Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (6) 1986, S. 563–573

Extremalprobleme quasikonformer Abbildungen der Ebene als Steuerungsprobleme

B. Dittmar

Es wird eine neue Methode zur Lösung von Extremalproblemen quasikonformer Abbildungen vorgestellt. Das Extremalproblem wird als Steuerungsproblem interpretiert. Notwendige Bedingungen werden bewiesen und ausgewertet.

Представляется новый метод для решения экстремальных задач теории квазиконформных отображений. Экстремальная задача интерпретируется как задача оптимального управления. Доказываются и анализируются необходимые условия.

A new method for solving extremal problems of quasiconformal mappings is presented. The extremal problem is interpreted as a control problem. Necessary conditions are proved and analysed.

1. Einleitung

Es soll hier ein völlig neuer Zugang zur Lösung von Extremalproblemen quasikonformer Abbildungen in der Ebene gezeigt werden, und zwar wird den „rein funktionentheoretischen" Variationsmethoden von P. P. Belinskij [1], S. L. Kruškal' [6], M. Schiffer [14, 17] und H. Renelt [9] (ein Überblick über den gegenwärtigen Stand entsprechender Methoden findet sich in [7: S. 87ff.) eine auf der Theorie der optimalen Steuerung, in der von L. v. Wolfersdorf und M. Goebel [4, 18] vorgenommenen Erweiterung auf noethersche Operatoren fußende neue Methode hinzugefügt.

Wir betrachten quasikonforme Abbildungen w eines nicht notwendig endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes $D \ni \infty$, d. h., orientierungserhaltende Homöomorphismen von D, deren partielle komplexe Ableitungen $w_z = 2^{-1}(w_x - iw_y)$ und $w_{\bar z} = 2^{-1}(w_x + iw_y)$ fast überall in D existieren und für die die Beltramigleichung

$$w_{\bar z} = \mu(z)\, w_z \quad \text{in } D \tag{1}$$

gilt. Dabei sei $\mu \in L_\infty(D)$, $\|\mu\|_{L_\infty(D)} \leqq k < 1$ und $\mu(z) = 0$ in einer gewissen von μ unabhängigen festen Umgebung von ∞, in der w zur Gewährleistung der eindeutigen Bestimmtheit zu vorgegebenem μ etwa durch

$$w(z) = z + a_1 z^{-1} + \dots \tag{2}$$

hydrodynamisch normiert sei. Das Problem besteht nun in der Charakterisierung derjenigen quasikonformen Abbildungen, die ein reellwertiges und in der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz in D wenigstens oberhalbstetiges Funktional auf gewissen in dieser Topologie kompakten Abbildungsklassen maximieren. Die Existenz mindestens einer Extremalfunktion wird also im folgenden immer vorausgesetzt, und wir konzentrieren uns auf die Herleitung und Auswertung notwendiger Bedingungen (man denke hierbei etwa an das einfachste Beispiel, $\operatorname{Re} a_1$ zu maximieren in der Klasse aller $p_0(z)$-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes D (wenn a_1 der erste Koeffizient in (2) ist); zahlreiche weitere Beispiele derartiger Extremalprobleme finden sich unter anderem in [6, 7, 9, 14]). Da das Verhalten der Extremalabbildungen auf dem Rande bereits durch konforme Randvariationen erhalten wird, verbleibt nur noch eine Charakterisierung dieser Abbildungen im Inneren des Gebietes. Dazu kann man sich für Lösungen von (1) auf quasikonforme Abbildungen der Vollebene $\mathbf{C}$ beschränken. Diese Abbildungen der Vollebene mit hydrodynamischer Normierung im Unendlichen können mittels der Hilberttransformierten in bekannter Weise durch eine zweidimensionale singuläre Integralgleichung beschrieben werden, die als Zustandsgleichung unseres Steuerungsproblems fungiert. Es wird mit der komplexen Charakteristik μ über einer gewissen in L_∞ abgeschlossenen konvexen und von der jeweiligen Abbildungsklasse abhängigen Menge V gesteuert.

Nachdem einige Hilfsmittel zusammengestellt sind, werden zunächst Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen behandelt. Darunter werden hier Extremalprobleme verstanden, bei denen die Abbildungen durch (1) und keine weiteren Bedingungen definiert sind, etwa die Maximierung von $\operatorname{Re} a_1$ auf der oben beschriebenen Abbildungsklasse. Die mit der Theorie der optimalen Steuerung erhaltenen notwendigen Bedingungen können in Form eines Bang-Bang-Prinzips (Satz 1) für eine große Klasse von Funktionalen ausgewertet werden und liefern die bekannte Charakterisierung der Extremalfunktionen [7]. Werden zur Beltramigleichung (1) noch endlich viele Nebenbedingungen hinzugefügt, die etwa die Funktionswerte oder die Ableitungen in gewissen Punkten fixieren, so spricht man von Extremalproblemen unter höherer Normierung. Dies kann völlig analog behandelt werden, was im Abschnitt 4 erfolgt.

Bei der hier demonstrierten Vorgehensweise bieten sich unmittelbar einige Verallgemeinerungen an, die im Abschnitt 5 vorgenommen werden. So können durch Einführung von Schlupfvariablen auch Extremalprobleme behandelt werden, bei denen beispielsweise die Funktionswerte der Abbildungen nicht wie bei höherer Normierung in gewissen (endlich vielen) Punkten fixiert sind, sondern in vorgegebenen konvexen abgeschlossenen Mengen variieren. Auch kann die zunächst im Abschnitt 3 und 4 betrachtete spezielle konvexe Menge V ersetzt werden durch eine beliebige konvexe und in L_∞ abgeschlossene Menge V mit nichtleerem Inneren, deren zugehörige Abbildungsklasse in der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz kompakt ist. Dies führt zu Extremalproblemen, wie sie von M. SCHIFFER und G. SCHOBER [15, 16] erstmalig auf andere Weise behandelt wurden.

Die Idee, Extremalprobleme quasikonformer Abbildungen als Steuerungsprobleme aufzufassen, wobei mit der komplexen Charakteristik μ gesteuert wird, stammt von R. KÜHNAU. Von ihm wurden mir Ratschläge und Hinweise bei der Erstellung dieser Arbeit zuteil, wofür ich herzlich danken möchte. Mein Dank gilt auch L. v. WOLFERSDORF für mehrere Diskussionen über diesen Gegenstand.

2. Hilfsmittel

Wesentliches Hilfsmittel sind die zwei folgenden singulären Integraloperatoren:

Die Hilberttransformierte

$$\mathbf{T}h(z) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\sigma_\zeta \tag{3}$$

($h \in L_p(\mathbf{C})$; das Integrationsgebiet ist hier und im folgenden — wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt wird — die Vollebene $\mathbf{C}$), die bekanntlich ein linearer und stetiger Operator von $L_p(\mathbf{C})$, $p > 1$, in sich ist und deren Norm eine stetige konvexe Funktion von p mit $\|T\|_{L_2(\mathbf{C})} = 1$ ist.

Das Integral mit Cauchysingularität

$$\mathbf{P}h(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} \, d\sigma_\zeta . \tag{4}$$

Dieser $\mathbf{P}$-Operator bildet $L_p(G)$ in den Sobolevraum $W_{1,p}(G)$ ab, falls G endliches Maß hat. Für die Sobolevableitungen gilt [11]

$$(\mathbf{P}h)_z = \mathbf{T}h(z) \quad \text{und} \quad (\mathbf{P}h)_{\bar z} = h(z). \tag{5}$$

Später wird der folgende Satz über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bei singulären Integralen häufig benutzt.

Hilfssatz 1 [11: S. 27]: *Es sei $\Omega \subseteqq \mathbf{C}$ eine beliebige meßbare Menge und*

$$\mathbf{T}_\Omega g = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\sigma_\zeta .$$

Dann gilt

$$\iint_\Omega f \mathbf{T}_\Omega g \, d\sigma_z = \iint_\Omega g \mathbf{T}_\Omega f \, d\sigma_\zeta$$

für beliebige $g \in L_p(\Omega)$ und $f \in L_q(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\, p, q > 1\right)$.

3. Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen

Wie oben schon angedeutet, können die hier zu behandelnden Extremalprobleme gleich in der Vollebene $\mathbf{C}$ betrachtet werden, und zwar folgendermaßen: Beschränkt man sich auf sogenannte reguläre Funktionale [14, 9], so ist das Bildgebiet der Extremalfunktionen ein Schlitzgebiet, mit den vom konformen Fall her bekannten Schlitzen, denn andernfalls bringen bereits konforme Randvariationen einen Widerspruch zur Extremalität. Durch Beschränkung auf quasikonforme Abbildungen der Vollebene zeigt sich nun, daß das Verhalten im Inneren des Gebietes durch das gleiche quadratische Differential beschrieben wird, da andernfalls durch quasikonforme Abbildungen der Vollebene ein Widerspruch zur Extremalität der Abbildungsfunktionen folgen würde. Also kann man sich zur Feststellung des Verhaltens der Extremalfunktionen im Inneren des Gebietes D auf quasikonforme Abbildungen der ursprünglichen Vollebene beschränken.

Somit werden in der Vollebene $\mathbf{C}$ alle quasikonformen Abbildungen betrachtet, die f. ü. (1) mit einem

$$\mu \in V \equiv \{\mu \in L_\infty : |\mu(z)| \leqq K(z) \leqq k < 1 \text{ f. ü.}\} \tag{6}$$

genügen, wobei $K \in L_\infty$ mit kompaktem Träger ist. Weiterhin sei generell $p > 2$ fest so gewählt, daß $\|\mathbf{T}\|_{L_p} k < 1$ gilt. Wir werden von allen betrachteten Abbildungen in einer Umgebung von ∞ die Normierung (2) fordern. Unter diesen Voraussetzungen ist (1) äquivalent zu

$$-h + \mathbf{T}\mu(h + 1) = 0 \tag{7}$$

mit $h = w_z - 1$ [11]. Das Problem besteht nun in der Charakterisierung derjenigen Lösungen von (7), die bei $\mu \in V$ ein gegebenes reellwertiges Funktional $\operatorname{Re} J(\mu, h$

maximieren. Somit stellt das betrachtete Extremalproblem ein Steuerungsproblem mit der Zustandsgleichung (7) dar und erlaubt die Anwendung der Theorie der optimalen Steuerung zur Herleitung notwendiger Bedingungen. Wir bedienen uns der Darstellung in [4, 18] für den Fall einer eindeutig auflösbaren Zustandsgleichung. Dazu wählen wir die Räume $X = Y = L_p(\operatorname{supp} K)$, $X^+ = X^* = L_q(\operatorname{supp} K)$ und $Y^+ = Y^* = L_q(\operatorname{supp} K)$, $1/p + 1/q = 1$, sowie $U = L_\infty(\operatorname{supp} K)$ und $U^+ = L_1(\operatorname{supp} K)$, und schreiben mitunter L_p statt $L_p(\operatorname{supp} K)$. Das Steuerungsproblem lautet also

$$S(\mu, h) = -h + \mathrm{T}\mu(1 + h) = 0,$$

$$\operatorname{Re} J(\mu, h) \to \mathrm{Max}!, \ \mu \in V,$$

mit $S(\mu, h): L_\infty \times L_p \to L_p$ und $\operatorname{Re} J(\mu, h): L_\infty \times L_p \to \mathbf{R}$, und in dem hier betrachteten Falle ohne Nebenbedingungen, mit eindeutig auflösbarer Zustandsgleichung (7). Ist nun (μ^0, h^0) eine optimale Lösung, so berechnet man leicht die F-Ableitungen:

$$S_\mu{}^0\mu = \mathrm{T}(1 + h^0)\,\mu \quad \text{und} \quad S_h{}^0 h = -h + \mathrm{T}\mu^0 h.$$

Die entsprechenden adjungierten Operatoren lassen sich unmittelbar mit Hilfssatz 1 ermitteln ($f, g \in L_q$):

$$S_\mu{}^{0+}: \langle f, \cdot\rangle \to \langle (1 + h^0)\,\mathrm{T}f, \cdot\rangle \quad \text{und} \quad S_h{}^{0*}: \langle g, \cdot\rangle \to \langle \mu^0\mathrm{T}g - g, \cdot\rangle.$$

Ist $J_h{}^0 = \langle \eta, \cdot\rangle$, $\eta \in L_\infty$, so lautet die zu (7) adjungierte Gleichung $\xi - \mu^0\mathrm{T}\xi = \eta$. Wegen $\|\mathrm{T}\|_{L_p} k < 1$ hat diese eine eindeutig bestimmte Lösung $\xi \in L_q$. Mit $J_\mu{}^0 = \langle \gamma, \cdot\rangle$, $\gamma \in L_q$, folgt schließlich die notwendige Bedingung

$$\operatorname{Re} \iint (\mu - \mu^0)\big(-\gamma - (1 + h^0)\,\mathrm{T}\xi\big)\,d\sigma \geqq 0 \quad \text{für alle } \mu \in V, \tag{8}$$

wobei vereinbarungsgemäß über die ganze Ebene zu integrieren ist, effektiv aber (vgl. (6)) über ein Kompaktum integriert wird. Zur Auswertung dieser notwendigen Bedingungen beweisen wir

Satz 1: *Für $F(\mu^0, h^0) \in L_1(\mathbf{C})$ mit $F(\mu^0, h^0) \neq 0$ f. ü. auf einer Menge M mit positivem Maß sei*

$$\operatorname{Re} \iint (\mu - \mu^0)\,F(\mu^0, h^0)\,d\sigma \leqq 0 \ \textit{für alle}\ \mu \in V.$$

Dann ist $|\mu^0(z)| = K(z)$ und $\mu^0(z)\,F(\mu^0, h^0) > 0$ f.ü. auf M.

Beweis: Zunächst ist die erste Aussage klar; denn gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine meßbare Menge $M_\varepsilon = \{z \in M: |\mu^0(z)| < K(z) - \varepsilon\}$ mit positivem Maß, dann könnte ein beliebiges $\Delta\mu \in L_\infty$ auf M_ε mit hinreichend kleinem Betrag so gewählt werden, daß $\mu = \mu^0 + \Delta\mu \in V$ wäre und es entstünde ein Widerspruch zur notwendigen Bedingung.

Wegen $|\mu^0(z)| = K(z)$ f. ü. auf M gibt es bei hinreichend kleinem $|\Delta\mu|$ mit $\arg \mu^0 + \pi/2 < \arg \Delta\mu < \arg \mu^0 + 3\pi/2$ f. ü. auf M zulässige Variationen $\mu = \mu^0 + \Delta\mu \in V$. Somit gilt

$$\arg \mu^0 F(\mu^0, h^0) + \frac{\pi}{2} < \arg \Delta\mu F(\mu^0, h^0) < \arg \mu^0 F(\mu^0, h) + \frac{3\pi}{2}$$

f. ü. auf M. Gäbe es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß die meßbare Menge

$$M_\varepsilon = \{z \in M: |\arg \mu^0 F(\mu^0, h^0)| \geqq \varepsilon\}$$

positives Maß hätte; dann würde sofort ein Widerspruch zur notwendigen Bedingung folgen ∎

Es ist nun wünschenswert, eine Klasse von Funktionalen anzugeben, die die Anwendung von Satz 1 gestatten. Dazu beweisen wir

Hilfssatz 2: *Es sei* $0 \neq \mu^0 \in V$, *G ein Gebiet mit* $\operatorname{supp}\mu^0 \subset G$, *und g sei in G regulär und nicht identisch null. Für* ξ *mit* $-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi = \mu^0 g(z)$ *gilt dann in G*

$$\mathbf{T}\xi - g(z) = w_z^0\zeta'(w^0) \text{ und } \xi = \mu^0(\mathbf{T}\xi - g(z)) = w_{\bar z}^0\zeta'(w^0).$$

Dabei ist w^0 *die zu* μ^0 *gehörende schlichte Lösung von* (1) *und* ζ *eine gewisse in* $w^0(G)$ *reguläre Funktion, deren Ableitung* ζ' *höchstens in endlich vielen Punkten verschwindet.*

Beweis: Mit der nach dem Banachschen Fixpunktsatz wegen $\|\mathbf{T}\|_{L_p}k < 1$ eindeutig bestimmten Lösung $\xi \in L_p$ der Gleichung $-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi = \mu^0 g(z)$ und der im allgemeinen mehrdeutigen Stammfunktion R zu $-g$ bilden wir $H(z) = \mathbf{P}\xi + R(z)$ für $z \in G$. Wegen (5) gilt dann $H_{\bar z} = \mu^0 H_z$ für $z \in G$, woraus nach dem Darstellungstheorem für die Lösungen von (1) folgt $H(z) = \zeta(w^0(z))$ für $z \in G$ [11]. Dabei ist ζ eine gewisse in $w^0(G)$ analytische Funktion, die nicht identisch verschwindet, falls g dies nicht tut ∎

Ist nun g überdies in der gesamten Ebene bis auf endlich viele Pole regulär, so kann die Funktion ζ explizit angegeben werden. Deren Ableitung ζ' ist die zum quadratischen Differential des Extremalproblems gehörende meromorphe Funktion.

Nachfolgende Beispiele behandeln sämtlich Extremalprobleme in der zu Beginn dieses Abschnittes genauer fixierten Abbildungsklasse der $\dfrac{1+K(z)}{1-K(z)}$ – quasikonformen Abbildungen von D.

1. Einfachstes Beispiel ist das Extremalproblem

$$\operatorname{Re} a_1 \to \text{Max}!,$$

falls für w in D die Normierung (2) gilt. Mit

$$a_1 = J(\mu, h) = \frac{1}{\pi}\iint w_{\bar z}\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\iint \mu(1+h)\, d\sigma$$

folgt sofort

$$J_{\mu^0}\mu = \frac{1}{\pi}\iint \mu(1+h^0)\, d\sigma \quad \text{und} \quad J_{h^0}h = \frac{1}{\pi}\iint h\mu^0\, d\sigma,$$

somit $\gamma = (1+h^0)/\pi$ und $\eta = \mu^0/\pi$. Aus der adjungierten Gleichung $\xi - \mu^0\mathbf{T}\xi = \eta$ wird nun $-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi = -\mu^0/\pi$, woraus man sofort $\xi = w_{\bar z}^0/\pi$ erkennt. Auf die notwendige Bedingung ist Satz 1 anwendbar und liefert, faßt man dessen beide Aussagen zusammen, $w_{\bar z}^0 = K(z)\,\overline{w_z^0}$. Weiterhin liefern konforme Randvariationen bekanntlich, daß die Bildrandkomponenten bei w^0 (eventuell zu einem Punkt entartete) horizontale Strecken sind. Dies wurde ursprünglich mit der Flächenstreifenmethode von R. Kühnau [7: S. 98ff.] für endlich vielfach zusammenhängende Gebiete gewonnen und mit einer Variationsmethode von H. Renelt [9]. Hier und analog bei den folgenden Beispielen können die Extremalfunktionen somit wie folgt charakterisiert werden: Die Bildrandkomponenten sind Schlitze, auf denen $\zeta'(w)\, dw^2 \geqq 0$ ist (mit einem zum Extremalproblem gehörenden, im Hilfssatz 2 erklärten ζ). Infinitesimale zum Punkt z konzentrische Kreise gehen bei w^0 in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses $(1+K(z))/((1-K(z))$ über, deren Richtungen der großen Achsen ebenfalls $\zeta'(w)\, dw^2 \geqq 0$ erfüllen. Damit wird das Verhalten der Extremalfunktionen im Inneren und auf dem Rande von D durch ein quadratisches Differential einheitlich beschrieben.

2. Für das Problem

$$\operatorname{Re} w(z_1) \to \text{Max}!$$

bei einem festen $z_1 \notin \operatorname{supp} K$ folgt wegen

$$w(z_1) = J(\mu, h) = z_1 - \frac{1}{\pi}\iint \frac{\mu(1+h)}{(z-z_1)}\, d\sigma_z,$$

daß

$$\eta = -\frac{1}{\pi}(\zeta - z_1)^{-1}\mu^0, \quad \gamma = -\frac{1}{\pi}(1 + h^0)(\zeta - z_1)^{-1} \quad \text{und} \quad g(z) = -\frac{1}{\pi}(\zeta - z_1)^{-1}$$

ist. Nach Hilfssatz 2 ist $\zeta(w) = \pi^{-1}\log(w(z) - w(z_1))$, und aus Satz 1 folgt als notwendige Bedingung

$$w_{\bar{z}}^0 = K(z)\frac{|w^0(z) - w^0(z_1)|}{\bar{w}^0(z) - \bar{w}^0(z_1)}\overline{w_z^0}.$$

Die Bildrandkomponenten bei w^0 sind wiederum die vom konformen Fall her bekannten Parabelschlitze.

3. Beim Extremalproblem

$$\operatorname{Re}\log w'(z_1) \to \text{Max!}$$

mit einem $z_1 \notin \operatorname{supp} K$ ist

$$J(\mu, h) = \log\left(1 - \frac{1}{\pi}\iint\frac{\mu(1 + h)}{(z - z_1)^2}\,d\sigma_z\right)$$

und somit

$$\eta = -\frac{1}{\pi}\frac{\mu^0}{w^{0\prime}(z_1)(z - z_1)^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{\pi}\frac{w_z^0}{w^{0\prime}(z_1)(z - z_1)^2} \quad \text{und}$$

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{w^{0\prime}(z_1)(z - z_1)^2},$$

womit nach Hilfssatz 2 folgt $\zeta(w) = -\pi^{-1}(w(z) - w(z_1))^{-1}$. Die notwendige Bedingung (8) liefert mit Satz 1 wieder

$$w_{\bar{z}}^0 = K(z)\frac{|w^0(z) - w^0(z_1)|^2}{(\bar{w}^0(z) - \bar{w}^0(z_1))^2}\overline{w_z^0}.$$

Die Bildrandkomponenten bei w^0 sind die vom konformen Fall her bekannten Schlitze. Für den allgemeineren Fall des Golusinschen Funktionals findet sich dies in [7: S. 103ff] und eine Herleitung mittels Variationsmethode wiederum in [9].

4. Extremalprobleme unter höherer Normierung

Die hier benutzte Theorie der optimalen Steuerung erlaubt die Hinzunahme endlich vieler skalarer Nebenbedingungen zur Zustandsgleichung (7). Wir betrachten also etwa die Klasse quasikonformer Abbildungen des Abschnittes 3 wieder in einem derartigen Gebiet D mit der zusätzlichen Forderung, daß in endlich vielen außerhalb $\operatorname{supp} K$ gelegenen Punkten vorgegebene Funktionswerte oder Ableitungen angenommen werden, und in dieser Funktionenklasse etwa eines der im Abschnitt 3 behandelten Extremalprobleme. Man spricht dann von *Extremalproblemen unter höherer Normierung*. Völlig belanglos für das hier zu zeigende Vorgehen ist dabei, daß es sich um Funktionswerte bzw. Ableitungen handelt, die fixiert werden. Ebenso könnten die Werte irgendwelcher anderen Funktionale vorgegeben werden.

Eine Methode zur Behandlung von Extremalproblemen bei konformen Abbildungen unter höherer Normierung wurde erstmals von H. Grötzsch [5] an Beispielen demonstriert. P. A. Biluta und S. L. Kruškal' [2, 6] untersuchten dieses Problem bei quasikonformen Abbildungen mit konstanter Dilatationsbeschränkung und H. Renelt [10] charakterisierte Lösungen dieses Problems bei allgemeinem K mit einer Variationsmethode und einem anschließenden, auf der Idee der Straffunktionsverfahren aufbauenden Grenzübergang. Hier werden nun notwendige Bedingungen für derartige Extremalprobleme angegeben und ausgewertet. Damit wird auch die in [10] noch offene Frage nach der Charakterisierung aller Extremalfunktionen geklärt.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß endlich viele Funktionswerte außerhalb supp K vorgeschrieben sind und setzen im folgenden immer voraus, daß die betrachteten Abbildungsklassen nicht leer sind (eine diesbezügliche lokale Existenzaussage findet sich in [6: S. 92]). Beim Vorliegen der Werte endlich vieler Ableitungen gewisser Ordnungen außerhalb supp K verfährt man ganz entsprechend. Auch hier kann man sich — wie im Abschnitt 3 — bei regulären Funktionalen auf quasikonforme Abbildungen der Vollebene beschränken, die die entsprechende höhere Normierung realisieren. Wieder sind die bei extremalem w^0 entstehenden Bildrandkomponenten gewisse vom Gebiet D und der Art der Normierung abhängige Schlitze [5]. Es bleibt noch, das Verhalten im Inneren des Gebietes D zu untersuchen.

Die Menge quasikonformer Abbildungen, in der ein gegebenes reellwertiges Funktional zu maximieren ist, bestehe also aus den schlichten Lösungen von (1) in $\mathbf{C}$ mit der höheren Normierung $w(z_i) = w_i$ in $z_i \notin \operatorname{supp} K$ $(i = 1, \ldots, n)$. Diese Nebenbedingungen werden nun in die Zustandsgleichung einbezogen, so daß wir wegen $w(z) = z + \mathbf{P}w_{\bar z}$ als Zustandsgleichung wählen

$$S(\mu, h) = \left(-h + \mathbf{T}\mu(1 + h), -\frac{1}{\pi} \iint \mu(1 + h)(z - z_1)^{-1} d\sigma + z_1 - w_1, \ldots, -\frac{1}{\pi} \iint \mu(1 + h)(z - z_n)^{-1} d\sigma + z_n - w_n\right) = 0,$$

$S(\mu, h): L_\infty \times L_p \to L_p \times \mathbf{C}^n$, und es wird über der konvexen Menge V gesteuert. Die F-Ableitungen der Zustandsgleichung an der Stelle μ^0, h^0 sind:

$$S_\mu{}^0\mu = \left(\mathbf{T}(1 + h^0)\mu, -\frac{1}{\pi} \iint \mu(1 + h^0)(\zeta - z_1)^{-1} d\sigma, \ldots, -\frac{1}{\pi} \iint \mu(1 + h^0)(\zeta - z_n)^{-1} d\sigma\right),$$

$$S_h{}^0h = \left(-h + \mathbf{T}\mu^0h, -\frac{1}{\pi} \iint \mu^0(\zeta - z_1)^{-1} h\, d\sigma, \ldots, -\frac{1}{\pi} \iint \mu^0(\zeta - z_n)^{-1} h\, d\sigma\right).$$

Nach Hilfssatz 1 hat der zu $S_\mu{}^0$ adjungierte Operator $S_\mu{}^{0+}: L_q \times \mathbf{C}^n \to L_1$ die Struktur

$$(\xi; a_1, \ldots, a_n) \in L_q \times \mathbf{C}^n \to \left((1 + h^0)\mathbf{T}\xi - \frac{1}{\pi}(1 + h^0) \sum_1^n a_i(\zeta - z_i)^{-1}\right),$$

und der zu $S_h{}^0$ adjungierte Operator $S_h{}^{0*}: L_q \times \mathbf{C}^n \to L_q$ hat die Struktur

$$(\xi; a_1, \ldots, a_n) \in L_q \times \mathbf{C}^n \to \left(-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi - \frac{1}{\pi}\mu^0 \sum_1^n a_i(\zeta - z_i)^{-1}\right).$$

Nun muß S_h noethersch sein. $N(S_h{}^{0*})$ sei der Nullraum des Operators $S_h{}^{0*}$. Ist $(\xi; a_1, \ldots, a_n) \in N(S_h{}^{0*})$, dann folgt

$$-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi = \frac{1}{\pi}\mu^0 \sum_1^n \frac{a_i}{\zeta - z_i}.$$

Offenbar hat diese Gleichung zu jedem n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\xi \in L_q$. Mit $\xi_i \in L_q$ als Lösung von

$$-\xi + \mu^0\mathbf{T}\xi = \frac{1}{\pi}\mu^0 \frac{1}{\zeta - z_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

kann eine Basis $\{g_1, \ldots, g_n\}$ von $N(S_h^{0*})$ definiert werden:

$$g_1 = (\xi_1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, g_n = (\xi_n, 0, \ldots, 0, 1).$$

Der noethersche Operator S_h^0 hat also die Charakteristik $\chi = 0 \dot{-} n$. Man prüft überdies mittels Hilfssatz 2 leicht die lineare Unabhängigkeit des Systems $\{S_\mu^{0+} g_i\}$ nach, so daß alle Voraussetzungen zur Anwendung der Ergebnisse aus [4, 17] erfüllt sind.

Zur Illustration des Ganzen wird das Beispiel 1 des Abschnittes 3 behandelt, jetzt aber bei der Zusatzbedingung $w(z_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Für die Lösung der adjungierten Gleichung

$$-\xi + \mu^{0\prime}\mathrm{T}\xi = -\frac{1}{\pi}\mu^0 + \frac{1}{\pi}\mu^0 \sum_1^n \frac{a_i}{\zeta - z_i}, \quad (\xi, a_1, \ldots, a_n) \in L_q \times \mathrm{C}^n,$$

gilt mit ξ_i aus (9)

$$\xi = \frac{1}{\pi} \sum_1^n a_i \xi_i + \frac{1}{\pi} w_{\bar{z}}^0.$$

Damit lautet die notwendige Bedingung

$$\operatorname{Re} \iint w_z^{02} \left(-\frac{1}{\pi} - \sum_1^n \frac{a_i}{\pi(w^0(z) - w^0(z_i))} \right) (\mu - \mu^0)\, d\sigma \geqq 0$$

für alle $\mu \in V$ mit

$$\operatorname{Re} \iint w_z^{02} \left(\frac{1}{\pi(w^0(z) - w^0(z_i))} \right) (\mu - \mu^0)\, d\sigma = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Wie in [4: Bem. 6] bringt die Anwendung des Satzes von Kuhn-Tucker

$$\operatorname{Re} \iint w_z^{02} \left(-\frac{\lambda_0}{\pi} + \sum_1^n \frac{\lambda_i - \lambda_0 a_i}{\pi(w^0(z) - w^0(z_i))} \right) (\mu - \mu^0)\, d\sigma \geqq 0 \tag{10}$$

für alle $\mu \in V$, mit $\lambda_0 \geqq 0$ und nicht gleichzeitig verschwindenden Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Man überlegt sich leicht, daß auch der Ausdruck in den Klammern f. ü. von null verschieden ist. Satz 1 liefert also sofort

$$w_{\bar{z}}^0 = K(z) \left| \lambda_0 + \sum_1^n \frac{\lambda_0 a_i + \lambda_i}{w^0(z) - w^0(z_i)} \right|^{-1} \left(\lambda_0 + \sum_1^n \frac{\lambda_0 \bar{a}_i + \lambda_i}{\bar{w}^0(z) - \bar{w}^0(z_i)} \right) \overline{w_z^0} \tag{11}$$

mit den oben charakterisierten Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dieser Ausdruck für $w_{\bar{z}}^0$ wurde im Falle $n = 1$ in [10] als Demonstrationsbeispiel auf andere Weise hergeleitet. Völlig analog sind beispielsweise die im Abschnitt 3 angegebenen Probleme bei höherer Normierung behandelbar.

5. Verallgemeinerungen

1. Die hier demonstrierte Anwendung der Theorie der optimalen Steuerung erfordert natürlich nicht notwendig eine konvexe Menge der Gestalt (6). Vielmehr kann anstelle von V eine beliebige konvexe in L_∞ abgeschlossene Teilmenge V' von

$$G \equiv \{\mu \in L_\infty(\mathrm{C}) : \|\mu\|_{L_\infty} \leqq k < 1, \mu = 0 \text{ f. ü. für } |z| > R\}$$

mit nichtleerem Inneren stehen, deren zugehörige Klasse quasikonformer Abbildungen in der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz kompakt ist. Die Frage der Kompaktheit allgemeiner Klassen quasikonformer Abbildungen wurde unter anderem auch in [12, 13] behandelt. Verwandte Probleme auf Klassen quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises, die durch $\Phi(|\mu|, \Theta) \leqq 0$ mit hinreichend glattem Φ

und der komplexen Dilatation $\mu = |\mu|\, e^{2i\theta}$ definiert sind, wurden in [3] mit einer Variationsmethode untersucht. Die neuerdings von M. SCHIFFER und G. SCHOBER in die Untersuchungen eingebrachten Extremalprobleme bei allgemeinen Dilatationsbeschränkungen [14, 15] lassen sich hier einordnen (vgl. das unten stehende Beispiel).

Die notwendige Bedingung (8) bleibt unabhängig von der Wahl der konvexen Menge V' erhalten. Anstelle von Satz 1 tritt nun unter den Voraussetzungen von Satz 1 eine Aussage folgender Gestalt: Ist μ^0 optimale Steuerung, dann ist μ^0 Randpunkt von V', und es besteht eine von der geometrischen Gestalt von V' bestimmte Bedingung an das Argument eines gewissen von μ^0 und $F(\mu^0, h^0)$ abhängigen Ausdruckes. Liegt nun insbesondere die von M. SCHIFFER und G. SCHOBER [14, 15] betrachtete Situation vor, daß V' für ein gewisses F_1 in der Form $V' = \{\mu \in G: F_1(\mu(z), z) \leqq 0 \text{ f. ü.}\}$ beschreibbar ist, so gilt

Satz 1': *Ist für $F(\mu^0, h^0) \in L_1(\mathrm{C})$, $F(\mu^0, h^0) \neq 0$ f. ü. auf einer Menge M mit positivem Maß,*

$$\operatorname{Re} \iint (\mu - \mu^0)\, F(\mu^0, h^0)\, d\sigma \leqq 0$$

$$\text{für alle } \mu \in V' \equiv \{\mu \in G: F_1(\mu(z), z) \leqq 0 \text{ f. ü.}\},$$

dann ist $F_1(\mu^0(z), z) = 0$ und $F_{1t}(\mu^0(z), z)\, F(\mu^0, h^0) > 0$ f. ü. auf M.

Ein einfaches Beispiel ist das Problem $\operatorname{Re} a_1 \to \text{Max!}$ in der Menge aller quasikonformen Abbildungen der Vollebene, deren komplexe Dilatation μ in V' mit $F_1(\mu(z), z) = |\mu(z) - c(z)|^2 - K^2(z)$ enthalten ist. Dabei seien c und $K \geqq 0$ meßbare Funktionen mit $\| |c| + K \|_\infty < 1$ und an der Stelle $z_1 \notin \operatorname{supp}(K + |c|)$ mögen die Abbildungen noch den Funktionswert w_1 haben (ohne diese höhere Normierung findet sich dieses Beispiel in [15] mit einer Variationsmethode behandelt und in [8] mit der Methode der Randintegration, wobei sich dort auch konkrete Abschätzungen des extremalen a_1 finden). Dann sind offenbar alle Voraussetzungen erfüllt, falls die betrachtete Abbildungsklasse nicht leer ist, und als notwendige Bedingung für eine Extremalfunktion w^0 folgt

$$w_{\bar z}^0 = c(z)\, w_z^0 + \left|\lambda_0 + \frac{\lambda_0 a + \lambda_1}{w^0(z) - w_1}\right|^{-1} \cdot \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_0 \bar a + \lambda_1}{\bar w^0(z) - \bar w_1}\right) K(z)\, \overline{w_z^0}.$$

2. Durch Einführen von Schlupfvariablen als zusätzliche Steuerparameter können auch — in natürlicher Verallgemeinerung der in Abschnitt 4 erfolgten Untersuchungen — Extremalprobleme behandelt werden, bei denen die Funktionswerte in vorgegebenen konvexen abgeschlossenen Mengen variieren dürfen (für gewisse konforme Abbildungen ist ein derartiges Problem in [2] behandelt worden). Wieder soll dies am einfachsten aber repräsentativen Beispiel der Maximierung von $\operatorname{Re} a_1$ skizziert werden. Zusätzlich zu der in Beispiel 1 von Abschnitt 3 vorliegenden Zustandsgleichung werden nun die Funktionswerte der Abbildungen im Punkt $z_1 \notin \operatorname{supp} K$ in einer beliebig vorgebbaren konvexen abgeschlossenen Menge Ω mit nichtleerem Inneren liegen. Die dadurch fixierte Abbildungsklasse sei nicht leer. Der im Abschnitt 4 behandelte Fall der höheren Normierung kann hieraus gewonnen werden, indem man Ω zu einem Punkt schrumpfen läßt. In die Zustandsgleichung geht nun die als zusätzliche Steuergröße fungierende Schlupfvariable ω ein, so daß wir das Problem

$$-h + \mathrm{T}\mu(1 + h) = 0, \quad \mu \in V,$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint \mu(1 + h)\, (z - z_1)^{-1}\, d\sigma - \omega = 0, \qquad \omega \in \Omega,$$

erhalten. Die Berechnung der Ableitungen gestaltet sich wie im Abschnitt 4, es kommt lediglich noch eine Komponente in ω hinzu, so daß sich letztendlich als notwendige Bedingung nach Anwendung des Satzes von Kuhn-Tucker wie im Abschnitt 4

$$\operatorname{Re} \iint w_{\bar{z}}^{0\,2} \left(-\frac{\lambda_0}{\pi} - \frac{\lambda_0 a - \lambda_1}{\pi\left(w^0(z) - w^0(z_1)\right)} \right) (\mu - \mu^0)\, d\sigma$$

$$+ (\lambda_0 + \lambda_1) \operatorname{Re} a(\omega^0 - \omega) \geqq 0$$

für alle $\mu \in V$ und $\omega \in \Omega$ ergibt. Wählt man nun einerseits $\omega = \omega^0$ und $\mu \in V$, so folgt die notwendige Bedingung (10) (mit $n = 1$) und somit die Differentialgleichung (11) auch für jede Extremalfunktion dieses allgemeineren Problems mit gewissen Konstanten λ_0, λ_1 und a. Mit $\mu = \mu^0$ und $\omega \in \Omega$ folgt andererseits

$$(\lambda_0 + \lambda_1) \operatorname{Re} a(\omega^0 - \omega) \geqq 0 \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Da a wegen der Struktur von $N(S_h^{0*})$ insbesondere von null verschieden gewählt werden kann, würde ein ω^0 im Inneren von Ω sofort $(\lambda_0 + \lambda_1) = 0$ bewirken und somit würde (11) mit $\lambda_0 = -\lambda_1 \neq 0$ bestehen. Wählt man die Menge Ω hinreichend groß, so tritt dieser Fall ein, da in der hier betrachteten Abbildungsklasse die Werte von $w(z_1)$ beschränkt sind, dann also das Problem in das im Abschnitt 4 behandelte übergeht (für $a = -1$ ergibt sich die dort hergeleitete notwendige Bedingung). Bei hinreichend klein gewählter Menge Ω ist ω^0 Randpunkt.

LITERATUR

[1] Белинский, П. П.: Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Изд-во Наука 1974.

[2] Билута, П., А., и С. Л. Крушкаль: К вопросу об экстремальных квазиконформных отображениях. Докл. Акад. Наук СССР **196** (1971), 259—262. Engl. Übers.: Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 76—79.

[3] Гейнеман, В. Э.: Об одной экстремальной задаче на некотором подмножестве квазиконформных отображений. Сиб. мат. Ж. **24** (1983), 199—201.

[4] Goebel, M., and L. v. Wolfersdorf: Optimale Steuerprobleme bei Noetherschen Operatorgleichungen III. Math. Nachr. **82** (1978), 77—85.

[5] Grötzsch, H.: Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung (1. Mitt.). Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. (1933), 654—671.

[6] Крушкаль, С. Л.: Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Изд-во Наука 1975. Erweiterte engl. Übers.: Krushkal', S. L.: Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces. Washington: V. H. Winston & Sons, New York: John Wiley & Sons 1979.

[7] Kruschkal, S. L., und R. Kühnau: Quasikonforme Abbildungen — neue Methoden und Anwendungen. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1983.

[8] Kühnau, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen II. Ann. Pol. Math. **43** (1983), 105—110.

[9] Renelt, H.: Modifizierung und Erweiterung einer Schifferschen Variationsmethode für quasikonforme Abbildungen. Math. Nachr. **55** (1973), 353—379.

[10] Renelt, H.: Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen unter höheren Normierungen. Math. Nachr. **66** (1975), 125—143.

[11] Renelt, H.: Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1982.

[12] Рязанов, В. И.: Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений. Докл. Акад. Наук УССР, Сер. А (1982) 6, 24—26.

[13] Рязанов, В. И.: Вариационный метод для общих классов квазиконформных отображений. Докл. Акад. Наук УССР, Сер. А (1982) 8, 25—28.

[14] Schiffer, M.: A variational method for univalent quasiconformal mappings. Duke Math. J. **33** (1966), 395—411.

[15] SCHIFFER, M., and G. SCHOBER: A variational method for general families of quasiconformal mappings. J. d'Anal. Math. 34 (1978), 240–264.
[16] SCHIFFER, M., and G. SCHOBER: An application of the calculus of variations for general families of quasiconformal mappings. In: Complex analysis. Proc. Coll. Joensuu (Finland), August 24–27, 1978 (Eds.: I. Laine, O. Lehto and T. Sorvali). Berlin—Heidelberg—New York: Springer Verlag 1978.
[17] SCHOBER, G.: Univalent Functions-Selected Topics (Lecture Notes in Mathematics: Bd. 478). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1975.
[18] v. WOLFERSDORF, L.: Necessary optimality conditions for control processes with singular integral equations and elliptic equations. In: Theory of Nonlinear Operators. Proc. Int. Summer School Berlin (GDR), September 19–23, 1977 (Ed.: R. KLUGE). Berlin: Akademie-Verlag 1978, S. 280–292.

Manuskripteingang: 14. 09. 1984; in revidierter Fassung 31. 1. 1986

VERFASSER:

Dr. BODO DITTMAR
Sektion Mathematik/Physik
der Pädagogischen Hochschule „N. K. Krupskaja"
DDR-4050 Halle, Kröllwitzer Str. 44

Buchbesprechung

I. BARS, A. CHODOS and CHIA-HSIUNG TZE (eds.): **Symmetries in Particle Physics.** New York—London: Plenum Press 1984, VIII + 311 p.

Der Band ist eine Sammlung von Beiträgen zu einem Symposium im April 1981 an der Yale Universität, New Haven, Connecticut, anläßlich des 60. Geburtstages von FEZA GÜRSEY. Die einzelnen Beiträge sind: Some Perspectives on the Nonlinear Sigma Model (T. Appelquist), The Turbulent Aether (Y. Nambu), Does Quantum Chromodynamics Imply Confinement? (G. 't Hooft), Chaos and Cosmos (L. A. Radicati di Brozolo), Dynamic Symmetries in Nuclei, Atoms and Molecules (F. Iachello), The Symmetry and Renormalization Group Fixed Points of Quartic Hamiltonians (L. Michel), Relativistic Heavy Ion Collisions and Future Physics (T. D. Lee), The Fermion Determinant in Massless Two-Dimensional QCD (R. Roskies), Dynamic Mass Generation for Fermions (A. Salam und J. Strathdee), Tomographic Representation of Quantized Fields (C. M. Sommerfield), On Spontaneously Broken Supersymmetry (G. Domokos und S. Kövesi-Domokos), An Action in Superspace for SO(N)-Supergravity (S. W. MacDowell), Intrinsic Geometry of Supergravity (V. I. Ogievetsky), On the Physics of Dimensional Reduction (P. G. O. Freud), Backlund Transformations and Deformations of Linear Differential Equations with Applications to Diophantine Approximations (G. Chudnovsky), Backlund Transformations and Geometric and Complex-Analytic Background for Construction of Completely Integrable Lattice Systems (D. V. Chudnovsky), Unfashionable Pursuits (J. F. Dyson), Epilogue (M. Goldhaber). Das Buch enthält weiterhin eine Liste der Publikationen sowie eine kurze Biographie des Jubilars.

Die Beiträge namhafter Physiker und Mathematiker sind der Symmetrie und Symmetriebrechung in den physikalischen Naturgesetzen gewidmet. Anknüpfend an eine Bemerkung von Felix Klein, daß das gruppentheoretische Konzept wahrscheinlich das charakteristischste Ergebnis der Mathematik des 19. Jahrhunderts ist, führt Radicati di Brozolo in seinem Beitrag aus, wie heute die verschiedensten Bereiche der Natur, angefangen von den Elementarteilchen über die nichtlinearen Effekte der Hydrodynamik bis hin zum gesamten Kosmos durch die Gesetzmäßigkeiten der Symmetrie und Symmetriebrechung bestimmt sind.