

Ein abstraktes nichtlineares Cauchy-Kowalewskaja-Theorem mit singulären Koeffizienten I¹⁾

M. REISSIG

Es wird ein abstraktes nichtlineares Cauchy-Kowalewskaja-Problem mit singulären Koeffizienten untersucht. Gesucht werden Lösungen dieses Problems, die auf der Singularitätenfläche $t = 0$ stetig sind. Unter Anwendung der Banachraumskalen-Methode wird gezeigt, welchen Einfluß die Ordnung der Singularität auf die Lösungen des abstrakten Problems besitzt.

Исследуется абстрактная нелинейная проблема Коши-Ковалевской с сингулярными коэффициентами. Ищутся решения этой проблемы, непрерывные на вырожденной поверхности $t = 0$. Применением шкалы Банаховых пространств показывается, какое влияние на решения абстрактной проблемы имеет порядок сингулярности.

An abstract nonlinear Cauchy-Kowalewskaja problem with singular coefficients is regarded. We want to prove the existence of continuous solutions on the singular face $t = 0$. By applying the method of the Banach space scales we show which role the order of the singularity plays for the solutions of the abstract problem.

1. Es gibt einige Arbeiten, die der Behandlung abstrakter Cauchy-Kowalewskaja-Probleme in Banachraumskalen gewidmet sind. Durch die Formulierung solcher abstrakten Probleme in Form von Operatorgleichungen werden eine Reihe klassischer Spezialfälle erfaßt, so z. B. das klassische Cauchy-Kowalewskaja-Problem. TREVES [5] bewies ein entsprechendes Theorem für den linearen Fall. Eine Untersuchung des nichtlinearen Falls erfolgte von NIRENBERG [1], NISHIDA [2] und OVSJANNIKOV [3]. Wir wollen hier das abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Problem

$$t^l \frac{dw}{dt} + cw = t^{l-\sigma} \mathcal{L}_1(z, t, w) + \mathcal{L}_2(z, t, w)^2 \quad (1)$$

untersuchen. Hierbei seien $l \geq 0$ und $0 \leq \sigma < 1$ reelle Konstanten, c sei eine beliebige komplexe Konstante. Außerdem bilden die Operatoren \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 eine Banachraumskala in sich ab. In [1, 2] wurde unter der Voraussetzung $c = l = \sigma = \mathcal{L}_2 = 0$ für (1) das Anfangswertproblem mit $w(z, 0) = 0$ gelöst. Es ergibt sich daraus unmittelbar die Frage, inwieweit man für den singulären Fall von (1) die Existenz von Lösungen in der Skala zeigen kann. Die Analyse zeigt, daß wir zwei Fälle unterscheiden müssen.

Definition: Das abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Problem (1) besitzt in $t = 0$ eine *schwach* (bzw. *stark*) *singuläre Stelle*, wenn für die Ordnung l dieser Stelle $0 \leq l < 1$ (bzw. $l \geq 1$) gilt. Im weiteren wollen wir dann von einem *schwach* (bzw. *stark*) *singulären abstrakten Cauchy-Kowalewskaja-Problem* sprechen.

¹⁾ Vortrag auf der Konferenz „Complex Analysis“ (s. Z. Anal. Anw. H. 2 (1986)).

²⁾ Bei Anwendung der Banachraumskalen-Methode spielen die Ortsvariablen gegenüber der Zeitvariablen eine untergeordnete Rolle. Das rechtfertigt die Verwendung der gewöhnlichen Ableitung d/dt in (1).

2. Es sei $(B_s, \|\cdot\|_s)_{0 < s \leq 1}$ eine Banachraumskala. Für gewisse positive ϱ, η und R sei

$$\mathcal{M}_{\varrho, \eta, R}^s = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\} \times \{t \in \mathbb{R} : |t| < \eta\} \times \mathcal{K}_w^s$$

mit $\mathcal{K}_w^s = \{w \in B_s : \|w\|_s < R\}$, und $\mathcal{L}_i : \mathcal{M}_{\varrho, \eta, R}^s \rightarrow \dots$ ($i = 1, 2$) seien Operatoren mit den folgenden Eigenschaften (bez. \mathcal{L}_1 analog zu [1, 2]; K, L, N, P — gewisse positive Konstanten, w, v — beliebige Elemente aus $\mathcal{K}_w^s, w_0 \in \mathcal{K}_w^s$ fixiert):

(B₁) $\mathcal{L}_1 : \mathcal{M}_{\varrho, \eta, R}^s \rightarrow B_{s'}$ ist stetig im Falle $s' < s$ und

$$\|\mathcal{L}_1(z, t, w_0)\|_{s'} \leq \frac{K}{1-s}, \quad \|\mathcal{L}_1(z, t, w) - \mathcal{L}_1(z, t, v)\|_{s'} \leq \frac{P}{s-s'} \|w - v\|_s;$$

(B₂) $\mathcal{L}_2 : \mathcal{M}_{\varrho, \eta, R}^s \rightarrow B_s$ ist stetig und

$$\|\mathcal{L}_2(z, t, w_0) - \mathcal{L}_2(z, 0, w_0)\|_s \leq Nt,$$

$$\|\mathcal{L}_2(z, t, w) - \mathcal{L}_2(z, t, v)\|_s \leq L \|w - v\|_s.$$

3. Gegeben sei das schwach singuläre abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Problem (1). Durch die Transformation in der Zeitvariablen

$$t = [(1 - \alpha) \tau]^{1/(1-\alpha)} \quad (2)$$

mit $\alpha = \max(l, \sigma)$ wird (1) in ein abstraktes Problem der Gestalt

$$\frac{dw}{d\tau} = F(z, \tau, w) \quad (3)$$

überführt. Setzen wir voraus, daß für $w_0 = 0$ die Bedingung aus (B₁) erfüllt ist, dann ergibt sich mit [1, 2] die Existenz einer eindeutigen Lösung $w = w(z, \tau)$ von (3) aus B_s mit dem Anfangswert $w(z, 0) = 0$. Diese Lösung hängt stetig differenzierbar von τ in einem Intervall $[0, a(1-s))$ ab, wobei $a > 0$ und $0 < s < 1$ sind. Die Rücktransformation von (3) mit (2) liefert eine in t stetige Lösung aus B_s von (1), die in jedem Zeitintervall $[0, T(s)]$ mit $T(s) < [(1-\alpha)a(1-s)]^{1/(1-\alpha)}$ definiert ist und den Anfangswert $w(z, 0) = 0$ realisiert. Mit diesen Überlegungen erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1: Es sei das schwach singuläre abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Anfangswertproblem

$$t^\sigma \frac{dw}{dt} + cw = t^{1-\sigma} \mathcal{L}_1(z, t, w) + \mathcal{L}_2(z, t, w) \quad (0 \leq \sigma < 1),$$

$$w(z, 0) = 0$$

gegeben. Sind die Bedingungen (B₁) und (B₂) (für $w_0 = 0$ nur (B₁)) erfüllt, dann existiert eine Konstante $a > 0$, so daß das obige Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung $w \in B_s$ besitzt, die von t in jedem Intervall $(0, T(s)]$ stetig differenzierbar abhängt und in $t = 0$ nur stetig fortsetzbar ist, wobei $T(s) < [(1-\alpha)a(1-s)]^{1/(1-\alpha)}$ mit $\alpha = \max(l, \sigma)$ ist.

Die schwache Singularität verschlechtert gegenüber dem Fall $c = l = \sigma = 0$ die Eigenschaften der Lösungen von (1) bez. der Zeitvariablen, gestattet es aber dennoch, Anfangswertprobleme zu lösen.

³⁾ Die Norm wird bez. der Ortsvariablen gebildet.

4. Gegeben sei ein *stark singuläres abstraktes Cauchy-Kowalewskaja-Problem* mit $\operatorname{Re} c > 0$. Für den Beweis von Satz 2 benötigen wir das folgende

Lemma: Es sei G ein beliebiges Gebiet der komplexen Ebene. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$t^l \frac{\partial w}{\partial t} + cw = g(z, t) \quad (4)$$

mit $l \geq 1$ und $\operatorname{Re} c > 0$. Außerdem sei $g = g(z, t) \in \mathcal{E}(\bar{D})$, wobei $D = G \times [0, T]$ mit $T > 0$ ist. Dann existiert genau eine Lösung $w = w(z, t) \in \mathcal{E}(\bar{D})$ der Gleichung (4), die zusätzlich der Bedingung $cw(z, 0) = g(z, 0)$ genügt.

Beweisskizze: Wir machen den Lösungsansatz

$$w = \int_0^{\infty} e^{-cs} g(z, \varphi_l(t, s)) ds \quad (5)$$

mit

$$\varphi_l(t, s) = \begin{cases} t e^{-s} & \text{für } l = 1 \\ t[(l-1)st^{l-1} + 1]^{-1/(l-1)} & \text{für } l > 1. \end{cases}$$

Wegen $\operatorname{Re} c > 0$ ist die gleichmäßige Konvergenz des Integrals bez. $(z, t) \in \bar{D}$ gesichert. Mit den Sätzen über uneigentliche Parameterintegrale überprüft man die Behauptungen des Lemmas, insbesondere die Beziehung $cw(z, 0) = g(z, 0)$. Außerdem läßt sich leicht zeigen, daß die homogene Gleichung (4) im Raum $\mathcal{E}(\bar{D})$ nur die triviale Lösung besitzt ■

Satz 2: Gegeben sei das stark singuläre abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Problem

$$t^l \frac{dw}{dt} + cw = t^{l-\sigma} \mathcal{L}_1(z, t, w) + \mathcal{L}_2(z, t, w) \quad (0 \leq \sigma < 1) \quad (6)$$

mit $\operatorname{Re} c > 0$ und konstant. Sind die Bedingungen (B_1) und (B_2) mit w_0 als Lösung der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(z, 0, w)$, $\|w_0\|_1 < R$ und $L/\operatorname{Re} c < 1$ erfüllt, dann gibt es eine Konstante $a > 0$, so daß genau eine Lösung w des obigen Problems existiert mit $w(\cdot, t) \in \mathcal{H}_w^a$ für $t \in [0, T(s)]$, $T(s) < [a(1-s)]^{1/(1-\sigma)}$, die von t im Intervall $(0, T(s)]$ stetig differenzierbar abhängt, in $t = 0$ stetig fortsetzbar ist und der Bedingung $t|dw/dt| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ genügt. Die Lösung w realisiert den Anfangswert $w(z, 0) = w_0$.

Beweis: Wir wenden die Methode der sukzessiven Approximation an. Aus (6) ergibt sich auf natürliche Weise das folgende Iterationsschema:

$$t^l \frac{dw^{(k)}}{dt} + cw^{(k)} = t^{l-\sigma} \mathcal{L}_1(z, t, w^{(k-1)}) + \mathcal{L}_2(z, t, w^{(k-1)}) \quad \text{für } k \geq 1, \quad (7)$$

$$w^{(0)} = w_0 \quad \text{mit } cw_0 = \mathcal{L}_2(z, 0, w_0).$$

Mit der Substitution $v^{(k)} = w^{(k+1)} - w^{(k)}$ für $k \geq 0$ und der zu (5) äquivalenten Integraldarstellung

$$w = \int_0^t \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) g(z, \tau) d\tau$$

ergibt sich aus (7) folgendes äquivalente System für die Folgen $\{w^{(k)}\}$ und $\{v^{(k)}\}$:

$$w^{(k)} = \int_0^t \tau^{-l} \exp \left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t} \right)^{l-1} \right] \right) \times [\tau^{l-\sigma} \mathcal{L}_1(z, \tau, w^{(k-1)}(z, \tau)) + \mathcal{L}_2(z, \tau, w^{(k-1)}(z, \tau))] d\tau, \quad (8)$$

$$v^{(k)} = \int_0^t \tau^{-l} \exp \left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t} \right)^{l-1} \right] \right) [\tau^{l-\sigma} (\mathcal{L}_1(z, \tau, w^{(k)}) - \mathcal{L}_1(z, \tau, w^{(k-1)})) + \mathcal{L}_2(z, \tau, w^{(k)}) - \mathcal{L}_2(z, \tau, w^{(k-1)})] d\tau, \quad (9)$$

$$v^{(0)} = \int_0^t \tau^{-l} \exp \left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t} \right)^{l-1} \right] \right) \times [\tau^{l-\sigma} \mathcal{L}_1(z, \tau, w^{(0)}) + \mathcal{L}_2(z, \tau, w^{(0)}) - c w^{(0)}] d\tau.$$

Wir werden die Aussagen des Satzes in fünf Schritten beweisen.

1. Wir zeigen die Existenz eines $a > 0$, so daß für $T(s) < [a(1-s)]^{1/(1-\sigma)}$ die Folge der Näherungen $\{w^{(k)}\}$ in \mathcal{H}_w^s liegt. Mit den Lipschitzbedingungen aus (B₁) und (B₂) für die Operatoren \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \|v^{(k)}\|_s(t) &= \sup \{ \|v^{(k)}(\cdot, \tau)\|_s : \tau \in [0, t] \} \\ \|v^{(k)}\|_s(t) &\leq L \|v^{(k-1)}\|_s(t) \int_0^t \tau^{-l} \exp \left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t} \right)^{l-1} \right] \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \tau^{-\sigma} P \frac{\|v^{(k-1)}\|_{s(\tau)}(\tau)}{s(\tau) - s} d\tau = \frac{Lc}{\operatorname{Re} c} \|v^{(k-1)}\|_s(t) \\ &\quad + \int_0^t \tau^{-\sigma} P \frac{\|v^{(k-1)}\|_{s(\tau)}(\tau)}{s(\tau) - s} d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

für $k \geq 1$ und $s < s(\tau) < 1$. In diesem Schritt benutzen wir außerdem, daß

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ t \geq 0}} \left| \exp \left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t} \right)^{l-1} \right] \right) \right| = 1$$

ist. Es seien die Funktionale $\lambda_k \equiv M[v^{(k)}]$ mit

$$M[v^{(k)}] := \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_{k+1}(1-s)}} \|v^{(k)}\|_s(t) \left(\frac{a_k(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) \quad (k \geq 0) \quad (11)$$

gegeben. Die Folge der Parameter $\{a_k\}$ wird nach der Vorschrift $a_{k+1} = a_k(1 - 1/(k+2)^2)$ mit geeignetem $a_0 > 0$ und $a_0^{1/(1-\sigma)} < \eta$ gewählt. Wählt man außerdem in (10)

$$s(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + s - \frac{\tau^{1-\sigma}}{a_k} \right) \quad \text{mit} \quad \tau^{1-\sigma} < a_k(1-s),$$

so ergibt sich aus (10) und (11) durch äquivalente Umformungen wie in [2]

$$\lambda_k \leq \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_{k+1}(1-s)}} \frac{L}{\operatorname{Re} c} \|v^{(k-1)}\|_s(t) \left(\frac{a_k(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) + 4\lambda_{k-1} a_k \frac{P}{1-\sigma}$$

für $k \geq 1$. Da

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_{k+1}(1-s)}} \|v^{(k-1)}\|_s(t) \left(\frac{a_k(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) \\ & \leq \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_k(1-s)}} \|v^{(k-1)}\|_s(t) \left(\frac{a_{k-1}(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) \end{aligned}$$

ist, folgt daraus

$$\lambda_k \leq \left(\frac{L}{\operatorname{Re} c} + \frac{4Pa_0}{1-\sigma} \right) \lambda_{k-1} \leq \left(\frac{L}{\operatorname{Re} c} + \frac{4Pa_0}{1-\sigma} \right)^k \lambda_0. \quad (12)$$

Für $v^{(0)}$ erhalten wir aus (9) unter Verwendung der Voraussetzungen für w_0 von (B_1) und (B_2) $\|v^{(0)}\|_s \leq (Nt/\operatorname{Re} c) + Kt^{1-\sigma}/(1-s)(1-\sigma)$ für $t^{1-\sigma} < a_0(1-s)$. Per Definition ergibt sich für λ_0

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_1(1-s)}} \|v^{(0)}\|_s(t) \left(\frac{a_0(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) \\ &\leq \sup_{\substack{0 < s < 1 \\ t^{1-\sigma} < a_0(1-s)}} \left(\frac{Nt}{\operatorname{Re} c} + \frac{Kt^{1-\sigma}}{(1-s)(1-\sigma)} \right) \left(\frac{a_0(1-s)}{t^{1-\sigma}} - 1 \right) \\ &\leq a_0 \left(\frac{Na_0^{\sigma/(1-\sigma)}}{\operatorname{Re} c} + \frac{K}{1-\sigma} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Aus (11) und (12) resultiert folgende Normabschätzung für die $(k+1)$ -te Näherung $w^{(k+1)}$ in der Skala $(B_s, \|\cdot\|_s)$:

$$\|w^{(k+1)}\|_s \leq \lambda_0 \sum_{j=0}^k \left(\frac{L}{\operatorname{Re} c} + \frac{4Pa_0}{1-\sigma} \right)^j [(j+2)^2 - 1] + \|w^{(0)}\|_s.$$

Hinreichend dafür, daß alle $w^{(k)}$ in \mathcal{K}_w^s liegen, ist das Erfülltsein der Ungleichung

$$\lambda_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{\operatorname{Re} c} + \frac{4Pa_0}{1-\sigma} \right)^j [(j+2)^2 - 1] < R - \|w_0\|_1. \quad (14)$$

Es sei

$$V = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{\operatorname{Re} c} + \frac{4Pa_0}{1-\sigma} \right)^j [(j+2)^2 - 1]. \quad (15)$$

Aus

$$L/\operatorname{Re} c + 4Pa_0/(1-\sigma) < 1 \quad (16)$$

und

$$a_0(Na_0^{\sigma/(1-\sigma)}/\operatorname{Re} c + K/(1-\sigma)) < (R - \|w_0\|_1)/V \quad (17)$$

folgt die Beziehung (14) mit einem $\lambda_0 > 0$. Da nach Voraussetzung $L/\operatorname{Re} c < 1$ und $\|w_0\|_1 < R$ sind, existiert ein $a_0 > 0$, so daß die Bedingungen (16) und (17) und damit die Beziehung (14) erfüllt sind. Nach (11) ist $T(s) < [a(1-s)]^{1/(1-\sigma)}$ notwendig

dafür, daß die Funktionale λ_k definiert sind, wobei $a > 0$ der Limes der Folge $\{a_k\}$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß für $T(s) < [a(1-s)]^{1/(1-s)}$ mit geeignetem $a > 0$ die Folge der Näherungen $\{w^{(k)}\}$ in \mathcal{K}_w^s liegt.

2. Nach (11), (12) und (16) ist für $0 \leq t \leq T \{w^{(k)}(t)\}$ eine Fundamentalfolge in B_s , $0 < s < 1$. Damit existiert ein Grenzelement $w \in B_s$, das eine Lösung derjenigen Operatorgleichung ist, die man durch Grenzübergang in (8) erhält. Damit ist w auch eine Lösung von (6). Mit (14) erhalten wir $\|w\|_s \leq \|w_0\|_s + \lambda_0 V < R$, d. h., $w(t)$ liegt in \mathcal{K}_w^s .

3. Die Lösung w realisiert den Anfangswert $w(z, 0) = w_0$. Das ergibt sich unmittelbar aus (11). Die Funktionale sind so gewählt, daß aus $\lambda_k < \infty$ unmittelbar $\|w^{(k)}\|_s(0) = 0$ folgt, d. h. $w^{(k+1)}(z, 0) = w^{(k)}(z, 0)$ für $k \geq 0$ und damit auch $w(z, 0) = w^{(0)}(z, 0) = w_0$.

4. Aus der Forderung $\lim_{t \rightarrow 0} t' \frac{dw}{dt} = 0$ folgt, daß $w(z, 0) = w_0$ eine Lösung der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(z, 0, w)$ sein muß. Die Eindeutigkeit der Lösung in \mathcal{K}_w^s zu gegebenem w_0 ergibt sich im wesentlichen aus der zu (1) äquivalenten Operatorgleichung

$$w(z, t) = \int_0^t \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1} \left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) \times [\tau^{l-s} \mathcal{L}_1(z, \tau, w(z, \tau)) + \mathcal{L}_2(z, \tau, w(z, \tau))] d\tau \quad (18)$$

und den Bedingungen (B_1) und (B_2) . Es kann jedoch höchstens eine Lösung $w_0 \in \mathcal{K}_w^s$ der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(z, 0, w)$ mit $\|w_0\|_1 < R$ existieren. Andernfalls folgt mit (B_2)

$$|c| \|w_{0,1} - w_{0,2}\|_s = \|\mathcal{L}_2(z, 0, w_{0,1}) - \mathcal{L}_2(z, 0, w_{0,2})\|_s \leq L \|w_{0,1} - w_{0,2}\|_s,$$

d. h. aber $L \geq |c|$ im Widerspruch zu $L/\operatorname{Re} c < 1$.

5. Es seien beliebige d, t_1, t_2 mit $0 < d \leq t_1 \leq t_2 \leq T(s)$ gegeben. Dann kann man wie im 1. Schritt zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\alpha > 0$ existiert, so daß $\|w(z, t_2) - w(z, t_1)\|_s < \varepsilon$ für $t_2 - t_1 < \alpha$ gilt. Somit folgt daraus die Stetigkeit von w bez. t im Intervall $(0, T(s))$. Die Stetigkeit von w in $t = 0$ ergibt sich aus (11) und (12). Die Bedingungen (B_1) und (B_2) liefern mit Gleichung (1) die stetige Differenzierbarkeit von w bez. t im Intervall $(0, T(s))$, da

$$\frac{dw}{dt} = t^{-l} [t^{l-s} \mathcal{L}_1(z, t, w) + \mathcal{L}_2(z, t, w) - cw]$$

ist und die rechte Seite in $(0, T(s))$ stetig von t abhängt ■

1. In geeigneten Fällen folgt die Existenz einer Lösung von $cw = \mathcal{L}_2(z, 0, w)$ mit dem Satz über implizite Funktionen. 2. Die konkreten Rechnungen im Beweis zum Satz 2 wurden nur für den Fall $l > 1$ durchgeführt. Der Fall $l = 1$ erledigt sich analog. 3. TURSCHKE [6] erörterte die Frage der optimalen Wahl der Folge $\{a_k\}$. Es wurden Folgen konstruiert, die bei einer Reihe von Beispielen ein größeres Existenzgebiet der Lösung als bei Verwendung der Folge $\{a_k\}$ mit der in der vorliegenden Arbeit gewählten Bildungsvorschrift liefern. Diese Resultate sind auf den hier diskutierten Fall anwendbar.

5. Zum Abschluß der Arbeit sollen zwei Beispiele behandelt werden.

a) Ein möglicher Spezialfall von (1) ist die Evolutionsgleichung $t' \frac{\partial w}{\partial t} + cw = t^{l-s} \mathcal{L}_1(z, t, w) + \mathcal{L}_2(z, t, w)$. Dabei ist zu garantieren, daß \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 eine Banachraumskala in sich abbilden.

In [4] wurde die Evolutionsgleichung

$$t^l \frac{\partial w}{\partial t} + cw = t^{l-\sigma} \frac{\partial w}{\partial z^*} + t^{l-r} f(z, t, w)$$

behandelt, worin $l \geq 1$, $0 \leq \sigma < 1$, $r \leq l$ und c eine Konstante mit $\operatorname{Re} c > 0$ ist. Dem Operator \mathcal{L}_1 entspricht der Differentialoperator $\partial/\partial z^*$ und dem Operator \mathcal{L}_2 die Funktion $h = h(z, t, w) = t^{l-r} f(z, t, w)$. Wir benutzen die Banachraumskala $(\mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{E}(\bar{G}_s))$, sup-Norm): Dabei bezeichne $\mathcal{H}_{z,z^*}(G_s)$ den Raum der Funktionen $w = w(z)$, die in G_s reell analytisch sind. Das einfach zusammenhängende beschränkte und konvexe Gebiet G_1 der z -Ebene enthält den Nullpunkt 0 und besitze hinreichend glatten Rand. Dann entsteht das Gebiet G_s durch Streckung von G_1 um den Faktor s mit dem Streckungszentrum 0. Durch entsprechende Voraussetzungen an f (definiert in einer Menge $\overline{\mathcal{M}}_{\rho, \eta, R}^s$, reell analytisch in z und w , stetig bez. $z \in \bar{G}_1 \subset \{z: |z| < \rho\}$, stetig bez. t in $[0, \eta]$, Existenz einer Lösung $w_0 \in \mathcal{H}_{z,z^*}(G_1) \cap \mathcal{E}(\bar{G}_1)$ der Funktionalgleichung $cw = h(z, 0, w)$ mit $\|w_0\|_1 < R$ und f erfülle die Lipschitzbedingungen von (B_2)) kann man gewährleisten, daß die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt sind. Mit $a > 0$ aus Satz 2 wählen wir $T < [a(1-s)]^{1/(1-\sigma)}$. Dann existiert genau eine Lösung mit $w(\cdot, t) \in \mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{E}(\bar{G}_s)$, $0 < s < 1$, und $\|w(\cdot, t)\|_s < R$ für $t \in [0, T]$.

b) Als Spezialfall von a) betrachten wir folgendes Beispiel aus [4]:

$$t^l \frac{\partial w}{\partial t} + cw = t^{l-\sigma} \frac{\partial w}{\partial z^*} + w^2 + |z|^2 + t^2 \quad \text{mit } c > 0.$$

Darin ergibt sich für die Größe des Gebietes G_1 die Bedingung $\bar{G}_1 \subset \{z: |z| < c/2\}$. Eine geeignete Lösung der Funktionalgleichung $cw = w^2 + |z|^2$ ist $w_0 = (c - \sqrt{c^2 - 4|z|^2})/2$. Unter Verwendung der in a) eingeführten Banachraumskala läßt sich der Satz 2 anwenden.

LITERATUR

- [1] NIRENBERG, L.: Topics in nonlinear functional analysis. New York: Lecture Notes of Courant Institute 1973/74.
- [2] NISHIDA, T.: A note on a theorem of Nirenberg. J. Diff. Geom. **12** (1977), 629–633.
- [3] Овсянников, Л. В.: Задача Коши в шкале Банаховых пространств аналитических функций. В сб.: Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси, сентябрь 23–29, 1971. Том II. Тбилиси: Мецниереба 1974, 219–229.
- [4] REISSIG, M.: Behandlung von Evolutionsgleichungen mit singulären Koeffizienten. Diplomarbeit. Halle: Martin-Luther-Universität 1984.
- [5] TRÉVES, F.: Basic Linear Partial Differential Equations. New York—San Francisco—London: Academic Press 1975.
- [6] TUTSCHKE, W.: On an Abstract Nonlinear Cauchy-Kowalewski Theorem — a Variant of L. Nirenberg's and T. Nishida's Proof. Z. Anal. Anw. **5** (1986), 185–192.

Manuskripteingang: 14. 12. 1984; in revidierter Fassung 17. 01. 1986

VERFASSER:

MICHAEL REISSIG
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
DDR - 4010 Halle, Universitätsplatz 6