

Решение задачи Дирихле в области с границей, содержащей скругленный угол¹⁾

В. И. Власов, Д. Б. Волков и А. П. Прудников

Es wird das Dirichlet-Problem für die Laplacegleichung in einem Kreis mit abgerundetem winkelförmigem Ausschnitt betrachtet und die Lösung in einer Form erhalten, die im Gebiet und auf dem Rande des Ausschnittes Differentiationen beliebiger Ordnung erlaubt. Einige numerische Resultate samt ihrer Analyse werden angegeben.

Рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге со скругленным угловым вырезом и найдено её решение в форме, допускающей дифференцирование любое число раз в области и на контуре скругленного угла. Приведены численные результаты и дан их анализ.

The Dirichlet problem for the Laplace equation in a circle with a notch with rounded corner is considered; the solution is found in a form that allows differentiation of any order in the domain and at the contour of the rounded-off notch. Numerical results and their analysis are presented.

0. Введение. Краевые задачи в областях с границей, которая содержит скругленные углы, часто возникают в механике и физике [6–8, 11, 12, 14, 23, 27–29, 31]. В частности, такие задачи рассматриваются в связи с решением проблемы кручения упругих призматических стержней [6, 23, 31, 32], поскольку она сводится к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в области поперечного сечения стержня [11, 31], а сечения практически важных стержней (валов с продольными выточками, прокатных изделий), как правило, содержат скругленные углы. Особо следует отметить эффект концентрации напряжений (их резкое возрастание вблизи закругляющей кривой), возникающий при малых радиусах закруглений [23, 25, 32].

Как известно [4, 6, 7, 12, 13, 17–19, 24, 31], многие важные для приложений задачи указанного типа не получили удовлетворительного решения, несмотря на большое количество работ, посвященных его отысканию, так как попытки воспользоваться для этого известными аналитическими и численными методами наталкиваются на значительные препятствия. При применении численных методов (конечных разностей [3, 19, 29], конечных элементов [22, 30]) и приближенных аналитических методов (вариационных методов [9, 28, 31], коллокаций [18, 28], приближенного конформного отображения [11, 14, 20, 21, 27], граничных интегральных уравнений [11, 14, 26]) нередко складывается такое положение, что они обеспечивают близость получаемого приближенного решения к точному внутри области, но встречают существенные затруднения при попытке обеспечить такую же близость для производных решения на границе [4, 7, 13, 15–19, 26, 30]; в ряде случаев производные на границе стремятся почти всюду к неверным значениям [22, 30]. Вместе с тем, многие требуемые в приложениях величины (в теории кручения это, например, максимальные напряжения) выражаются именно через производные решения краевой задачи на границе области. Эти величины

¹⁾ Vortrag auf der Konferenz „Complex Analysis“ (s. Z. Anal. Anw. H. 2 (1986)).

можно получить из точного аналитического решения, которое находится с помощью конформного отображения исходной области; однако области, встречающиеся в приложениях, имеют сложную структуру (например, круговые многоугольники с большим числом сторон), и его построение наталкивается на принципиальные математические трудности [17, 21].

В работе [2] был предложен аналитический метод решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях с границей, содержащей скругленные углы. Этот метод позволяет найти решение и все его производные в области и на контуре скругленного угла. В настоящей работе проведена численная реализация этого метода для области g , представляющей собой круг со скругленным угловым вырезом. В пункте 1 определена область g и некоторое её расширение \mathcal{S} , а также приведены основные обозначения. В пункте 2 дана постановка задачи Дирихле в области g и введено функциональное пространство, в котором ищется её решение. В пункте 3 изложен метод, в соответствии с которым решение поставленной задачи представляется в виде предела последовательности сумм, содержащих функции, связанные с конформным отображением области \mathcal{S} . В пункте 4 установлен вид конформного отображения области \mathcal{S} . В пункте 5 построено решение краевой задачи. К концу приведены численные результаты и дан их анализ.

1. Основные обозначения. Пусть область g на комплексной плоскости w ограничена контуром ∂g , состоящим из двух звеньев, $\partial g = \Gamma \cup \gamma$; здесь Γ — дуга окружности,

$$\Gamma = \{w: |w - H| = R, |\arg w| \leq \pi(1 - \kappa)\}, \quad (1)$$

а $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ — скругленный угол, образованный отрезками прямых γ_1, γ_3 , соединенных закругляющей дугой γ_2 ,

$$\gamma_{2s-1} = \{w = r e^{i\varphi_s}: \eta \cot \kappa \pi \leq r \leq [\sqrt{H^2 + (R^2 - H^2) \sec^2 \kappa \pi} - H] \cos \kappa \pi,$$

$$t_s = (-1)^s \pi(\kappa - 1)\},$$

$$s = 1, 2;$$

$$\gamma_2 = \left\{ w = O_1 + \eta e^{i\varphi_1}: O_1 = -\eta \operatorname{cosec} \kappa \pi,$$

$$-\pi \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \leq \varphi_1 \leq \pi \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \right\}. \quad (2)$$

Тогда g — круг со скругленным угловым вырезом (см. рис. 1); параметры круга: H — центр, R — радиус; параметры выреза: $2\kappa\pi$ — раствор угла, $(R - H)$ — глубина, η — радиус закругления. Введем ещё углы $\beta\pi$ и $\nu\pi$ по формулам $\beta = 2(1 - \kappa)$ и $2\nu = 1 - 2\kappa = \beta - 1$. Область g определена при любых R, H, η, β , удовлетворяющих условиям $0 < R, -R < H < R, 1 < \beta < 2$ и

$$0 \leq \eta < \begin{cases} \left[\sqrt{H^2 + (R^2 - H^2) \sec^2 \frac{\beta\pi}{2}} - H \right] \sin \frac{\beta\pi}{2}, & H \geq 0; \\ -(R + H) \tan \frac{\beta\pi}{2}, & H < 0. \end{cases}$$

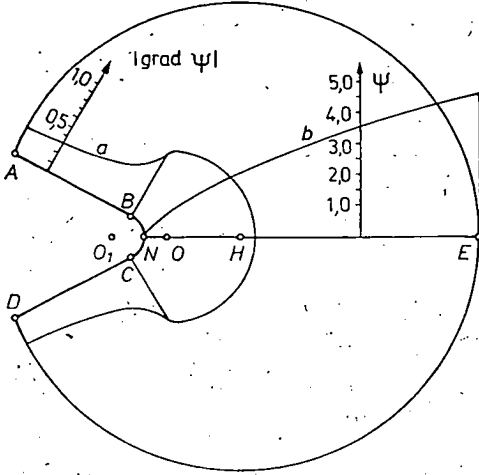


Рис. 1

Она может быть представлена как пересечение круга $\{w: |w - H| < R\}$ с областью $\mathcal{S} \supset g$, ограниченной скругленным углом $\partial\mathcal{S} \supset \gamma$:

$$\partial\mathcal{S} = \gamma_2 \cup \{w = r e^{\pm i\pi(1-\kappa)}; \eta \cot \kappa\pi \leq r \leq \infty\}.$$

Точки границы $\partial\mathcal{S}$, в которых она пересекается с биссектрисой угла $\{w: \operatorname{Re} w = 0\}$, обозначим M и N : $M = \infty$, $N = O_1 + \eta$. Точки соединения закругляющей дуги γ_2 со сторонами угла обозначим B и C :

$$B = \eta \cot \kappa\pi \exp [i(1 - \kappa)\pi] \text{ и } C = \eta \cot \kappa\pi \exp [i(\kappa - 1)\pi].$$

Введем обозначения: $u = \operatorname{Re} w$ и $v = \operatorname{Im} w$; $D^{(m,n)}\psi(w)$ — частная производная $\frac{\partial^{m+n}\psi(w)}{\partial u^m \partial v^n}$, где m, n — неотрицательные целые числа; $(c_{kp})_1^n$ — квадратная матрица, $\det(\dots)$ — определитель матрицы (\dots) ; $V(R) = \{z: |z| < R, 0 \leq \operatorname{Im} z\}$ — полуоткрытый полукруг на комплексной плоскости z ; $\operatorname{int} \gamma$ — дуга γ без концевых точек; \bar{g} — замыкание области g ; w' — точки дуги Γ . Будем говорить, что заданная в g функция $f(w)$ имеет на Γ след $f(w')$, если она имеет почти всюду на Γ определенные предельные значения $f(w')$ по всем некасательным путям. Скалярное произведение (действительнозначных) функций $f_1(w')$ и $f_2(w')$ в пространстве $L_2(\Gamma)$ обозначим (f_1, f_2) ,

$$(f_1(w'), f_2(w')) = \int_{\Gamma} f_1(w') f_2(w') |dw'|; \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3)$$

Будем говорить, что последовательность *сходится равномерно внутри множества* T ; если она сходится равномерно на каждом компакте $E \subset T$.

2. Постановка задачи. Пусть $w = \mu(\zeta)$ — конформное отображение полукруга $\{\zeta: |\zeta| < 1, \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на область g , переводящее полуокружность $\{\zeta: |\zeta| = 1, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$ в дугу Γ , и пусть Γ_r — образ полуокружности $\{\zeta: |\zeta| = r, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$ при отображении $w = \mu(\zeta)$, $0 < r < 1$. Тогда назовем $e_2(g, \Gamma)$ класс функций $\psi(w)$, гармонических в g , непрерывных в $g \cup \operatorname{int} \gamma$, обращающихся в нуль на $\operatorname{int} \gamma$, и таких, что

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_{\Gamma_r} |\psi(w)|^2 |dw| < \infty.$$

Теорема 1: Согласно [2: стр. 10—12] имеет место:

1. Если функция $\psi(w)$ принадлежит классу $e_2(g, \Gamma)$, то она имеет на Γ след $\psi(w') \in L_2(\Gamma)$.

2. Класс $e_2(g, \Gamma)$ является евклидовым пространством со скалярным произведением

$$(\psi_1(w), \psi_2(w))_{e_2(g, \Gamma)} = \lim_{r \rightarrow 1, \Gamma} \int \psi_1(w) \psi_2(w) |dw|.$$

3. Оператор $S: \psi(w) \rightarrow \psi(w')$ осуществляет изоморфизм пространств $e_2(g, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$.

Из последнего утверждения теоремы 1 следует, что

$$(\psi_1(w), \psi_2(w))_{e_2(g, \Gamma)} = (\psi_1(w'), \psi_2(w'));$$

из него вытекает также существование и единственность решения краевой задачи

$$\Delta \psi(w) = 0, \quad w \in g; \quad \psi(w) = 0, \quad w \in \text{int } \gamma; \quad (4)$$

$$\psi(w') = h(w'), \quad w' \in \Gamma; \quad h(w') \in L_2(\Gamma), \quad (5)$$

где $\psi(w) \in e_2(g, \Gamma)$, а равенство (5) выполняется почти всюду; $\Delta = D^{(2,0)} + D^{(0,2)}$ — оператор Лапласа на плоскости.

3. Метод решения. Пусть $z = \mathcal{F}(w)$ — конформное отображение области \mathcal{Z} на $\{z: 0 < \text{Im } z\}$, удовлетворяющее условиям

$$\mathcal{F}(N) = 0; \quad \mathcal{F}(M) = \infty; \quad \mathcal{F}(w) \sim e^{i\frac{\beta\pi}{2}} w^{\frac{1}{\beta}}, \quad w \rightarrow M; \quad (6)$$

обратное отображение обозначим через $w = \mathcal{F}^{-1}(z)$. Определим функции $\Omega_p(w)$ по формуле

$$\Omega_p(w) = \text{Im} [\mathcal{F}(w)]^p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Приближенное решение $\psi^K(w)$ задачи (4), (5) будем искать в виде суммы

$$\psi^K(w) = \sum_{p=1}^K a_p^K \Omega_p(w), \quad (8)$$

коэффициенты которой будем находить из условия минимума отклонения $\psi^K(w')$ от $h(w')$ в норме $L_2(\Gamma)$:

$$\|h - \psi^K\| = \min. \quad (9)$$

Условие (9) приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{q=1}^K c_{pq} a_q^K = h_p, \quad p = 1, 2, \dots, K; \quad c_{pq} = (\Omega_p, \Omega_q); \quad h_p = (h, \Omega_p). \quad (10)$$

Теорема 2: Пусть $h(w') \in L_2(\Gamma)$, а $\psi^K(w)$ определяется соотношениями (8), (9). Тогда:

1. последовательность $\{\psi^K(w)\}$ (соответственно $\{\text{grad } \Psi^K\}$) сходится при $K \rightarrow \infty$ к функции $\psi(w) \in e_2(g, \Gamma)$ (соответственно к её градиенту $\text{grad } \psi(w)$) равномерно внутри $g \cup \text{int } \gamma$; для любых m и n , $m + n \geq 2$, последовательность $\{D^{(m,n)} \psi^K(w)\}$ сходится при $K \rightarrow \infty$ к $D^{(m,n)} \psi(w)$ равномерно внутри $g \cup \text{int } \gamma \setminus (B \cup C)$;

2. след $\psi(w')$ предельной функции $\psi(w)$ почти всюду на Γ равен функции $h(w')$ и совпадает с ней в точках её непрерывности;

3. для всех p существует предел

$$\lim_{K \rightarrow \infty} a_p^K = a_p, \tag{11}$$

и имеет место разложение

$$\psi(w) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \Omega_p(w), \tag{12}$$

сходящееся внутри $\mathcal{F}^{-1}(V(P))$ вместе с первыми производными, где $P = \min \{|\mathcal{F}(w)| : w \in \Gamma\}$; на множестве $\mathcal{F}^{-1}(V(P)) \setminus (B \cup C)$ его можно дифференцировать любое число раз и ряд из производных сходится равномерно внутри этого множества.

Доказательство: Согласно [2] функции $\Omega_p(w)$ линейно независимы и образуют полную систему в пространстве $e_2(g, \Gamma)$; применяя к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получаем с учетом теоремы 1 ортонормированный базис $\{\omega_n(w)\}$,

$$\omega_n(w) = \sum_{p=1}^n a_{np} \Omega_p(w), \quad \det (a_{kp})_1^n \neq 0, \tag{13}$$

где матрица коэффициентов $(a_{kp})_1^n$ имеет треугольный вид: $a_{kp} = 0$ при $k < p$. Если функцию $h(w')$ из (5) разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2(\Gamma)$ по системе $\{\omega_n(w')\}$, то гармоническое продолжение этого ряда в g даст в соответствии с [2] решение задачи (4), (5):

$$\psi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(w), \quad c_n = (h(w'), \omega_n(w')), \tag{14}$$

и следовательно, $\psi(w) \in e_2(g, \Gamma)$. Используя свойство минимальности средне-квadraticного отклонения отрезка ряда Фурье от представляемой функции, находим, что величина

$$\left\| h(w') - \sum_{n=1}^K \bar{c}_n \omega_n(w') \right\| \tag{15}$$

достигает минимума при $\bar{c}_n = c_n$. С помощью выражения (13) преобразуем (15) к виду

$$\left\| h(w') - \sum_{p=1}^K \bar{a}_p^K \Omega_p \right\|, \quad \bar{a}_p^K = \sum_{n=p}^K \bar{c}_n a_{np}. \tag{16}$$

Нормы (15) и (16) являются соответственно функциями переменных \bar{c}_n и \bar{a}_p^K ; поскольку переход от одних переменных к другим описывается линейным преобразованием (16), являющимся согласно (13) невырожденным, а минимум нормы (15) обеспечивается при $\bar{c}_n = c_n$, то норма (16) достигнет минимума при $\bar{a}_p^K = a_p^K$, где $a_p^K = c_p a_{pp} + \dots + c_K a_{Kp}$. Принимая во внимание соотношения (8), (9), находим, что

$$\psi^K(w) = \sum_{n=1}^K c_n \omega_n(w); \tag{17}$$

тогда используя установленные в [2] свойства сходимости ряда (14), получаем из (17) первые два утверждения теоремы.

Так как функция $\psi(w) \in e_2(g, \Gamma)$, то согласно [2] она разлагается в ряд (12), сходящийся так, как указано в третьем утверждении теоремы. Используя (7) и

первое условие (6), получаем из (8), что коэффициенты a_p^K могут быть выражены через производные функции $\psi^K(w)$ в точке N :

$$a_p^K = \frac{(-1)^{p-1}}{p 2^{p-1} |\mathcal{F}'(N)|^p} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m! (p-m-1)!} \times \left\{ \cos \frac{m\pi}{2} \cdot D^{(m+1, p-m-1)} \psi^K(N) + \sin \frac{m\pi}{2} \cdot D^{(m, p-m)} \psi^K(N) \right\}; \quad (18)$$

из (12) тем же путем можно найти аналогичную формулу для a_p , которая имеет вид (18) с заменой a_p^K на a_p , а $\psi^K(N)$ — на $\psi(N)$; используя её и формулу (18), получаем из соотношения $D^{(m, n)} \psi^K(N) \rightarrow D^{(m, n)} \psi(N)$ при $K \rightarrow \infty$, справедливого в силу первого утверждения теоремы, равенство (11) ■

Из теоремы 2 следует, что решение $\psi(w)$ задачи (4), (5) может быть найдено как предел при $K \rightarrow \infty$ последовательности функций $\psi^K(w)$, представляемых суммой (8), где $\Omega_p(w)$ определяются из выражения (7), а коэффициенты a_p^K — из системы линейных уравнений (10). Этот способ отыскания $\psi(w)$ представляет собой вариант предложенного в [2] метода решения крайних задач для уравнения Лапласа в областях с границей, содержащей скругленные углы, примененный к задаче (4), (5).

4. Конформное отображение. Поскольку непосредственное отыскание конформного отображения $z = \mathcal{F}(w)$ затруднительно, то вначале найдем обратное отображение $w = \mathcal{F}^{-1}(z)$, методы построения которого разработаны [5, 21]. Функция $w = \mathcal{F}^{-1}(z)$, конформно преобразующая полуплоскость $\{z: 0 < \text{Im } z\}$ на область \mathcal{S} , удовлетворяет, в соответствии с (6), условиям

$$\mathcal{F}^{-1}(0) = N, \quad \mathcal{F}^{-1}(\infty) = M = \infty; \quad (19)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} z^\beta + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Будем искать её в виде $\mathcal{F}^{-1}(z) = f(z/\alpha)$, где функция $f(\zeta)$, $\zeta = z/\alpha$, отображает полуплоскость $\{\zeta: 0 < \text{Im } \zeta\}$ на область \mathcal{S} со следующим соответствием точек:

$$f(0) = N, \quad f(1) = C, \quad f(\infty) = M, \quad (21)$$

а параметр α , $0 < \alpha$, выбирается так, чтобы выполнялась асимптотическая оценка (20). Область \mathcal{S} представляет собой круговой треугольник с углами, равными π в вершинах B и C , и углом $-\beta\pi$ в вершине M . Поэтому в соответствии с общей теорией отображения круговых многоугольников [5, 21], функция $f(\zeta)$ есть отношение $f(\zeta) = \Xi_1(\zeta)/\Xi_2(\zeta)$ двух линейно независимых интегралов уравнения Римана $\Xi''(\zeta) + (1 - \beta^2)[4(\zeta^2 - 1)]^{-1} \Xi(\zeta) = 0$. С помощью замены переменных

$$\zeta = 1 - \frac{2}{t}, \quad \Xi(\zeta) = t^{-\frac{1+\beta}{2}} \xi(t) \quad (22)$$

это уравнение преобразуется в гипергеометрическое уравнение Гаусса [1]

$$t(1-t)\xi''(t) + (1-\beta)(1-t)\xi'(t) + \frac{1-\beta^2}{4}\xi(t) = 0.$$

Используя [1], выбираем два его линейно независимых решения в виде

$$\xi_1(t) = K_0 F\left(-\frac{1+\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2}; 1-\beta; t\right) \text{ и}$$

$$\xi_2(t) = t^\beta F\left(-\frac{1-\beta}{2}, \frac{1+\beta}{2}; 1+\beta; t\right).$$

где $F(a, b; c; t)$ — гипергеометрическая функция, а постоянная K_0 подлежит определению в соответствии с (21). Воспользовавшись квадратичным преобразованием [1]

$$F(a, b; 2b; t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-a} F\left[\frac{a+1}{2}, \frac{a}{2}; b + \frac{1}{2}; \left(\frac{t}{2-t}\right)^2\right],$$

приводим их к виду

$$\xi_1(t) = K_0 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{\frac{1+\beta}{2}} F\left[-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2}; 1 - \frac{\beta}{2}; \left(\frac{t}{2-t}\right)^2\right],$$

$$\xi_2(t) = t^\beta \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} F\left[\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \left(\frac{t}{2-t}\right)^2\right],$$

а возвращаясь с помощью (22) к переменным ζ и $\Xi(\zeta)$, получаем из них

$$\Xi_1(\zeta) = K_0 \left(-\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{1+\beta}{2}} F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2}; 1 - \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right),$$

$$\Xi_2(\zeta) = \left(-\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right);$$

тогда функция $f(\zeta) = \Xi_1(\zeta)/\Xi_2(\zeta)$ имеет вид

$$f(\zeta) = K_0 \left(-\frac{\zeta}{2}\right)^\beta \frac{F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2}; 1 - \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right)}{F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right)}.$$

Эта функция удовлетворяет первому и третьему условию (21); выбирая K_0 из второго условия (21), переходя к функции $\mathcal{F}^{-1}(z) = f(z/\alpha)$ и выбирая α из условия (20), получаем

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} z^\beta \frac{F\left[-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2}; 1 - \frac{\beta}{2}; \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2\right]}{F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2\right)}, \quad (23)$$

$$\alpha = \eta^{1/\beta} \cdot 2 \left[\frac{\nu\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{(\nu+1) \Gamma^2(\nu+1)} \right]^{1/\beta} \quad (24)$$

Дифференцируя (23) с учетом свойств гипергеометрических функций [1], находим представление для производной

$$\mathcal{F}^{-1'}(z) = \frac{\beta z^{\beta-1} e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}}{F^2\left[\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2\right]} \quad (25)$$

Представим отображение $w = \mathcal{F}^{-1}(z)$ в виде комбинации функций Лежандра. Воспользуемся для этого следующей связью между гипергеометрическими

функциями, входящими в (23), и функциями Лежандра $P_r(\zeta)$ и $Q_r(\zeta)$ соответственно первого и второго рода:

$$F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu+1}{2}; 1 - \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right) = \zeta^{-\nu-1} \frac{2^{-\nu} \Gamma(\nu+2)}{\sqrt{\pi} \nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\times \{\pi [P_{\nu+1}(\zeta) - \zeta P_{\nu}(\zeta)] - \tan \nu\pi \cdot [Q_{\nu+1}(\zeta) - \zeta Q_{\nu}(\zeta)]\},$$

$$F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1 + \frac{\beta}{2}; \zeta^{-2}\right) = -\zeta^{\nu} \frac{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)} [Q_{\nu+1}(\zeta) - \zeta Q_{\nu}(\zeta)].$$

Подставляя это в (23) и учитывая (24), получаем

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \eta \left[\tan \nu\pi - \pi \frac{P_{\nu+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \frac{z}{\alpha} P_{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{Q_{\nu+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \frac{z}{\alpha} Q_{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)} \right] \quad (26)$$

Отсюда находим производную отображения в виде

$$\mathcal{F}^{-1'}(z) = \eta \frac{\pi \nu e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}}{\alpha(\nu+1)} \left[Q_{\nu+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \frac{z}{\alpha} Q_{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right) \right]^{-2}; \quad (27)$$

в частности, её значение в точке $z = 0$ равно

$$\mathcal{F}^{-1'}(0) = -i\eta^{1-\frac{1}{\beta}} \frac{2(\nu+1) \Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\nu \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{(\nu+1) \Gamma^2(\nu+1)}{\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \right]^{1/\beta} \quad (28)$$

Отметим, что в работе [32] отображение \mathcal{F}^{-1} найдено в виде ряда.

Обратимся теперь к построению отображения $z = \mathcal{F}(w)$. Согласно [2] оно представимо в виде ряда

$$\mathcal{F}(w) = \left(w e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \left(w e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \right)^{\frac{1-2k}{\beta}}, \quad (29)$$

равномерно сходящегося в $\{w: |w| \in [\eta \cot \kappa\pi, \infty), \arg w \in [-\beta\pi/2, \beta\pi/2]\}$, коэффициенты которого связаны с обратным отображением формулами

$$A_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)(2k)!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left\{ \frac{t^{2k-1}}{[\varphi(t)]^{2k-1}} \right\}, \quad \varphi(t) = \left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

Коэффициенты A_{2k-1} удобно вычислять, исходя из представления (23) для $\mathcal{F}^{-1}(z)$; подставляя в него вместо $F(a, b; c; \zeta)$ гипергеометрический ряд и производя деление рядов, получаем разложение

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} z^{\beta} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_{2k} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{2k} \right], \quad (30)$$

равномерно сходящееся в $\{z: |z| \in [\alpha, \infty), \arg z \in [0, \pi]\}$, где коэффициенты b'_{2k} определяются из рекуррентных соотношений:

$$b'_{2k} = a_k' - a_k'' - \sum_{s=1}^{k-1} b'_{2s} a''_{k-s}, \quad a_k' = a'_{k-1} \frac{(2k - \nu - 2)(2k - \nu - 3)}{2k(2k - \beta)},$$

$$a_k'' = a''_{k-2} \frac{(2k + \nu - 2)(2k + \nu - 1)}{2k(2k + \beta)}, \quad a_0' = a_0'' = 1.$$

Исходя из (30), находим с помощью формул для A_{2k-1} , что

$$A_{2k-1} = l^{2k} B_{2k-1}, \quad l = [\eta \tan \nu \pi]^{1/\beta}, \tag{31}$$

где коэффициенты B_{2k-1} выражаются через b'_{2k} следующим образом:

$$B_{2k-1} = -\frac{2^{2k}}{2k-1} \left[\frac{\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{(\nu + 1) \Gamma^2(\nu + 1) \tan \nu \pi} \right]^{2k/\beta}$$

$$\times \sum_{m=1}^k \binom{2k-1}{m} \frac{\beta}{m} \sum_{s_1 + \dots + s_m = k} b'_{2s_1} \dots b'_{2s_m};$$

здесь суммирование производится по всем возможным натуральным индексам S_p ($p = 1, 2, \dots, m$), а $\binom{\gamma}{m}$ — биномиальные коэффициенты.

5. Построение решения задачи. Возвышая ряд (29) в степень p с учетом (31) и отделяя мнимую часть, получаем представление для функций $\Omega_p(w)$, $w = r e^{i\varphi}$:

$$\Omega_p(r e^{i\varphi}) = r^{\frac{p}{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E_{kp} l^{2k} r^{-\frac{2k}{\beta}} \sin \left[\frac{\varphi(p - 2k)}{\beta} + \frac{p\pi}{2} \right], \tag{32}$$

где ряд сходится равномерно в $\{r e^{i\varphi}: r \in [l^\beta, \infty), \varphi \in [-\beta\pi/2, \beta\pi/2]\}$, а величины E_{kp} связаны с коэффициентами B_{2k-1} формулами

$$E_{0p} = 1, \quad E_{kp} = \sum_{m=1}^k \binom{p}{m} \sum_{s_1 + \dots + s_m = k} B_{2s_1-1} \dots B_{2s_m-1}.$$

Вычислим элементы c_{pq} матрицы системы линейных уравнений (10). Заметим, что уравнение дуги $\Gamma(1)$ в координатах r, φ имеет вид

$$\Gamma = \left\{ r(\varphi) e^{i\varphi}: r(\varphi) = H \cos \varphi + \sqrt{R^2 - H^2 \sin^2 \varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\beta\pi}{2}, \frac{\beta\pi}{2} \right] \right\}. \tag{33}$$

Подставляя в выражение (10) для c_{pq} ряд (32), сходящийся при $w' \in \Gamma$, и учитывая (3) и (33), находим

$$c_{pq} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k l^{2k} c_{kpq},$$

$$c_{kpq} = \sum_{s=0}^k E_{sp} E_{k-s,q} \int_{-\frac{\beta\pi}{2}}^{\frac{\beta\pi}{2}} [r(\varphi)]^{\frac{p+q-2k}{\beta}} \sin \left[\frac{(p-2s)}{\beta} \varphi + \frac{p\pi}{2} \right] \times \sin \left[\frac{(q-2k+2s)}{\beta} \varphi + \frac{q\pi}{2} \right] \sqrt{r^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Вычислим правую часть системы (10). Исходя из формулы (10) для h_p и используя (3), (32) и (33), получаем

$$h_p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k l^{2k} h_{kp}, \quad (34)$$

$$h_{kp} = E_{kp} \int_{-\frac{\beta\pi}{2}}^{\frac{\beta\pi}{2}} h(r(\varphi) e^{i\varphi}) [r(\varphi)]^{\frac{p-2k}{\beta}} \sin \left[\frac{(p-2k)}{\beta} \varphi + \frac{p\pi}{2} \right] \times \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Подставляя в систему (10) эти выражения для c_{pq} и h_p и решая её, получаем коэффициенты a_p^K . С их помощью приближенное решение задачи (4), (5) находится по формуле (8), а его производные определяются равенством

$$D^{(m,n)}\psi^K(w) = \text{Im} \left\{ (i)^n \sum_{p=1}^K a_p^K \frac{d^{m+n}}{dw^{m+n}} [\mathcal{F}(w)]^p \right\}, \quad (35)$$

вытекающим из (8). Выбирая K достаточно большим, достигаем в соответствии с теоремой 2 заданной точности вычисления решения $\psi(w)$ задачи (4), (5) и её производных $D^{(m,n)}\psi(w)$.

Из (35) следует, в частности, выражение для градиента

$$\text{grad } \psi^K(w) = \frac{i}{\mathcal{F}^{-1}(z)} \sum_{p=1}^K p a_p^K (\bar{z})^{p-1}, \quad (36)$$

где z находится из трансцендентного уравнения $w = \mathcal{F}^{-1}(z)$, $w \in \bar{\mathbb{E}} \setminus \Gamma$ (здесь и в дальнейшем черта над числом означает комплексное сопряжение). В этих соотношениях функция $\mathcal{F}^{-1}(z)$ определяется из (23) или (26), а её производная — из (25) или (27). Отметим, что градиент решения в точке N определяется формулой, вытекающей из (36) с учетом (19) и (28):

$$\text{grad } \psi^K(N) = a_1^K \gamma^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{v \Gamma^2\left(\frac{v}{2}\right)}{2(v+1) \Gamma^2\left(\frac{v+1}{2}\right)} \left[\frac{v \left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(v + \frac{1}{2}\right)}{(v+1) \Gamma^2(v+1)} \right]^{1/\beta}$$

Отметим, что эта формула может быть использована для вычисления максимального напряжения в задаче о кручении стержня с сечением в виде области g (она, как отмечалось во введении, сводится к задаче (4), (5)), поскольку напряжение выражается через $\text{grad } \psi(w)$, а его максимум достигается в точке N .

Численные результаты

1°. Осуществлена численная реализация найденного решения задачи (4), (5); при этом граничная функция $h(w')$ в условии (5) задавалась в виде, рассматривавшемся в [10]:

$$h(w') = h^{(m)}(w'), \quad w' \in \Gamma, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

где $h^{(m)}(w')$ определяются по формуле

$$h^{(m)}(w') = [r(\varphi)]^{\frac{m}{\beta}} \sin \frac{m}{\beta} \left(\varphi + \frac{\beta\pi}{2} \right),$$

а $r(\varphi)$ — уравнение дуги Γ (33). Выбор такого вида $h(w')$ связан со следующими свойствами функций $h^{(m)}(w')$ и решения $\psi(w)$ задачи (4), (5), (37):

1. Система $\{h^{(m)}(w')\}$ в соответствии с [2] является полной в $L_2(\Gamma)$, а при $H = 0$ она, как нетрудно заметить с помощью (33), представляет собой ортогональный базис.

2. При $\eta = 0$ решение $\psi(w)$ не зависит от R , H и выражается формулой $\psi(w) = \text{Im} [\exp(i\beta\pi/2) w]^{m/\beta}$.

3. Для всех коэффициентов a_p в разложении (12) для решения задачи (4), (5), (37) выполняются соотношения

$$a_{2p} = 0 \quad \text{при} \quad m = 2m' - 1 \quad \text{и} \quad a_{2p-1} = 0 \quad \text{при} \quad m = m' \quad (m', p = 1, 2, \dots); \quad (38)$$

они вытекают из равенства $h^{(m)}(w') = h^{(m)}(\bar{w}')$ при m — нечетном и равенства $h^{(m)}(w') = -h^{(m)}(\bar{w}')$ при m — четном, а также из симметрии области g относительно действительной оси.

4. Количество параметров, входящих в задачу (4), (5), (37) (это R , H , η , β , m может быть уменьшено на единицу при помощи перехода к функции $\hat{\psi}(w)$ — решению этой задачи в области $\bar{g} = \{w: w\eta \in g\}$, для которой параметры R , H и η заменены соответственно на R/η , H/η и 1, поскольку между $\psi(w)$ и $\hat{\psi}(w)$ существует связь вида $\psi(w) = \eta^{m/\beta} \hat{\psi}(w/\eta)$.

2°. В результате расчетов были получены численные значения $\psi(w)$ и $\text{grad} \psi(w)$ для различных наборов параметров R , H , η , β , m . При этом контролировалась величина $|\psi^K(w) - \psi(w)| (\max \{|\psi(w)|: w \in \bar{g}\})^{-1}$ относительной погрешности; её максимум, достигаемый согласно принципу максимума на дуге Γ , равен

$$\left(\max_{w \in \Gamma} |\psi^K(w) - h(w)| \right) \left(\max_{w \in \Gamma} |h(w)| \right)^{-1}. \quad (39)$$

На рис. 1 представлены результаты расчета для $R = 10$, $H = 3$, $\eta = 1$, $\beta = 5/3$ и $m = 1$; жирной линией изображена граница области g , линия a — эпюра величины $|\text{grad} \psi(w)|$ на дуге γ (значения этой величины отложены по нормали к γ), линия b — график функции $\psi(w)$ на отрезке $\{w \in \bar{g}: \text{Im} w = 0\}$. При этом в сумме (8) было принято $K = 49$ (заметьте, что фактически система (10) содержала лишь 25 неизвестных в силу соотношений (38)), а максимальная относительная погрешность (39) составила $3,74 \cdot 10^{-6}$.

3°. Проведено численное исследование решения $\psi(w)$ задачи (4), (5), (37) при $R \rightarrow \infty$ и фиксированных параметрах H , η , β , и m . Оно показало, что все коэффициенты a_p в разложении (12) имеют при $R \rightarrow \infty$ конечные пределы $a_p^{(m)}$, не зависящие от H ; причем $a_m^{(m)} = 1$ и $a_p^{(m)} = 0$ при $p > m$. Используя равенство $\psi(w) = \eta^{m/\beta} \hat{\psi}(w/\eta)$, найдем, что $a_p^{(m)} = \eta^{(m-p)\beta} \hat{a}_p^{(m)}$ где $\hat{a}_p^{(m)}$ зависят уже только от β . Учитывая ещё соотношения (38), получаем, что при $R \rightarrow \infty$ решение задачи (4), (5), (37) стремится к функции

$$\psi(w) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \hat{a}_{m-2s}^{(m)} \eta^{2s\beta} \Omega_{m-2s}(w), \quad \hat{a}_m^{(m)} = 1;$$

здесь $[c]$ означает целую часть числа c . Приведем значения нескольких первых коэффициентов $\hat{a}_p^{(m)}$ при $\beta = 3/2$: $\hat{a}_1^{(3)} = 0,38167$; $\hat{a}_2^{(4)} = 0,50889$; $\hat{a}_3^{(5)} = 0,63611$; $\hat{a}_4^{(6)} = 0,16568$; $\hat{a}_5^{(6)} = 0,76333$; $\hat{a}_2^{(8)} = 0,053147$; $\hat{a}_3^{(7)} = 0,89055$; $\hat{a}_4^{(8)} = 0,34525$; $\hat{a}_1^{(7)} = 0,082659$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бейтмен, Г., и А. Эрдейи: Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция, Функции Лежандра. Москва: Изд-во Наука 1973.
- [2] Власов, В. И., и А. П. Прудников: Асимптотика решений некоторых краевых задач для уравнения Лапласа при деформировании области. Современные проблемы математики 20 (Итоги науки и техники). Москва: ВИНТИ АН СССР 1982, 3—36.
- [3] Волков, Е. А.: О решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа на областях с закругленными углами. Дифф. уравнения 5 (1969), 141—153.
- [4] Ворович, И. И.: Некоторые проблемы концентрации напряжений. В сборнике: Концентрация напряжений, выпуск 2. Киев: Наукова думка 1968, 45—53.
- [5] Голузин, Г. М.: Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва: Изд-во Наука 1966.
- [6] Динник, А. Н.: Продольный изгиб. Кручение. Москва: АН СССР 1956.
- [7] Дятловский, Л. И.: Напряжения в гравитационных плотинах на скальных основаниях. Киев: АН УССР 1959.
- [8] Капцов, Н. А.: Коронный разряд и его применение в электрофильтрах. Москва: Гостехиздат 1947.
- [9] Михлин, С. Г.: Прямые методы математической физики. Москва: Гостехиздат 1950.
- [10] Мишев, В. Н.: Концентрация касательных напряжений при кручении цилиндрических стержней. В сборнике: Проблемы машиностроения. Киев: Наукова думка 1976, 31—39.
- [11] Мусхелишвили, Н. И.: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Изд-во Наука 1966.
- [12] Резвых, К. А.: Расчет электростатических полей. Москва: Изд-во Энергия 1967.
- [13] Савин, Г. Н.: Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках. Труды II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. мех., 29. 1.—5. 2. 1964. Обзорные доклады, выпуск 3 „Механика твердого тела“. Москва: Изд-во Наука 1966, 295—318.
- [14] Савин, Г. Н.: Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка 1968.
- [15] Серебрянникова, И. И.: К вопросу о влиянии метода построения конформно отображающей функции на напряжения в граничных точках. Труды Горьк. инж.-строит. института 50 (1967), 32—40.
- [16] Угодников, А. Г.: Об одном приеме определения концентрации напряжений в „угловых точках“. В сборнике: Концентрация напряжений, выпуск 1. Киев: Наукова думка 1965, 263—269.
- [17] Шерман, Д. И.: Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теор. и прикл. мех., 27. 1.—3. 2. 1960. Обзорные доклады. Москва—Ленинград: АН СССР 1962, 405—467.
- [18] BEADLE, C. W., and H. D. CONWAY: Stress concentrations in twisted structural beams. Trans. ASME, J. Appl. Mech. E 30 (1963), 138—141.
- [19] HUTN, J. H.: Torsional stress concentration in angle and square tube fillets. Trans. ASME, J. Appl. Mech. E 17 (1950), 388—390.
- [20] КИКУКАВА, М.: On application of the conformal mapping in plane stress concentration problems. В сборнике: Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды междунар. симп. в Тбилиси, 17.—23. 9. 1963. Том 1: Механика твердого тела. Москва: Изд-во Наука 1966, 193—210.
- [21] KÖRPFENFELS, W., and F. STALLMANN: Praxis der Konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1959.
- [22] KRAUTHAMMER, TH.: Accuracy of the finite element method near a curved boundary. Computers and Structures 10 (1979), 921—929.
- [23] NEUBER, H.: Kerbspannungslehre. Grundlagen für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücksichtigung von Konstruktionsformen und Werkstoff. Berlin—Göttingen: Springer-Verlag 1958.

- [24] NEUBER, H., and H. G. HAHN: Stress concentration in scientific research and engineering. Applied Mechanics Reviews 19 (1966), 187—199.
- [25] PETERSON, R. E.: Stress concentration factors. New York: John Wiley and Sons 1974.
- [26] RIZZO, F. J., and D. J. SHIPPY: The boundary integral equation method with application to certain stress concentration problems in elasticity. J. Austral. Math. Soc. B 22 (1981), 381—393.
- [27] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity, 2nd ed. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co. 1950.
- [28] SOKOLNIKOFF, I. S.: Mathematical Theory of Elasticity. New York—London: McGraw-Hill Book Co. 1946.
- [29] SOUTHWELL, R. V.: Relaxation methods in theoretical physics, Vol. I and II. New York: Oxford Univ. Press 1952 and 1956.
- [30] STRANG, G., and G. J. FIX: An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc. 1973.
- [31] TIMOSHENKO, S. P.: Theory of Elasticity. First ed. London—New York: McGraw-Hill Book Co. 1934.
- [32] TREFFTZ, E.: Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannung in der inneren Ecke eines Winkeleisens. Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), 263—267.

Manuskripteingang: 14. 12. 1984; in revidierter Fassung 28. 10. 1985

VERFASSER:

В. И. Власов, Д. Б. Волков и проф. д-р А. П. Прудников
Вычислительный центр Акад. Наук СССР
СССР-117333 Москва, ул. Вавилова 40