Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (1) 1987, S. 43–47

Der Satz von Cauchy-Kowalewski für hyperanalytische Funktionen

H. Begehr

Der Satz von Cauchy-Kowalewski wird in bezug auf eine Klasse hyperanalytischer Funktionen mehrerer Variablen formuliert. Im Falle einer nichtlinearen Gleichung ohne Lipschitz-Bedingung gelingt eine Existenzaussage.

Формулируется теорема Коши-Ковалевской для одного класса гипераналитических функций многих переменных. В случае нелинейного уравнения без условия Липшица дается теорема существования.

The theorem of Cauchy-Kowalewski is formulated for a class of hyperanalytic functions of several variables. For a nonlinear equation without a Lipschitz condition an existence theorem is given.

Bei hyperbolischen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung wird häufig zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems der Satz von Cauchy-Kowalewski herangezogen, und zwar im Falle analytischer Koeffizienten. Kürzlich [8, 9] ist dieser Satz auf verallgemeinerte analytische und auf pseudoanalytische Funktionen ausgedehnt worden. Hier wird der Sachverhalt auf hyperanalytische Funktionen verallgemeinert. Daß dies auch auf q-holomorphe Vektoren möglich ist, wird in [2] gezeigt. Auch eine Ausdehnung auf verallgemeinerte hyperanalytische Funktionen erscheint naheliegend.

Herrn W. Tutschke danke ich für die Anregung zu dieser Thematik und für seine kritischen Bemerkungen.

1. Hyperanalytische Funktionen

$\mathfrak{D}_r(\mathbf{C})$ sei die Menge der unteren Dreiecksmatrizen w über $\mathbf{C}$ vom Rang r,

$$w := \begin{bmatrix} w_0 & & & & \\ w_1 & w_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ w_{r-2} & w_{r-1} & \dots & w_0 & \\ w_{r-1} & w_{r-2} & \dots & w_1 & w_0 \end{bmatrix} \quad (w_\varrho \in \mathbf{C},\ 0 \leqq \varrho \leqq r-1),$$

die einen zu $\mathbf{C}^r$ isomorphen Vektorraum und bezüglich der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet. Im folgenden werden Abbildungen aus dem $\mathbf{C}^n$ in $\mathfrak{D}_r(\mathbf{C})$ betrachtet.

Definition: Sei $\mathfrak{D} \subset \mathbf{C}^n$ ein Gebiet und $w_\varrho: \mathfrak{D} \to \mathbf{C}$ $(0 \leqq \varrho \leqq r-1)$. Zu vorgegebenen Funktionen

$$q_\nu: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}_r(\mathbf{C}), \qquad q_{\nu 0} = 0 \quad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

die bezüglich z_ν und $\overline{z_\nu}$ bei festgehaltenem $(z_1, \ldots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$ partiell differenzierbar mit Hölderstetigen Ableitungen sind, heißen die $\mathfrak{D}_r(\mathbf{C})$-wertigen Lösungen des Systems

$$D_\nu w := \frac{\partial}{\partial \overline{z_\nu}} w + q_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} w = 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n) \tag{1}$$

hyperanalytische Funktionen in $z := (z_1, \ldots, z_n)$. Mit $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}})$ wird die Menge der in $\overline{\mathfrak{D}}$ stetigen Lösungen von (1) bezeichnet. Vermittels

$$\|f\|_{\mathfrak{D}} := \sup_{z \in \mathfrak{D}} |f(z)|, \qquad |f| := \sum_{k=0}^{r-1} |f_k|$$

wird $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}})$ zu einem Banach-Raum.

Es sei $\mathfrak{t}_\nu$ mit $\mathfrak{t}_\nu(z) \in \mathfrak{D}_r(\mathbf{C})$ für $z \in \mathfrak{D}$ bei festgehaltenem $(z_1, \ldots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$ nach DOUGLIS [3] eine erzeugende Lösung von D_ν und mit

$$\alpha_\nu(z) = -\frac{\partial}{\partial \overline{z_\nu}} \mathfrak{t}_\nu \left[\frac{\partial}{\partial z_\nu} \mathfrak{t}_\nu \overline{\frac{\partial}{\partial z_\nu} \mathfrak{t}_\nu} - \frac{\partial}{\partial \overline{z_\nu}} \mathfrak{t}_\nu \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z_\nu}} \mathfrak{t}_\nu} \right]^{-1}, \qquad \beta_\nu(z) = \frac{\partial}{\partial z_\nu} \mathfrak{t}_\nu [\ldots]^{-1}$$

der Differentialoperator

$$\dot{D}_\nu := \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \overline{z_\nu}} + \beta_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} \tag{2}$$

gegeben, so daß $\mathfrak{t}_{\nu 0}(z) = z_\nu$, $D_\nu \mathfrak{t}_\nu = 0$, $\dot{D}_\nu \mathfrak{t}_\nu = 1$ und $\partial/\partial\overline{\mathfrak{t}_\nu} = D_\nu$, $\partial/\partial \mathfrak{t}_\nu = \dot{D}_\nu$ ist. Im weiteren wird vorausgesetzt, daß q_ν allein von z_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ abhängt; dies gilt dann auch für $\mathfrak{t}_\nu$. In [3] und [5] ist gezeigt, daß jede in z_ν hyperanalytische Funktion f in einer Kreisumgebung von $\hat{z}_\nu$ als Potenzreihe der Form

$$f(z_\nu) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n \big(\mathfrak{t}_\nu(z_\nu) - \mathfrak{t}_\nu(\hat{z}_\nu)\big)^k, \qquad C_k = \frac{1}{k!} \dot{D}_\nu^k f(z_\nu)|_{z_\nu = \hat{z}_\nu}$$

dargestellt werden kann. Hieraus folgt

Lemma 1: *Es sei* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$ *und* $q_\nu : \mathfrak{D}_\nu \to \mathfrak{D}_r(\mathbf{C})$ *mit* $q_\nu \in C^{1+\alpha}(\mathfrak{D}_\nu)$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$. *Dann gilt für jede Lösung* w *von* (1)

$$w(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{+\infty} C_{\nu_1 \ldots \nu_n} \big(\mathfrak{t}_1(z_1) - \mathfrak{t}_1(\hat{z}_1)\big)^{\nu_1} \ldots \big(\mathfrak{t}_n(z_n) - \mathfrak{t}_n(\hat{z}_n)\big)^{\nu_n}$$

mit

$$C_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_n!} \dot{D}_1^{\nu_1} \ldots \dot{D}_n^{\nu_n} w(z_1, \ldots, z_n)|_{(z_1, \ldots, z_n) = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)}$$

in einem Polyzylinder um $(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)$ *in* $\mathfrak{D}$.

Sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ beschränkte offene Mengen in $\mathbf{C}^n$, $\mathfrak{D} \Subset \mathfrak{D}_1$, $d := \operatorname{dist}(\overline{\mathfrak{D}}, \partial \mathfrak{D}_1)$, und sind die Differentialgleichungen (1) in $\mathfrak{D}_1$ gegeben, so kann $\dot{D}_\nu$ als linearer Operator von $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_1)$ nach $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}})$ aufgefaßt werden.

Lemma 2: *$\dot{D}_\nu$ ist ein beschränkter Operator auf $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_1)$ mit Norm $O(d^{-1})$.*

Beweis: Aus der Cauchy-Formel (siehe [3] und [5])

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_\nu - z_\nu| = d} w(z_1, \ldots, \zeta_\nu, \ldots, z_n) \frac{d\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu)}{\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu) - \mathfrak{t}_\nu(z_\nu)}$$

für $z \in \mathfrak{D}$ folgt

$$\dot{D}_\nu w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_\nu - z_\nu| = d} w(z_1, \ldots, \zeta_\nu, \ldots, z_n) \frac{d\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu)}{\left(\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu) - \mathfrak{t}_\nu(z_\nu)\right)^2}.$$

Wegen (siehe [4: S. 328])

$$\left| \frac{\zeta_\nu - z_\nu}{\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu) - \mathfrak{t}_\nu(z_\nu)} \right| \leqq \text{const} \quad \text{und} \quad |d\mathfrak{t}_\nu(\zeta_\nu)| \leqq \text{const}\, |d\zeta_\nu|$$

folgt für $z \in \mathfrak{D}$

$$|\dot{D}_\nu w(z)| \leqq O(d^{-1}) \sup_{|\zeta_\nu - z_\nu| \leqq d} |w(z_1, \ldots, \zeta_\nu, \ldots, z_n)| \leqq O(d^{-1})\, \|w\|_{\mathfrak{D}_1},$$

das heißt $\|\dot{D}_\nu w\|_{\mathfrak{D}} \leqq O(d^{-1})\, \|w\|_{\mathfrak{D}_1}$ ∎

2. Linearer Fall

Für eine offene beschränkte Menge $\mathfrak{D} \subset \mathbf{C}^n$ und $0 < d$ sei

$$\mathfrak{D}_s := \{z \in \mathbf{C}^n : \operatorname{dist}(z, \mathfrak{D}) < sd\} \qquad (0 \leqq s \leqq 1),$$

so daß für $0 \leqq s' \leqq s \leqq 1$ gilt

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_{s'} \subset \mathfrak{D}_s \subset \mathfrak{D}_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(\mathfrak{D}_{s'}, \mathbf{C}^n \setminus \mathfrak{D}_s) = (s - s')\, d.$$

Für $t \in [-T, T]$ und $0 \leqq s' < s \leqq 1$ sei $A(t)$ ein beschränkter linearer Operator von $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_s)$ in $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_{s'})$, stetig in t und ($\|\cdot\|_s := \|\cdot\|_{\mathfrak{D}_s}$)

$$\|A(t)\, w\|_{s'} \leqq \frac{M}{s - s'}\, \|w\|_s \qquad (0 \leqq s' \leqq s \leqq 1) \tag{3}$$

mit von t, s', s und w unabhängiger Konstanten M. Ferner sei f eine stetige Abbildung von $[-T, T]$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_1)$ und

$$\|f(t)\|_s \leqq \frac{K}{1 - s} \qquad (0 \leqq s < 1) \tag{4}$$

mit von t und s unabhängigem K sowie $w_0 \in \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_1)$ so, daß

$$\|w_0\|_s \leqq \frac{C}{1 - s} \qquad (0 \leqq s \leqq 1) \tag{5}$$

mit von s unabhängigem C. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich wie in [7: S. 146f.] die eindeutige Lösbarkeit des Cauchy-Problems zeigen.

Satz 1: *Unter den Voraussetzungen* (3)—(5) *ist das Cauchy-Problem*

$$\frac{\partial}{\partial t} w = A(t)\, w + f(t), \qquad w(0) = w_0 \tag{6}$$

in $(-\delta_0, \delta_0) \times \mathfrak{D}_s$ *mit* $\delta_0 := (1 - s)/eM$, $0 < s < 1$, *eindeutig durch ein in* t *stetig differenzierbares Element von* $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_s)$ *lösbar.*

Setzt man

$$\|w_0\| = \sup_{0 \leqq s < 1} (1 - s)\, \|w_0\|_s \quad \text{und} \quad \|f\| = \sup_{|t| \leqq T, 0 \leqq s < 1} (1 - s)\, \|f(t)\|_s,$$

so ergibt sich aus den Ausführungen in [7] die A-priori-Abschätzung

$$\|w\|_s \leqq \frac{1 - s}{(1 - s - eM\,|t|)^2}\, \|w_0\| + \frac{|t|}{1 - s - eM\,|t|}\, \|f\| \quad \left(|t| < \frac{1 - s}{eM}\right).$$

Gelten anstelle von (4) und (5) $\|f(t)\|_1 \leqq K$ bzw. $\|w_0\|_1 \leqq C$, so erhält man statt dessen für $|t| \leqq (1 - s)/eM$

$$\|w\|_s \leqq \left(1 + \frac{M\,|t|}{1 - s - eM\,|t|}\right) \|w_0\|_1 + \frac{1 - s}{eM} \sup_{|t| \leqq T} \|f(t)\|_1 \log \frac{1 - s}{1 - s - eM\,|t|}$$
$$\leqq \left(1 + \frac{M\,|t|}{1 - s - eM\,|t|}\right) \|w_0\|_1 + \frac{1 - s}{1 - s - eM\,|t|}\, |t| \sup_{|t| \leqq T} \|f(t)\|_1 .$$

Analoge Abschätzungen gelten für $\|f(t)\|_s \leqq K/(1 - s)^\mu$ und $\|w_0\|_s \leqq C/(1 - s)^\nu$ (vgl. [1]).

Für ein Beispiel seien A_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ und B stetige Abbildungen des Intervalls $[-T, T]$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_1)$ mit

$$\|A_\nu(t)\|_1 < +\infty, \quad \text{und} \quad \|B(t)\|_s \leqq O\left(\frac{1}{1 - s}\right) \quad (0 \leqq s \leqq 1).$$

Dann ist durch

$$A(t)\, w := \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(t)\, D_\nu w + B(t)\, w$$

ein linearer Operator $A(t)$ gegeben, der wegen Lemma 2 der Abschätzung (3) genügt.

3. Nichtlineare Evolutionsgleichung

Für $w_0 \in \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_1)$ mit

$$\|w_0\|_s \leqq \frac{M}{(1 - s)^\gamma} \quad (0 \leqq s < 1,\ \gamma \in \mathbf{R}) \tag{7}$$

sei

$$\mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s) := \left\{ w \in \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_s) : \|w - w_0\|_s \leqq \frac{R}{(1 - s)^\gamma} \right\}.$$

Es sei F eine stetige Abbildung von $[-T, T] \times \mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s)$ nach $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_{s'})$ für jedes Paar s', s mit $0 \leqq s' < s < 1$, so daß mit Konstanten C und γ gilt

$$\|F(t, w)\|_{s'} \leqq \frac{C}{(s - s')^\gamma} \quad \left(|t| \leqq T,\ w \in \mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s)\right). \tag{8}$$

Satz 2: *Unter den Voraussetzungen* (7) *und* (8) *existiert eine stetige differenzierbare Abbildung* $w: [-\alpha, \alpha] \to \mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s)$, $\alpha = \min\{T, R/2^\gamma C\}$, *die das Cauchy-Problem* $\partial w/\partial t = F(t, w)$, $w(0) = w_0$ *löst.*

Der Beweis erfolgt wie in [1] mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, der angewandt werden kann, da $\mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s)$ eine kompakte normale Familie ist. Erfüllt F die

Bedingungen

$$\|F(t, w_1) - F(t, w_2)\|_{s'} \leqq \frac{C}{(s - s')^\gamma} \|w_1 - w_2\|_s \quad \text{und} \quad \|F(t, w_0)\|_s \leqq \frac{K}{(1 - s)^\gamma},$$

so ist die Lösung des Problems eindeutig bestimmt. Dies folgt gemäß dem in [6] gegebenen Verfahren.

Ein Beispiel für ein F mit (8) ist etwa

$$F(t, w) = A(t, w) (\dot{D}_1 w)^{\mu_1} \dots (\dot{D}_n w)^{\mu_n},$$

wenn

$$\|A(t, w)\|_{s'} \leqq \frac{K_0}{(s - s')^{\mu_0}} \|w\|_s^{\mu_0} \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$$

ist. Aus Vereinfachungsgründen sei hier anstelle von (7) $\|w_0\|_s \leqq M$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ und $\mathfrak{H}_R(\overline{\mathfrak{D}}_s) = \{w \in \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{D}}_s) : \|w - w_0\|_s \leqq R\}$ angenommen. Offenbar gilt dann

$$\|F(t, w)\|_{s'} < K(M + R)^\gamma / (s - s')^\gamma.$$

Im allgemeinen Fall ist eine Kopplung von s' und s vorzunehmen. Mit Hilfe dieses Beispiels lassen sich weitere konstruieren.

LITERATUR

[1] BEGEHR, H.: Eine Bemerkung zum nichtlinearen klassischen Satz von Cauchy-Kowalewski. Math. Nachr. (im Druck).
[2] CRODEL, A.: Nichtlineare Evolutionsgleichungen für q-holomorphe Vektoren (in Vorbereitung).
[3] DOUGLIS, A.: A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Comm. pure appl. Math. **6** (1953), 259–289.
[4] GILBERT, R. P.: Constructive methods for elliptic equations (Lecture Notes in Math. **365**). Berlin: Springer-Verlag 1974.
[5] KÜHN, E.: Über die Funktionentheorie und das Ähnlichkeitsprinzip einer Klasse elliptischer Differentialgleichungssysteme in der Ebene. Dissertation. Universität Dortmund 1974.
[6] NISHIDA, T.: A note on a theorem of Nirenberg. J. Diff. Geometry **12** (1977), 629–633.
[7] TREVES, F.: Basic linear partial differential equations. New York: Academic Press 1975.
[8] TUTSCHKE, W.: A problem with initial values for generalized analytic functions depending on time (generalizations of the Cauchy-Kowalewski and Holmgren theorems). Soviet Math. Dokl. **25** (1982), 201–205; Übersetzung von Докл. Акад. Наук СССР **262** (1982), 1081–1085.
[9] TUTSCHKE, W., and C. WITHALM: The Cauchy-Kovalevska theorem for pseudoholomorphic functions in the sense of L. Bers. Complex Variables **1** (1983), 389–393.

Manuskripteingang: 06. 11. 1985

VERFASSER:

Prof. Dr. HEINRICH BEGEHR
I. Mathematisches Institut der Freien Universität
D-1000 Berlin-West 33, Arnimallee 3