Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (1) 1987, S. 23–34

Über funktionentheoretische Eigenschaften der Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen

P. Berglez

Es werden einige funktionentheoretische Eigenschaften der Lösungen der elliptischen Differentialgleichung $w_{z\bar{z}} + a(z, \bar{z})\, w_{\bar{z}} + b(z, \bar{z})\, w = 0$ beschrieben, die sich durch Differentialoperatoren nach K. W. Bauer darstellen lassen. Nach der Untersuchung allgemeiner Eigenschaften werden formale Potenzen eingeführt. Damit ist es möglich, einige wesentliche Sätze der klassischen Funktionentheorie für gewisse Teilklassen der Lösungen dieser Differentialgleichung, die Verallgemeinerungen der holomorphen Funktionen darstellen, zu formulieren.

Описываются некоторые теоретико-функциональные свойства решений эллиптического дифференциального уравнения $w_{z\bar{z}} + a(z, \bar{z})\, w_{\bar{z}} + b(z, \bar{z})\, w = 0$, представимых дифференциальными операторами в смысле К. В. Бауэра. После исследования общих свойств вводятся формальные степени. Этим дается возможность сформулировать несколько существенных предложений классической теории функций для некоторых подклассов решений этого уравнения, представляющих собой обобщения голоморфных функций.

Some function theoretic properties of the solutions of the elliptic differential equation $w_{z\bar{z}} + a(z, \bar{z})\, w_{\bar{z}} + b(z, \bar{z})\, w = 0$ are discussed which can be represented by differential operators of K. W. Bauer. After a discussion of general properties, formal powers are defined. With this it is possible to prove some theorems essential in the classical theory of functions for certain subclasses of the solutions of this equation which are generalizations of holomorphic functions.

1. Einleitung

L. Bers [7] und I. N. Vekua [10] entwickelten auf verschiedenen Wegen eine Theorie verallgemeinerter analytischer Funktionen. Wegen des Zusammenhanges dieser Funktionen mit Lösungen elliptischer Differentialgleichungen ergeben sich daraus natürlich auch Aussagen über funktionentheoretische Eigenschaften der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. In der vorliegenden Arbeit sollen die Lösungen der elliptischen Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left(\log A_n(z, \bar{z})\right)_z w_{\bar{z}} + B_n(z, \bar{z})\, w = 0 \tag{1}$$

untersucht werden, wobei von der Annahme ausgegangen wird, daß sich diese durch geeignete Differentialoperatoren darstellen lassen. In [5] konnten diejenigen elliptischen Differentialgleichungen charakterisiert werden, die solche Darstellungsoperatoren besitzen, wobei es auch möglich war, Lösungsdarstellungen in einfach zusammenhängenden Gebieten der komplexen Zahlenebene anzugeben. Darstellungen in der Nähe isolierter Singularitäten wurden in [6] untersucht. Mit Hilfe dieser Resultate ist es nunmehr möglich, für gewisse Teilklassen von (1) eingehendere Ergebnisse zu erzielen. Neben der Untersuchung allgemeiner Eigenschaften werden formale Potenzen eingeführt, wodurch es möglich wird, einen allgemeinen Entwicklungssatz, einen Identitätssatz, Aussagen über die analytische Fortsetzung der Lösungen und einen Monodromiesatz anzugeben. Es können auch formale Laurentreihen und der Begriff des Residuums eingeführt und entsprechende Integralsätze formuliert werden. Die hier dargelegten Untersuchungen stellen Verallgemeinerungen der von K. W. BAUER in [1] für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n + 1) w = 0, \qquad n \in \mathrm{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

erzielten Resultate dar.

2. Klasseneinteilung und allgemeine Eigenschaften der Lösungen

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene. Zwei Differentialoperatoren $K_n{}^0$ und $\tilde{K}_m{}^0$ ($n, m \in \mathrm{N}$) seien in G definiert durch

$$K_n{}^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n(z, \bar{z}) \frac{\partial^k}{\partial z^k} \quad \text{und} \quad \tilde{K}_m{}^0 = \sum_{k=0}^{m} b_k{}^m(z, \bar{z}) \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k},$$

wobei die Funktionen $a_k{}^n$ ($0 \leqq k \leqq n$) und $b_k{}^m$ ($0 \leqq k \leqq m$) in G analytisch seien mit $a_n{}^n \neq 0$ und $b_m{}^m \neq 0$ in G. Ist $K_n{}^0 g$ und $\tilde{K}_m{}^0 \bar{h}$ für g bzw. h holomorph in G Lösung von (1), so nennen wir $K_n{}^0$ einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-*Operator* und $\tilde{K}_m{}^0$ einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{m,0}$-*Operator* zu (1).

Zunächst seien von [5] diejenigen Resultate für die Differentialgleichung (1) formuliert, die für die weiteren Überlegungen wesentlich sind.

Satz 1: a) *Die Gleichung* (1) *besitzt in G genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator $K_n{}^0$, falls mit*

$$A_{k-1} = A_k B_k, \qquad B_{k-1} = B_k + (\log A_k B_k)_{z\bar{z}}, \qquad k = n, \ldots, 1,$$

$B_0 \equiv 0$ *in G erfüllt ist. Der Operator $K_n{}^0$ ist dann gegeben durch*

$$K_n{}^0 = F_{n-1}^0 \ldots F_0{}^0, \qquad F_k{}^0 = \frac{\partial}{\partial z} + (\log A_k)_z, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2}$$

b) *Die Gleichung* (1) *besitzt in G genau dann einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{m,0}$-Operator $\tilde{K}_m{}^0$, falls $\tilde{B}_0 \equiv 0$ in G erfüllt ist. $\tilde{B}_0$ wird mittels*

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{A_n}, \quad \tilde{B}_m = B_n - (\log A_n)_{z\bar{z}},$$

$$\tilde{A}_{k-1} = \tilde{A}_k \tilde{B}_k, \qquad \tilde{B}_{k-1} = \tilde{B}_k + (\log \tilde{A}_k \tilde{B}_k)_{z\bar{z}}, \qquad k = m, \ldots, 1,$$

bestimmt. $\tilde{K}_m{}^0$ ist dabei gegeben durch

$$\tilde{K}_m{}^0 = \frac{1}{A_n} \tilde{F}_{m-1}^0 \ldots \tilde{F}_0{}^0, \ \tilde{F}_k{}^0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (\log \tilde{A}_k)_{\bar{z}}, \qquad k = 0, \ldots, m-1. \tag{3}$$

c) *Ist sowohl $B_0 \equiv 0$ als auch $\tilde{B}_0 \equiv 0$ in G, so gibt es zu* (1) *einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator $K_n{}^0$ gemäß* (2) *und einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{m,0}$-Operator $\tilde{K}_m{}^0$ gemäß* (3). *Für g und h holomorph in G ist $w = K_n{}^0 g + \tilde{K}_m{}^0 \bar{h}$ Lösung von* (1) *in G. Umgekehrt gibt es dann zu jeder in G definierten Lösung von* (1) *zwei in G holomorphe Funktionen g und h, so daß $w = K_n{}^0 g + \tilde{K}_m{}^0 \bar{h}$ ist.*

Die letzte Aussage wird unter Zuhilfenahme eines von R. HEERSINK in [8] erzielten Resultates bewiesen. Die in den Lösungsdarstellungen auftretenden Funktionen g

und h werden als *Erzeugende* bezeichnet. Über die Erzeugenden der Null-Lösung von (1) gibt Auskunft

Satz 2 (vgl. [6]): *Zur Gleichung* (1) *gebe es in G sowohl einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}^{n,0}$- als auch einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{m,0}$-Operator, das heißt, die Lösung von* (1) *besitze in G die Darstellung*

$$w = K_n{}^0 g + \tilde{K}_m{}^0 \overline{h} = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n g^{(k)} + \sum_{k=0}^{m} b_k{}^m \overline{h^{(k)}}$$

mit g und h holomorph in G. Die Erzeugenden g_0 und h_0 der Null-Lösung von (1) *in der Form $0 = K_n{}^0 g_0 + \tilde{K}_m{}^0 \overline{h_0}$ sind gegeben durch*

$$g_0(z) = u_n(z, \zeta_0)|_{\zeta_0 = \overline{z_0}} \quad \text{und} \quad h_0(z) = \overline{\tilde{u}_m(z_0, \zeta)\Big|_{\substack{\zeta = \bar{z} \\ \zeta_0 = \overline{z_0}}}} \tag{4}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} u_0(z, \zeta_0) &= -\sum_{k=0}^{m} b_k{}^m(z, \zeta_0)\, d_k, \\ u_k(z, \zeta_0) &= \frac{1}{A_{n-k}(z, \zeta_0)} \left[\hat{c}_k A_{n-k}(z_0, \zeta_0) + \int_{z_0}^{z} A_{n-k}(\xi, \zeta_0)\, u_{k-1}(\xi, \zeta_0)\, d\xi\right], \\ k &= 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_0(z_0, \zeta) &= -A_n(z_0, \zeta) \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n(z_0, \zeta)\, c_k, \\ \tilde{u}_k(z_0, \zeta) &= \frac{1}{\tilde{A}_{m-k}(z_0, \zeta)} \left[\hat{d}_k \tilde{A}_{m-k}(z_0, \zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{A}_{m-k}(z_0, \xi)\, \tilde{u}_{k-1}(z_0, \xi)\, d\xi\right], \\ k &= 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\hat{c}_k = \sum_{j=0}^{n-k} a_j{}^{n-k}(z_0, \zeta_0)\, c_j \quad \text{und} \quad \hat{d}_k = \sum_{j=0}^{m-k} \tilde{b}_j{}^{m-k}(z_0, \zeta_0)\, d_j,$$

$z_0 \in G$, $\zeta_0 \in \overline{G} := \{z \mid \bar{z} \in G\}$ *fest*, $(z, \zeta) \in G \times \overline{G}$, $c_k \in \mathbf{C}$ $(k = 0, \ldots, n)$ *und* $d_k \in \mathbf{C}$ $(k = 0, \ldots, m-1)$,

$$d_m = -A_n(z_0, \zeta_0) \left[\sum_{k=0}^{n} a_k{}^n(z_0, \zeta_0)\, c_k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k{}^m(z_0, \zeta_0)\, d_k\right].$$

Die Funktionen $a_j{}^{n-k}$ $(j = 0, \ldots, n-k;\ k = 1, \ldots, n-1)$ und $\tilde{b}_j{}^{m-k}$ $(j = 0, \ldots, m-k;\ k = 1, \ldots, m-1)$ sind dabei die Koeffizienten der Differentialoperatoren

$$F_{n-k-1} \ldots F_0 = \sum_{j=0}^{n-k} a_j{}^{n-k} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \quad \text{und} \quad \tilde{F}_{m-k-1} \ldots \tilde{F}_0 = \sum_{j=0}^{m-k} \tilde{b}_j{}^{m-k} \frac{\partial^j}{\partial \zeta^j}$$

mit

$$F_k = \frac{\partial}{\partial z} + \big(\log A_k(z, \zeta)\big)_z, \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$\tilde{F}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \big(\log \tilde{A}_k(z, \zeta)\big)_\zeta, \qquad k = 0, \ldots, m-1,$$

$$A_{k-1} = A_k B_k, \qquad B_{k-1} = B_k + (\log A_k B_k)_{z\zeta}, \qquad k = n, \ldots, 1,$$

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{A_n}, \qquad \tilde{B}_m = B_n - (\log A_n)_{z\zeta},$$

$$\tilde{A}_{k-1} = \tilde{A}_k \tilde{B}_k, \qquad \tilde{B}_{k-1} = \tilde{B}_k + (\log \tilde{A}_k \tilde{B}_k)_{z\zeta}, \qquad k = m, \ldots, 1.$$

Ferner gilt $a_0{}^0 = \tilde{b}_0{}^0 \equiv 1$.

Die Differentialgleichung

$$u_{z\bar{z}} - \frac{\alpha_{\bar{z}}}{\alpha} u_z - \left(\overline{\frac{\alpha_{\bar{z}}}{\alpha}}\right) u_{\bar{z}} + \beta u = 0 \tag{7}$$

mit $\alpha \neq 0$ und $\alpha(z, \bar{z})$ analytisch in G besitzt für $\beta = \bar{\beta}$ reellwertige Lösungen. Nach [5] geht die Differentialgleichung (1) für den Fall, daß

$$(\log A_n \overline{A_n})_{\bar{z}} = 0 \quad \text{und} \quad B_n - \overline{B_n} = (\log A_n)_{z\bar{z}}$$

gilt und damit A_n in der Form $A_n = \alpha(z, \bar{z})/[\overline{\alpha(z, \bar{z})}]$ geschrieben werden kann, durch $w = \alpha^{-1} u$ über in Gleichung (7) mit

$$\beta(z, \bar{z}) = [\log \overline{\alpha(z, \bar{z})}]_z \, [\log \alpha(z, \bar{z})]_{\bar{z}} + [\log \alpha(z, \bar{z})]_{z\bar{z}} + B_n(z, \bar{z}).$$

Ist $B_0 \equiv 0$ in G, so können die Lösungen von (7) durch einen Differentialoperator $K_n{}^0$ dargestellt werden in der Form

$$u(z, \bar{z}) = \alpha K_n{}^0 g + \overline{\alpha K_n{}^0 h} \tag{8}$$

mit g und h holomorph in G und $K_n{}^0$ gemäß (2). Die in G definierten reellwertigen Lösungen von (7) erhält man durch $u(z, \bar{z}) = \alpha K_n{}^0 g + \overline{\alpha K_n{}^0 g}$ mit g holomorph in G.

Von [6] übernehmen wir die folgende Aussage über die allgemeinste Erzeugende der reellwertigen Lösungen von (7).

Satz 3: *Die allgemeinste Erzeugende* $\tilde{g}$ *einer reellwertigen Lösung von* (7) *in der Form* (8) *erhält man durch* $\tilde{g} = g + g_0$ *mit* g_0 *gemäß* (4). *Dabei muß noch*

$$g_0(z) = u_n(z, \zeta_0)|_{\zeta_0 = \bar{z}_0} = \left(\overline{\tilde{u}_n(z_0, \zeta)\Big|_{\substack{\zeta = \bar{z} \\ \zeta_0 = \bar{z}_0}}}\right)$$

gelten, wobei $\tilde{u}_n$ *nach Satz 2 zu bestimmen ist.*

Für die nachfolgenden Überlegungen ist es vorteilhaft, die auftretenden Gleichungen bzw. die Lösungen davon in gewisse Klassen einzuteilen. Für die Differentialgleichungen der Form

$$u_{z\bar{z}} + a u_z + b u_{\bar{z}} + c u = 0 \tag{9}$$

wird vereinbart:

$\mathfrak{D}_1$ bezeichnet die Menge der Differentialgleichungen vom Typ (9), zu denen es in G einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator $K_n{}^0$ gibt.

$\mathfrak{D}_2$ steht für die Menge der elliptischen Differentialgleichungen mit einem $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{m,0}$-Operator $\tilde{K}_m{}^0$.

$\mathfrak{D}^*$ bezeichne die Menge der Gleichungen, zu denen es sowohl einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator $K_n{}^0$ als auch einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}^{n,0}$-Operator $\tilde{K}_n{}^0$ derart gibt, daß $\tilde{K}_n{}^0 = \overline{K_n{}^0}$ gilt.

Für die Lösungen wird folgende Vereinbarung getroffen:

$\mathfrak{L}(\mathfrak{D}, G)$ bezeichne die Menge der Lösungen einer Differentialgleichung der Klasse $\mathfrak{D}$, die im Gebiet G definiert sind.

$\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}, G)$ ist die Menge der entsprechenden Lösungen, die sich mit der Erzeugenden g allein darstellen lassen.

$\mathfrak{L}_r(\mathfrak{D}, G)$ steht für die Menge der reellwertigen Lösungen.

Zunächst eine allgemeine Aussage über das Maximum der Lösung der elliptischen Differentialgleichung (9).

Satz 4: *Die Koeffizienten a, b und c in* (9) *seien in G analytisch, und es gelte $b = \bar{a}$ und* $\operatorname{Re} c < 0$ *in G. Nimmt eine in einem beliebigen Gebiete $G_1 \subset G$ definierte Lösung w von* (9) *das Maximum ihres Betrages in einem inneren Punkt von G_1 an, so gilt $w(z, \bar{z}) \equiv 0$ in G.*

Beweis: Wir benutzen dazu eine Idee von E. PESCHL für einen indirekten Beweis (vgl. [1]). Man geht von der Annahme aus, daß w in G_1 ein Maximum besitzt. Für das Auftreten eines Extremums von w in G_1 ist $(w\bar{w})_z = 0$ zu fordern. Man bildet jetzt den Ausdruck $(w\bar{w})_{z\bar{z}}$, der mit $(w\bar{w})_z = 0$ und unter Berücksichtigung der Gleichung (9) für $w \neq 0$ die Gestalt $(w\bar{w})_{z\bar{z}} = -w\bar{w}(c + \bar{c}) + 2w_z(\overline{w_z})$ annimmt. $(w\bar{w})_{z\bar{z}} < 0$, die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Maximums, ist mit $\operatorname{Re} c < 0$ jedoch offensichtlich verletzt ∎

Die Differentialgleichungen der Klasse $\mathfrak{D}^*$ besitzen nach [5] die Form (7) und ihre Lösungen die Gestalt (8), wobei noch

$$\alpha(z, \bar{z})/\overline{[\alpha(z, \bar{z})]} = A_n(z, \bar{z}),$$

$$\beta(z, \bar{z}) = \left(\log \overline{\alpha(z, \bar{z})}\right)_z \left(\log \alpha(z, \bar{z})\right)_{\bar{z}} + \left(\log \alpha(z, \bar{z})\right)_{z\bar{z}} + B_n(z, \bar{z})$$

gelten muß. Nunmehr soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Lösungen $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$ gleichen Realteil bzw. gleichen Imaginärteil besitzen. Es gelte in G die Darstellung $w_k = \alpha K_n{}^0 g_k + \overline{\alpha K_n{}^0 h_k}$, $k = 1, 2$. Die Funktionen

$$W_k = 2 \operatorname{Re} w_k = \alpha K_n{}^0(g_k + h_k) + \overline{\alpha K_n{}^0(g_k + h_k)}$$

sind dann wieder aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$. Sie sind identisch, falls w_1 und w_2 in ihren Realteilen übereinstimmen. Nach Satz 2 ist also

$$g_2 + h_2 = g_1 + h_1 + g_0 \quad \text{und} \quad g_2 + h_2 = g_1 + h_1 + h_0$$

mit g_0 und h_0 gemäß (4) zu fordern. Daraus folgt $g_0 - h_0 = 0$, d. h.

$$u_n(z, \zeta_0)|_{\zeta_0 = \bar{z}_0} = \bar{u}_n(z_0, \zeta)\Big|_{\substack{\zeta = \bar{z} \\ \zeta_0 = \bar{z}_0}}. \tag{10}$$

Genügen umgekehrt die Erzeugenden zweier Lösungen $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$ der Relation $g_2 + h_2 = g_1 + h_1 + g_0$, so gilt

$$w_1 = \alpha K_n{}^0 g_1 + \overline{\alpha K_n{}^0 h_1} \quad \text{und} \quad w_2 = \alpha K_n{}^0 g_2 + \overline{\alpha K_n{}^0(g_1 + h_1 + g_0 - g_2)}.$$

Unter Berücksichtigung von (10) folgt jetzt aber $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2$. Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen.

Satz 5: *Für zwei Funktionen $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$ gilt genau dann* $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2$, *falls die Erzeugenden g_1, h_1 und g_2, h_2 der Bedingung $g_2 + h_2 = g_1 + h_1 + g_0$ mit g_0 gemäß* (4) *genügen und die Relation* (10) *erfüllt ist.*

Entsprechend wird auch die folgende Aussage, die Imaginärteile zweier Lösungen aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$ betreffend, bewiesen.

Satz 6: *Für zwei Funktionen* $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}^*, G)$ *gilt genau dann* $\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im} w_2$, *falls die Erzeugenden* g_1, h_1 *und* g_2, h_2 *der Bedingung* $g_2 - h_2 = g_1 - h_1 + g_0$ *mit* g_0 *gemäß* (4) *genügen und die Relation*

$$u_n(z, \zeta_0)|_{z_0=\bar{z}_0} = -\overline{\bar{u}_n(z_0, \zeta)}\Big|_{\substack{\zeta=\bar{z}\\ \zeta_0=\bar{z}_0}} \tag{11}$$

erfüllt ist.

Mit $h_1 = h_2 \equiv 0$ in G erhält man für Funktionen der Klasse $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$ aus den letzten beiden Sätzen sofort den

Satz 7: a) *Für zwei Funktionen* $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$ *gilt genau dann* $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2$, *falls die Erzeugenden* g_1 *und* g_2 *der Bedingung* $g_1 = g_2 + g_0$ *mit* g_0 *gemäß* (4) *genügen und die Relation* (10) *erfüllt ist.*

b) *Für zwei Funktionen* $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$ *gilt genau dann* $\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im} w_2$, *falls die Erzeugenden* g_1 *und* g_2 *der Bedingung* $g_1 = g_2 + g_0$ *mit* g_0 *gemäß* (4) *genügen und die Relation* (11) *erfüllt ist.*

3. Verallgemeinerte holomorphe Funktionen

Die Funktionen aus $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ stellen eine Verallgemeinerung der holomorphen Funktionen dar. Nach [5] ist die Erzeugende g einer Lösung $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1) eindeutig durch $g = D_n w$ mit

$$D_k = \frac{-1}{B_{n-k+1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} D_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, n) \quad \text{und} \quad D_0 w = w$$

bestimmt, wenn für w die Darstellung $w = K_n{}^0 g$ mit $K_n{}^0$ gemäß (2) gilt und $B_k \neq 0$ in G für $k = 1, \ldots, n$ erfüllt ist. Den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $w_{\bar{z}} = 0$ entsprechen hier die Differentialgleichungen $\partial D_n w/\partial \bar{z} = 0$. Daß man die Funktionen aus $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G) \subset \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$, d. h. die Lösungen der Differentialgleichung (7) in der Darstellung (8) aus reellwertigen Funktionen aus $\mathfrak{L}_r(\mathfrak{D}^*, G)$ aufbauen kann, zeigt der

Satz 8: $U, V \in \mathfrak{L}_r(\mathfrak{D}^*, G)$ *mit* $U = \alpha K_n{}^0 g_1 + \overline{\alpha K_n{}^0 g_1}$ *und* $V = \alpha K_n{}^0 g_2 + \overline{\alpha K_n{}^0 g_2}$ *sind genau dann Real- und Imaginärteil einer Lösung* $w = U + iV \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$, *falls* $g_1 = i g_2 + g_0$ *mit* g_0 *gemäß* (4) *erfüllt ist.*

Beweis: Ist $w = U + iV = \alpha K_n{}^0 g$ mit g holomorph in G und $U, V \in \mathfrak{L}_r(\mathfrak{D}^*, G)$, so gilt

$$U = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) = \alpha K_n{}^0 \frac{g}{2} + \overline{\alpha K_n{}^0 \frac{g}{2}}$$

und

$$V = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) = \alpha K_n{}^0 \frac{g}{2i} + \overline{\alpha K_n{}^0 \frac{g}{2i}},$$

aber auch (vgl. Satz 3)

$$U = \alpha K_n{}^0 \left(\frac{g}{2} + g_{01}\right) + \overline{\alpha K_n{}^0 \left(\frac{g}{2} + g_{01}\right)},$$

$$V = \alpha K_n{}^0 \left(\frac{g}{2i} + g_{02}\right) + \overline{\alpha K_n{}^0 \left(\frac{g}{2i} + g_{02}\right)}.$$

Dabei ist $g_{0j} = u_{nj}$ $(j = 1, 2)$, wobei noch

$$u_{nj}(z, \zeta_0)|_{\zeta_0=\overline{z_0}} = \overline{\tilde{u}_{nj}(z_0, \zeta)}\Big|_{\substack{\zeta=\bar{z}\\ \zeta_0=\overline{z_0}}}$$

gelten muß, wenn die Funktionen u_{nj} und $\tilde{u}_{nj}$ von der Form (5) bzw. (6) sind. Deshalb muß für die Erzeugenden g_1 bzw. g_2 der Lösungen U und V gelten $g_1 = 2^{-1}g + g_{01}$ und $g_2 = (2i)^{-1} g + g_{02}$. Damit aber auch $g_1 = ig_2 + \tilde{g}_0$ mit $\tilde{g}_0 = g_{01} - ig_{02}$.

Erfüllen g_1 und g_2 umgekehrt die Gleichung $g_1 = ig_2 + \tilde{g}_0$, so ist

$$\begin{aligned} w = U + iV &= \alpha K_n{}^0(ig_2 + \tilde{g}_0) + \overline{\alpha K_n{}^0(ig_2 + \tilde{g}_0)} + \alpha K_n{}^0(ig_2) + \overline{\alpha K_n{}^0(-ig_2)} \\ &= \alpha K_n{}^0(2ig_2 + \tilde{g}_0) + \overline{\alpha K_n{}^0 \tilde{g}_0}. \end{aligned}$$

Damit ist $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$, da man nach Satz 2 die gleiche Lösung w mit nur einer Erzeugenden g darstellen kann ∎

Die reellwertigen bzw. die rein imaginären Lösungen der Klasse $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$ charakterisiert der folgende

Satz 9: *Es sei* $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$. *Dann gilt:*

a) *w ist genau dann reellwertig, wenn es die Darstellung $w = \alpha K_n{}^0 g_0$ mit g_0 gemäß* (4) *besitzt, wobei Gleichung* (11) *erfüllt sein muß.*

b) *w ist genau dann rein imaginär, wenn die Erzeugende g_0 von der Form gemäß* (4) *ist und die Bedingung* (10) *erfüllt ist.*

Beweis: Nach Satz 7b) stimmen zwei Funktionen $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}^*, G)$ genau dann in ihren Imaginärteilen überein, falls die Erzeugenden g_1 und g_2 der Bedingung $g_2 = g_1 + g_0$ mit g_0 gemäß (4) genügen und Gleichung (11) erfüllt ist. Mit $g_1 \equiv 0$ verschwindet der Imaginärteil von w_1. Alle anderen Funktionen w dieser Klasse, die ebenfalls reellwertig sind, erhält man dann mit der Erzeugenden $g_2 = g_0$, d. h. $w = \alpha K_n{}^0 g_0$. Den zweiten Teil der Aussage beweist man analog unter Verwendung von Satz 7a) ∎

4. Einige funktionentheoretische Eigenschaften der Lösungen aus $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$

Der $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator $K_n{}^0$ zur Differentialgleichung (1) ist gegeben durch (2), so daß gilt

$$w = K_n{}^0 g = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n(z, \bar{z}) \frac{\partial^k}{\partial z^k} g \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G) \qquad (12)$$

mit g holomorph in G. $B_0 \equiv 0$ in G ist nach Satz 1 notwendig und hinreichend für die Existenz eines solchen Operators. Wir stellen uns jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen die Funktion W, die durch

$$W = D^* w = \tilde{\alpha}(z, \bar{z})\, w_z + \tilde{\beta}(z, \bar{z})\, w_{\bar{z}} + \tilde{\gamma}(z, \bar{z})\, w \qquad (13)$$

aus einer Lösung $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1) gebildet wird, wiederum eine Lösung von (1) ist mit

$$W = K_n{}^0 g' \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G). \qquad (14)$$

Die Antwort liefert der folgende

Satz 10: $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ *gemäß* (12) *sei Lösung von* (1). *Die Funktion W in der Form* (13) *ist genau dann wieder Lösung von* (1) *mit $W = K_n{}^0 g'$, wenn gilt*

$$a_{k,z}^n a_{0,\bar{z}}^n = a_{k,\bar{z}}^n a_{0,z}^n, \qquad k = 1, \ldots, n. \qquad (15)$$

Dabei ist dann $W = w_z - (a_{0,z}^n / a_{0,\bar{z}}^n)\, w_{\bar{z}}$.

Beweis: Die Bedingung $W = D^*w = D^* \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n g^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n g^{(k+1)}$ mit g holomorph in G liefert das System

$$\tilde{\alpha} a^n_{0,z} + \tilde{\beta} a^n_{0,\bar{z}} + \tilde{\gamma} a_0{}^n = 0, \tag{16}$$

$$\tilde{\alpha}(a^n_{k,z} + a^n_{k-1}) + \tilde{\beta} a^n_{k,\bar{z}} + \tilde{\gamma} a_k{}^n - a^n_{k-1} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

$$\tilde{\alpha} a_n{}^n - a_n{}^n = 0. \tag{18}$$

Da $a_n{}^n \equiv 1$ ist (vgl. Satz 1), so folgt aus (18) $\tilde{\alpha} \equiv 1$. Setzt man in (17) $k = n$, so ergibt sich $\tilde{\gamma} \equiv 0$. Die Gestalt des Koeffizienten $\tilde{\beta}$ ergibt sich schließlich aus (16). Die restlichen Gleichungen des Systems (17) liefern jetzt die Bedingung (15) ∎

Mit $\mathfrak{L}_h{}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ wird nunmehr die Teilmenge der Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ bezeichnet, für die die Bedingung (14) erfüllt ist. Solche Lösungsmengen treten zum Beispiel auf bei allen Differentialgleichungen der Form

$$w_{z\bar{z}} + \big(\log A_n(\eta)\big)_z\, w_{\bar{z}} + B_n(\eta)\, w = 0$$

mit $\eta = z + \bar{z}$, zu denen es einen $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0}$-Operator gibt. Spezialfälle davon wurden in jüngster Zeit in [3] und [9] angegeben. Aber auch die in [1] untersuchte Gleichung fällt in diese Klasse.

Die Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h{}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1), die wir im folgenden betrachten wollen, bilden einen Vektorraum über $\mathbf{C}$, der in bezug auf den Differentiationsprozeß

$$D^*w = w_z - \frac{a^n_{0,z}}{a^n_{0,\bar{z}}}\, w_{\bar{z}} \tag{19}$$

abgeschlossen ist. Durch $Z_n{}^{(k)}(z, z_0) := K_n{}^0[(z - z_0)^k]$, $k \in \mathbf{Z}$, mit

$$K_n{}^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n \frac{\partial^k}{\partial z^k} \qquad \mathfrak{B}_{\mathrm{I}}{}^{n,0} - \text{Operator zu } (1),$$

wird nunmehr eine formale Potenz definiert. Es gilt

$$Z_n{}^{(k)}(z, z_0) = \sum_{v=0}^{n} a_v{}^n k(k-1) \ldots (k - v + 1)\,(z - z_0)^{k-v} \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G).$$

Mit $n = 0$ erhält man die Potenzen $Z_0{}^{(k)}(z, z_0) = (z - z_0)^k$. Die Ableitung (im Sinne von Satz 10) der formalen Potenz ergibt sich zu

$$D^*Z_n{}^{(k)}(z, z_0) = K_n{}^0[k(z - z_0)^{k-1}] = kZ_n{}^{(k-1)}(z, z_0).$$

Für $k = 0$ gilt speziell $D^*Z_n{}^{(0)}(z, z_0) = 0$, so daß $Z_n{}^{(0)}(z, z_0)$ eine formale Konstante genannt werden kann. Alle Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h{}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1), die mit der Erzeugenden $g(z) = c$, $c \in \mathbf{C}$, gebildet werden, sind demnach formale Konstanten. Sie lauten $w = ca_0(z, \bar{z})$. Damit kann man jetzt einen Entwicklungssatz für Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h{}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1) angeben.

Satz 11: *$w \in \mathfrak{L}_h{}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ sei in $|z - z_0| < \varrho$ definiert. Dann kann w in eindeutiger Form dargestellt werden durch*

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Z_n{}^{(k)}(z, z_0), \qquad \alpha_k \in \mathbf{C}. \tag{20}$$

Die Reihe konvergiert für $|z - z_0| < \varrho$, die Konstanten α_k sind die Taylorkoeffizienten der Erzeugenden g von w bei der Entwicklung um z_0.

Beweis: Nach Satz 2 ist die Erzeugende g einer in $|z - z_0| < \varrho$ definierten Lösung $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ von (1) dort eindeutig bestimmt. Sie kann also in eine Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (z - z_0)^\nu \tag{21}$$

entwickelt werden. Damit gilt

$$w = K_n{}^0 g = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n \sum_{\nu=k}^{\infty} \alpha_\nu \nu(\nu - 1) \ldots (\nu - k + 1) (z - z_0)^{\nu-k}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{k=0}^{n} a_k{}^n \nu(\nu - 1) \ldots (\nu - k + 1) (z - z_0)^{\nu-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu Z_n{}^{(\nu)}(z, z_0).$$

Da die Reihe (21) in $|z - z_0| < \varrho$ konvergiert, konvergiert auch diese Entwicklung dort. Die Eindeutigkeit der Darstellung (20) ist wegen des oben angeführten eindeutigen Zusammenhanges zwischen einer Lösung $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$ und ihrer Erzeugenden sichergestellt ∎

Als Definitionsgebiet einer Lösung w von (1) tritt im allgemeinen nicht die ganze (offene) Ebene auf, G wird oft schon durch die Form der Koeffizienten der Differentialgleichung eingeschränkt. Deshalb kann der Begriff der ganzen Funktionen nicht auf Funktionen $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ übertragen werden. Für Lösungen der Gleichung $w_{z\bar{z}} + n(n + 1)(1 + z\bar{z})^{-2} w = 0$ ist dies noch möglich gewesen (vgl. [1]).

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen kann folgendermaßen verallgemeinert werden.

Satz 12: *Es seien $w_1, w_2 \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ und $w_1 = w_2$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\} \subset G$. Dann gilt $w_1 = w_2$ in ganz G.*

Beweis: Nach dem Entwicklungssatz lassen sich w_1 und w_2 um den Punkt $z_0 \in G$ entwickeln. Diese formalen Potenzreihen konvergieren in dem größten, ganz in G liegenden Kreise K_0 und sind dort eindeutig bestimmt. Sind die beiden Funktionen in $U_\varepsilon(z_0) \subset K_0$ einander gleich, so besitzen sie daher dort dieselbe Erzeugende g. Diese läßt sich nur auf eine einzige Art in G fortsetzen, weshalb w_1 und w_2 dann in ganz G übereinstimmen ∎

Aus diesem Satz ergeben sich wie in der klassischen Funktionentheorie unmittelbar ein Satz über die analytische Fortsetzung und ein Monodromiesatz. Die Beweise zu diesen Sätzen können wegen des eindeutigen Zusammenhanges zwischen der Lösung $w = K_n{}^0 g$ und ihrer Erzeugenden g fast wortwörtlich aus der klassischen Funktionentheorie übernommen werden, weshalb hier auf ihre Darlegung verzichtet werden soll.

Satz 13: *Für zwei Gebiete G_1 und G_2 gelte $\Delta = G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Dann gibt es zu jedem Paar von Funktionen $w_j \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G_j)$, $j = 1, 2$, für die $w_1 = w_2$ in Δ gilt, genau eine Funktion $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G_1 \cup G_2)$ mit $w = w_1$ in G_1 und $w = w_2$ in G_2.*

w_1 und w_2 werden als *reguläre Funktionselemente* ein und derselben Funktion w bezeichnet. Das Problem der expliziten analytischen Fortsetzung und die Frage nach allen möglichen Funktionselementen lassen sich stets auf die entsprechenden Probleme für die Erzeugende zurückführen, die ja eindeutig bestimmt und holomorph ist.

Satz 14: *Sei $U_\varepsilon(z_0) \subset G$ und $w_0 \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, U_\varepsilon(z_0))$ ein in $U_\varepsilon(z_0)$ reguläres Funktionselement. Läßt sich w_0 entlang eines jeden von z_0 ausgehenden Weges in G im Sinne von Satz 13 analytisch fortsetzen, so erhält man eine in ganz G eindeutige Funktion aus $\mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$.*

Die in einer punktierten Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ in eindeutiger Weise definierten Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, \dot{U}_\varepsilon(z_0))$ können dort nach [6] dargestellt werden durch $w = K_n^0 g$ mit

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k.$$

Die Erzeugende ist demnach in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ holomorph und eindeutig bestimmt. Unter Verwendung der oben eingeführten formalen Potenzen $Z_n^{(k)}(z, z_0)$ kann man nun auch formale Laurentreihen einführen. Die in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ definierten Lösungen w aus $\mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, \dot{U}_\varepsilon(z_0))$ lassen sich in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ konvergente formale Laurentreihen derart entwickeln, daß gilt

$$w = K_n^0 \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k Z_n^{(k)}(z, z_0).$$

Wie in der Theorie der holomorphen Funktionen ist es auch hier möglich, die Singularitäten zu klassifizieren:

a) Für ein positives k sei $\alpha_{-k} \neq 0$, es sei aber $\alpha_\mu = 0$ für $\mu = -(k+1), -(k+2), \ldots$ Dann spricht man von einem *polarigen Verhalten* von w mit der *Ordnung* k. Dieses tritt genau dann auf, wenn die Erzeugende g in z_0 einen Pol der Ordnung k besitzt.

b) Ist $\alpha_\mu \neq 0$ für unendlich viele negative ganzzahlige μ, so spricht man von einer *wesentlichen Singularität* von w in z_0.

Ausgehend vom Begriff des Residuums bei meromorphen Funktionen übertragen wir diesen Begriff auf Funktionen $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, \dot{U}_\varepsilon(z_0))$ folgendermaßen: g besitze in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ die Darstellung

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$

(das Residuum ist also α_{-1}), und w besitze dort die formale Laurentreihe

$$w = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k Z_n^{(k)}(z, z_0).$$

Dann nennt man

$$\operatorname*{Res}_{z_0} w(z, \bar{z}) = K_n^0\left[\operatorname*{Res}_{z_0} g(z)\right] = K_n^0(\alpha_{-1}) = \alpha_{-1} a_0^n$$

das *Residuum* von w in z_0. Dieses ist eine formale Konstante, gebildet mit $\operatorname*{Res}_{z_0} g(z)$.

Die formale Potenz kann unabhängig von der Forderung (15) an die Koeffizienten des Operators K_n^0 gemäß

$$Z_n^{(k)}(z, z_0) := K_n^0[(z - z_0)^k] \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, G)$$

definiert werden. Damit erweitern sich die Aussagen der Sätze 11 bis 14 auch auf Funktionen der Klasse $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, \tilde{G})$, wobei $\tilde{G}$ jeweils das entsprechende Definitionsgebiet sei[1]). Ebenso kann man die in $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ definierten Lösungen $w \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{D}_1, \dot{U}_\varepsilon(z_0))$ in formale Laurentreihen entwickeln, die auftretenden Singularitäten entsprechend klassifizieren und den Begriff des Residuums auch auf Lösungen dieser Klasse übertragen.

---

[1]) Für reell-analytische Lösungen einer Differentialgleichung lassen sich entsprechende Aussagen mit Methoden der reellen Analysis beweisen.

5. Integralsätze für Funktionen aus $\mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$

Für Funktionen $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ kann man auch den Begriff des Kurvenintegrals einführen. γ sei eine ganz in G verlaufende rektifizierbare Kurve, die die Punkte $z_0, z_1 \in G$ miteinander verbindet. Dann heißt

$$I(w, \gamma) := K_n{}^0 \left[\int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta \right]$$

formales Kurvenintegral. Dieses stellt eine formale Konstante dar. $W \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ ist *Stammfunktion* zu $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$, wenn gilt $D^*W = w$ mit D^* gemäß (19). Damit kann folgende Aussage bewiesen werden.

Satz 15: *Die in G definierte Stammfunktion zu $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ ist bis auf eine formale Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Lösung $w \in \mathfrak{L}^*(\mathfrak{D}_1, G)$ besitze die Erzeugende g, die Stammfunktion $W \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ die Erzeugende $\tilde{g}$, die wiederum Stammfunktion (im klassischen Sinne) zu g ist. Beide unterscheiden sich nur um eine komplexe Konstante. Damit folgt, daß W bis auf eine formale Konstante eindeutig bestimmt ist ∎

Dem Cauchyschen Integralsatz der klassischen Funktionentheorie entspricht hier der

Satz 16: *$w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ besitze die Darstellung $w = K_n{}^0 g$ mit g holomorph in G. Dann existiert das Kurvenintegral $I(w, \gamma)$ für jeden Weg γ, der in G liegt. Der Wert des Integrals, eine formale Konstante, ist unabhängig von der Wahl des Weges, der z_0 mit z_1 verbindet.*

Beweis: Für die Erzeugende g von $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ sind die Voraussetzungen des klassischen Integralsatzes von Cauchy erfüllt. Es existiert also das Kurvenintegral $\int_\gamma g(z)\, dz$ für jeden in G verlaufenden Weg, wobei der Wert wegunabhängig ist. Daraus folgt unmittelbar obige Aussage ∎

Dazu äquivalent ist der folgende Satz, dessen Beweis sich sofort aus der entsprechenden Aussage über holomorphe Funktionen ergibt.

Satz 17: *Es sei $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ und $\tilde{\gamma}$ eine in G verlaufende, nicht notwendig doppelpunktfreie geschlossene Kurve. Dann ist $I(w, \tilde{\gamma}) = 0$.*

Zur Bestimmung des formalen Kurvenintegrals ist der folgende Zusammenhang mit der oben definierten Stammfunktion von Interesse.

Satz 18: *$w = K_n{}^0 g$ sei aus $\mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$, G nicht notwendig einfach zusammenhängend, $z_0 \in G$ beliebig aber fest, $\hat{\gamma}$ liege ganz in G und verbinde z_0 mit z, $I(w, \hat{\gamma})$ sei wegunabhängig. Dann ist $I(w, \hat{\gamma})$ eine Stammfunktion $W \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$ von w.*

Beweis: w kann in G mit einer in G holomorphen Funktion g gemäß $w = K_n{}^0 g$ dargestellt werden. Für g gilt nun, daß das Integral $\int_{\hat{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta$ wegunabhängig ist. $\tilde{g}(z) = \int_{\hat{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta$ ist Stammfunktion zu g in G. Dann folgt

$$I(w, \hat{\gamma}) = K_n{}^0 \left[\int_{\hat{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta \right] = K_n{}^0 \tilde{g} = W(z, \bar{z})$$

$$\text{mit } D^*W = K_n{}^0 \tilde{g}' = K_n{}^0 g = w \quad ∎$$

Damit ist es jetzt möglich, die folgende Aussage zu formulieren. Sie folgt sofort aus dem entsprechenden Satz der klassischen Funktionentheorie.

Satz 19: *$w = K_n^0 g$ mit g holomorph in G sei aus $\mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G)$, $\bar{g}$ sei Stammfunktion zu g, γ liege ganz in G und verbinde z_0 mit z_1 $(z_0, z_1 \in G)$. Dann gilt $I(w, \gamma) = K_n^0(\bar{g}(z_1)) - K_n^0(\bar{g}(z_0))$.*

Dem Residuensatz für holomorphe Funktionen entspricht hier folgende Aussage, die sich unter Berücksichtigung der oben angegebenen Definition des Residuums sofort beweisen läßt.

Satz 20: *G_m sei ein Gebiet, das durch Herausnahme von endlich vielen Punkten z_j $(j = 1, \ldots, m)$ aus einem einfach zusammenhängenden Gebiet entsteht, $w \in \mathfrak{L}_h^*(\mathfrak{D}_1, G_m)$ habe in z_j isolierte Singularitäten, $\tilde{\gamma}$ sei eine in G_m liegende geschlossene Kurve, die nicht durch die z_j hindurchgeht und $n_j(\tilde{\gamma}, z_j)$ die entsprechenden Umlaufzahlen. Dann gilt*

$$I(w, \tilde{\gamma}) = 2\pi i K_n^0 \left[\sum_{j=1}^{m} n_j(\tilde{\gamma}, z_j) \operatorname*{Res}_{z_j} g(z)\right] = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} n_j(\tilde{\gamma}, z_j) \operatorname*{Res}_{z_j} w(z, \bar{z}).$$

LITERATUR

[1] BAUER, K. W.: Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} \pm n(n+1) w = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. Bonn, Math. Schr. **23** (1965), 1—98.
[2] BAUER, K. W.: Differentialoperatoren bei verallgemeinerten Euler-Gleichungen. Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz **121** (1979), 1—17.
[3] BAUER, K. W.: Über Differentialgleichungen der Form $w_{z\zeta} + A(n, \eta) w_\zeta + B(n, \eta) w = 0$, $n \in N$, $\eta = z + \zeta$. Seminarbericht. Graz 1985 (unveröff.).
[4] BAUER, K. W., and S. RUSCHEWEYH: Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Lecture Notes in Math. **791** (1980).
[5] BERGLEZ, P.: Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen. Ann. Mat. Pura Appl. **143** (1986), 155—185.
[6] BERGLEZ, P.: On the Representation of Solutions of Partial Differential Equations in the Neighbourhood of Isolated Singularities. Erscheint in Kürze.
[7] BERS, L.: Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York: University 1953.
[8] HEERSINK, R.: Über die Fortsetzung einer lokalen Lösungsdarstellung bei elliptischen Differentialgleichungen. Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz **192** (1983), 1—7.
[9] TOMANTSCHGER, K. W.: Allgemeine Darstellungssätze für die Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung. Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz **134** (1980), 1—105.
[10] VEKUA, I. N.: Verallgemeinerte analytische Funktionen. Berlin: Akademie-Verlag **1963**.

Manuskripteingang: 16. 01. 1986

VERFASSER:

Dr. PETER BERGLEZ
Institut für Mathematik der Technischen Universität
A-8010 Graz, Kopernikusgasse 24