für physikalische Anwendungen ist häufig der in Definition 1 angegebene Invarianzbegriff zu eng (vgl. z. B. [3, 7]), und es bietet sich hier die folgende Erweiterung an.

Definition 2: Es seien $H, K: X \times M \mapsto X$ stetig differenzierbare Abbildungen. $L$ heißt $(H, K)$-*invariant bez. der einparametrigen Transformationsgruppe* $h$, falls

1. $\int\limits_{\partial X} H(x, u_0(x))\, dx = 0$ ist und

2. für alle $u \in U$, $x \in X$ und $r \in \mathbf{R}$ gilt

$$L(x, h(u(x), r), D_1 h(u(x), r)\, Du(x)) + \operatorname{div} K(x, h(u(x), r))$$
$$= L(x, u(x), Du(x)) + \operatorname{div} K(x, u(x)) + \operatorname{div} H(x, u(x)).$$

Es ist $\operatorname{div} K(x, u(x)) = \operatorname{tr} (D_1 K(x, u(x)) + D_2 K(x, u(x))\, Du(x))$, wobei $\operatorname{tr} A$ die Spur der quadratischen Matrix $A$ bezeichnet. Damit hängt dieser Divergenzausdruck von dem Strom $j_u(x)$ und nicht nur von dessen Anfangs- und Endpunkt ab.

Lemma 4: *Es gilt:*

1. *Ist* $L$ $(0, K)$-*invariant bez.* $h$, *so ist* $L + \operatorname{div} K$ *invariant bez.* $h$ *gemäß Definition* 1. *Ist* $L$ *invariant bez.* $h$, *so ist* $L$ *auch* $(0, 0)$-*invariant.*

2. $\int\limits_X \operatorname{div} K(x, u(x))\, dx = k_0 = const$ *für alle* $u \in U$.

3. *Ist* $L$ $(H, K)$-*invariant bez.* $h$, *so gilt für beliebige* $u \in U$ *und* $w \in W$

$$F(w) = \int\limits_X ((L \circ k_u)(x, w) + (Dw)(x)\, D_2 K(x, u(x))\, D_2 h(u(x), 0))\, dx.$$

Aussage 2 dieses Lemmas bedeutet, daß sich die Integralwerte der Variationsaufgaben mit den Integranden $L$ und $L + \operatorname{div} K$ nur um eine Konstante unterscheiden. Die Eulerschen Gleichungen für beide Aufgaben sind für den klassischen differenzierbaren Fall gleich (vgl. [3]). Trotzdem unterscheiden sich auf der Grundlage der Aussage 3 des Lemmas die abzuleitenden Invarianzsätze.

Beweis: Aussage 1 folgt direkt aus den Definitionen 1 und 2. Die Voraussetzungen bez. $X$, $K$ und $U$ sichern die Anwendbarkeit des Gaußschen Satzes, aus dem man folgende Beziehung erhält:

$$\int\limits_X \operatorname{div} K(x, u(x))\, dx = \int\limits_{\partial X} K(x, u(x))\, \overrightarrow{dF} = \int\limits_{\partial X} K(x, u_0(x))\, \overrightarrow{dF} = k_0$$

für beliebiges $u \in U$. Damit ist Aussage 2 nachgewiesen.

Aus der $(H, K)$-Invarianz von $L$ folgt unter Benutzung der gerade bewiesenen Aussage 2 und von Lemma 1 für beliebige $u \in U$ und $w \in W$,

$$F(w) + k_0 = I(h \circ (u, w)) + \int\limits_X \operatorname{div} K(x, h(u(x), w(x)))\, dx$$
$$= \int\limits_X L(x, h(u(x), w(x)), D_1 h(u(x), w(x)))\, [Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\, dx$$
$$+ \int\limits_X (\operatorname{tr} D_1 K(x, h(u(x), w(x))) + \operatorname{tr} (D_2 K(x, h(u(x), w(x)))\, D_1 h(u(x), w(x))$$
$$\times [Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]))\, dx$$

$$= \int_X \Big(L \circ k_u(x, w) + \operatorname{tr} D_1 K\big(x, u(x)\big)$$

$$+ \operatorname{tr}\big(D_2 K(x, u(x))\,[Du(x) + D_2 h(u(x), 0)\, Dw(x)]\big) + \operatorname{div} H(x, u(x))\Big)\, dx$$

$$= \int_X \Big(L \circ k_u(x, w) + \operatorname{div}\big(K(x, u(x)) + H(x, u(x))\big)$$

$$+ \operatorname{tr} D_2 K\big(x, u(x)\big)\, D_2 h\big(u(x), 0\big)\, Dw(x)\Big)\, dx$$

$$= \int_X \big(L \circ k_u(x, w) + (Dw)(x)\, D_2 K(x, u(x))\, D_2 h(u(x), 0)\big)\, dx + k_0 .$$

(Analog zum Beweis von Lemma 2 wird hier die $(H, K)$-Invarianz von $L$ für den Strom $k_u(x, w)$ und für $r = w(x)$ betrachtet.) ∎

Aus Lemma 4 ergibt sich folgende Erweiterung der Sätze 2 und 3.

Satz 4: *Es sei $L$ $(H, K)$-invariant bez. $h$ und konvex bez. des 3. Argumentes, und $u \in U$ sei optimal für (1). Dann läßt sich für jedes $x \in X$ ein $l(x) \in \partial L_{x,u}\big(Du(x)\big)$ finden mit*

$$0 = \int_X Dw(x)\big(l^{\mathrm{T}}(x) + D_2 K(x, u(x))\big)\, D_2 h\big(u(x), 0\big)\, dx \qquad (w \in W).$$

*Hierfür ist notwendig, daß für f.a. Kugeln $G \subset X$ gilt*

$$\int_{\partial G} \big(l^{\mathrm{T}}(x) + D_2 K(x, u(x))\big)\, D_2 h\big(u(x), 0\big)\, \overrightarrow{dF} = 0 .$$

Aus Satz 4 ist zu erkennen, daß beim Vorliegen der $(H, 0)$-Invarianz die Aussagen der Sätze 2, 3 und des Satzes 4 gleich sind.

Als nächstes soll folgendes allgemeinere Variationsproblem betrachtet werden. Es sei $\mathbf{R}^{k_1} \times \mathbf{R}^{k_2} = \mathbf{R}^k$ und $X^1 \times X^2 = X$ mit $X^1 \subset \mathbf{R}^{k_1}$ und $X^2 \subset \mathbf{R}^{k_2}$. Zu finden ist

$$\inf_{u \in U^1} \int_X (L \circ j_u)(x)\, dx \tag{6}$$

mit

$$U^1 = \{u \in C^1(X, M) \mid u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in \partial X^1 \times X^2\}.$$

(Ist $X^2 = \{0\}$, so erhält man aus dieser Variationsaufgabe die Aufgabe (1).) Für ein $u \in U^1$ gilt dann

$$Du(x) = Du(x^1, x^2) = \big(D_1 u(x^1, x^2), D_2 u(x^1, x^2)\big),$$

wobei mit $D_1 u(x^1, x^2)$ die Ableitung der Abbildung $u(\cdot, x^2) : X^1 \mapsto M$ an der Stelle $x^1 \in X^1$ für festes $x^2 \in X^2$ bezeichnet ist. $L$ wird *konvex bez.* $D_1 u$ genannt, falls die Abbildung

$$L_{x,u,1} : v \mapsto L\big(x, u(x), (v, D_2 u(x^1, x^2))\big)$$

für alle $x \in X$ und $u \in U^1$ konvex ist. Zur Herleitung von zu Satz 2 und 3 analogen Aussagen wird ein $u \in U^1$ mit einer „gestörten" Funktion $h\big(u(x), w(x)\big)$ verglichen, wobei

$$w \in W^1 = \{w \in C^1(X, \mathbf{R}) \mid w(x^1, x^2) = w^1(x^1),\ w^1(x^1) = 0 \text{ für } x^1 \in \partial X^1\}$$

ist. Man erhält dann durch eine analoge Herleitung

Satz 5: *Es sei L invariant bez. h und konvex bez.* $D_1u$, *und* $u \in U^1$ *sei optimal für* (6). *Dann läßt sich für jedes* $x \in X$ *ein* $l(x) \in \partial L_{x,u,1}(D_1u(x^1, x^2))$ *finden mit*

$$0 = \int_X Dw^1(x^1)\, l^T(x)\, D_2h(u(x), 0)\, dx \qquad (w \in W^1).$$

*Hierfür ist notwendig, daß für f.a. Kugeln* $G^1 \subset X^1$ *gilt*

$$\int_{\partial G^1} \left( \int_{X^2} l^T(x^1, x^2)\, D_2h(u(x^1, x^2), 0)\, dx^2 \right) \overrightarrow{dF} = 0.$$

## LITERATUR

[1] ALEXEEV, V., TIKHOMIROV, V., et S. FOMINE: Commande optimale. Moskau: Editions Mir 1982.
[2] Иоффе, А. Д., и В. Л. Левин: Субдифференциалы выпуклых функций. Труды Моск. Мат. Общ. 26 (1972), 3–73.
[3] Овсянников, Л. В.: Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Наука 1978.
[4] Рвачев, М. А.: О решении некоторых задач монжевского типа. Докл. Акад. Наук СССР 219 (1974), 46–48.
[5] Рвачев, М. А.: Об одной задаче уламовского типа. Функц. анал. прил. 11 (1977), 58–66.
[6] Рвачев, М. А.: Теорема Нетер для задач с негладкими интегрантами. Кибернетика 6 (1974), 116–120.
[7] SCHMUTZER, E.: Symmetrien und Erhaltungssätze der Physik. Berlin: Akademie-Verlag 1979.
[8] TICHOMIROV, V. M.: Grundprinzipien der Theorie der Extremalaufgaben (Teubner-Texte zur Mathematik: Band 30). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1982.
[9] Zentralblatt für Mathematik 257. 46042

Manuskripteingang: 25. 10. 1984; in revidierter Fassung 16. 09. 1985

## VERFASSER:

Prof. Dr. WOLFGANG THÄMELT
Sektion Mathematik
der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna—Merseburg
DDR-4200 Merseburg, Otto-Nuschke-Str.

## Buchbesprechung

S. NOVIKOV, S. V. MANAKOV, L. P. PITAEVSKII and V. E. ZAKHAROV: **Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method** (Contemporary Soviet Mathematics). New York and London: Consultants Bureau 1984, XI + 276 p.

Nonlinear partial differential equations (PDEs) with "*solitonic*" properties, namely the Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx},$$

the nonlinear Schrödinger (NLS) equation

$$ir_t + r_{xx} \pm 2\,|r|^2\, r = 0,$$