Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (2) 1987, S. 97–106

Lokale Darstellungen differenzierbarer Funktionen auf Banachräumen

N. A. Tu

Lokale topologische Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen auf Banachräumen werden untersucht. Es wird gezeigt, daß eine gewisse C^2-Funktion f in der Umgebung eines nichtentarteten kritischen Punktes p in folgender Form dargestellt werden kann:

$$f(x) = \alpha(\lambda) + f(p) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 + \sum_{i=q+1}^{m} \alpha_i^2.$$

Hierbei ist m die Dimension eines Unterraumes, die reellen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sind durch eine Basis dieses Unterraumes bestimmt und $\alpha(\lambda)$ ist durch eine Funktion λ gegeben. Die Dimension m kann gegen ∞ streben, während die Zahl q unverändert bleibt.

Исследуются локальные топологические свойства дифференцируемых функций на Банаховых пространствах. Показывается, что некоторая функция класса C^2 в окрестности невырожденной критической точки p может быть представлена в следующей форме:

$$f(x) = \alpha(\lambda) + f(p) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 + \sum_{i=q+1}^{m} \alpha_i^2.$$

При этом m есть размерность некоторого подпространства, вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ определяются базисом этого подпространства и величина $\alpha(\lambda)$ задается некоторой функцией λ. Размерность m может стремиться к ∞, в то время как число q остается неизменным.

Local topological properties of differentiable functions on Banach spaces are studied. It will be shown that in the neighborhood of a nondegenerate critical point p a certain C^2-function f can be written in the following form:

$$f(x) = \alpha(\lambda) + f(p) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 + \sum_{i=q+1}^{m} \alpha_i^2$$

where m is the dimension of some m-dimensional subspace, the real numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ are determined by a basis of this subspace and $\alpha(\lambda)$ is given by a function λ. The dimension m can tend to ∞, while the number q does not change.

Einleitung

Das bekannte *Lemma von M. Morse* besagt, daß eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf $\mathbf{R}^n$ in der Nähe ihres nichtentarteten kritischen Punktes p eine quadratische Darstellung besitzt, d. h., es gibt eine Umgebung U von p, so daß

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i^2 \quad \text{für} \quad x \in U \tag{1}$$

gilt, wobei q der Index von p und $\alpha_i = \alpha_i(x)$ von einer Basis in $\mathbf{R}^n$ abhängige reelle Zahlen sind.

Dieser Fakt fand wichtige Anwendungen z. B. in der Morse-Theorie, der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und der Singularitätentheorie. Die Untersuchung von Variationsproblemen gab Anlaß, dieses Lemma auf unendlichdimensionale Räume zu übertragen. So entstanden seit den sechziger Jahren viele Arbeiten, in denen das Morse-Lemma in verschiedenen Varianten bewiesen wurde. Allerdings konnte man dabei die Existenz quadratischer Formen obiger Art nicht nachweisen. Diese Schwierigkeit hat ihre Ursache in der Unendlichdimensionalität der betrachteten Räume. So wurde z. B. in [6] für den Hilbertraum gezeigt, daß eine Funktion f in der Umgebung eines nichtentarteten kritischen Punktes p die Darstellung

$$f(x) = f(p) + \|Py\|^2 - \|(I - P)\, y\|^2$$

besitzt und in [2] wurde für entartete kritische Punkte die erweiterte Darstellung

$$f(x) = f(p) + \|Py\|^2 - \|(I - P)\, y\|^2 + g(x)$$

mit einer durch f bestimmten Funktion g angegeben. Offensichtlich ist aber aus $\|Py\|^2 - \|(I - P)\, y\|^2$ im allgemeinen keine quadratische Form wie in (1) ableitbar.

Es erhebt sich die Frage nach der Existenz solcher Darstellungen für Funktionen, die auf Hilbert- bzw. Banachräumen definiert sind. Mit dieser Fragestellung werden wir uns in dieser Arbeit befassen. Wir beschränken uns dabei auf Banachräume mit Basis und untersuchen Funktionen, für die wir, einer Methode E. Rothe [8] folgend, gewisse Kompaktheitsbedingungen voraussetzen. Die Existenz quadratischer Formen wird für diese Funktionenklasse gezeigt. Zum Beweis dieses Resultates wurden Sätze der linearen Algebra, der algebraischen Topologie und die in [10] bewiesenen lokalen Homöomorphiesätze angewandt.

§ 1 Banachräume vom Typ (BB)

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum, V^* der Dualraum von V und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die entsprechende Bilinearform auf $V^* \times V$. Weiter seien $E \subset V$ und $F \subset V^*$ zwei abgeschlossene (lineare) Unterräume. Die bezüglich E und F definierten Mengen

$$E^\perp = \{v^* \in V^* : \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für } v \in E\}$$

und

$$F^0 = \{v \in V : \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für } v^* \in F\}$$

sind dann abgeschlossene Unterräume von V^* bzw. V. Eine *Schauder-Basis* oder kurz eine *Basis* für V ist eine Folge $(x_n) \subset V$, für die es eine Folge $(x_n^*) \subset V^*$ mit $x_i^*(x_j) = 0$ für $i \neq j$ und $x_j^*(x_j) = 1$ für alle j gibt, so daß die Beziehung $x = \sum x_k^*(x)\, x_k$ für jedes $x \in V$ gilt. V ist folglich nichts anderes als die abgeschlossene lineare Hülle der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, oder kurz $V = \operatorname{cl\,span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Die Folge (x_n^*) heißt *biorthogonales System* zu (x_n). Sie bildet (bezüglich V^{**}) im allgemeinen keine Basis für V^*. Das ist jedoch so, wenn V reflexiv ist [4: IV, § 3]. In diesem Fall gelten für die Unterräume $E_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $F_n = \operatorname{span}\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die Beziehungen $E_n^\perp = \operatorname{cl\,span}\{x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \ldots\}$, $F_n^0 = \operatorname{cl\,span}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, $V = E_n \oplus F_n^0$ und $V^* = F_n \oplus E_n^\perp$, wobei $\oplus$ die direkte Summe bedeutet. Reflexive Banachräume mit Basis sind beispielsweise die L_p-Räume mit $1 < p < \infty$ oder die Sobolewschen Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Ist V ein Banachraum mit Basis (x_n) und $V = \operatorname{cl\,span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, so heißt die Abbildung $x \to x_1^*(x)\, x_1 + \cdots + x_n^*(x)\, x_n$ *natürliche Projektion* von V auf E_n. Im allgemeinen verstehen wir unter P_n und P_n^* stets die natürliche Projektion von V auf E_n bezüglich der Zerlegung $V = E_n \oplus E'$ bzw. von V^* auf F_n bezüglich der Zerlegung $V^* = F_n \oplus F'$, wobei $E' \subset V$ und $F' \subset V^*$ abgeschlossene Unterräume sind.

In [9] wurden für einen Banachraum mit fixierter Basis unterschiedliche Normen konstruiert, die zur Ermittelung von Bestapproximationen seiner Elemente durch Elemente eines Unterraumes geeignet sind. Im folgenden Satz wird eine derartige Norm konstruiert, die bei der Definition von Banachräumen vom Typ (BB) eine wichtige Rolle spielen wird.

Satz 1.1: *Es sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum mit der Basis* (x_n) *und* $E_m = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. *Für jedes* $x \in V$ *mit* $x = \sum x_i^*(x)\, x_i$ *ist durch*

$$\|x\|_m = \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \|x_i^*(x)\, x_i\| + \left\| \sum_{i=k+1}^{m} x_i^*(x)\, x_i \right\| + \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i^*(x)\, x_i \right\| \right\}$$

eine zu $\|\cdot\|$ *äquivalente Norm* $\|\cdot\|_m$ *definiert, bezüglich der für* $x \in V$ *die folgenden Ungleichungen gelten:*

$$\text{(i)}\ \|P_m(x)\| \leqq \|x\|_m \qquad \text{(ii)}\ \|x - P_m(x)\|_m \leqq \inf_{v \in E_m} \|x - v\|.$$

Die Äquivalenz zwischen $\|\cdot\|_m$ und $\|\cdot\|$ ist analog zu [9: Beweis des Theorems 5.5] nach einer Methode von V. N. Nikolskij zu zeigen. Die Beziehungen (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition von $\|\cdot\|_m$. Die Beziehung (ii) bedeutet, daß $P_m(x)$ bezüglich $\|\cdot\|_m$ eine Bestapproximation von x auf E_m ist.

Wir kommen nun zur Definition von Banachräumen von Typ (BB). Anschließend geben wir Beispiele für Räume dieses Types.

Definition: Ein Banachraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt vom *Typ* (BB), wenn es zu jedem $\delta > 0$ und jeder kompakten Teilmenge $U \subset V^*$ m-dimensionale Unterräume $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ sowie eine Konstante $C_B > 0$ gibt, für die folgende **Eigenschaften** (**B1**)—(**B3**) erfüllt sind:

(**B1**) $V = E_m \oplus F_m^0$, $\quad V^* = F_m \oplus E_m^\perp$ und $\|P_m^*(x^*) - x^*\| \leqq \delta$ für $x^* \in U$.

(**B2**) $\max\{\|P_m\|, \|P_m^*\|\} < C_B$.

(**B3**) Es gibt eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_m$, so daß gilt

$$\|P_m(x)\|_m \leqq \|x\|_m \quad \text{für } x \in V.$$

Beispiele: a) *Jeder Hilbertraum* $(H, (\cdot, \cdot))$ *ist vom Typ* (BB): Zu jedem $\delta > 0$ und zu beliebiger kompakter Menge $U \subset H^*$ gibt es nach [7: § 4] einen m-dimensionalen Unterraum $F_m \subset H^*$ und eine Abbildung (Schauder-Projektion) $\eta\colon U \to F_m$ derart, daß $\|\eta(x^*) - x^*\| < \delta$ für alle $x^* \in U$ gilt. Es sei $j\colon H \to H^*$ der Rieszsche Isomorphismus und $E_m = j^{-1}(F_m)$. Dann sind $E_m{}^\perp$ und $F_m{}^0$ orthogonale Komplemente von F_m in H^* bzw. von E_m in H. Für die orthogonale Projektion $P_m^*\colon H^* \to F_m$ gilt also $\|P_m^*(x^*) - x^*\| \leqq \|\eta(x^*) - x^*\| < \delta$ für $x^* \in U$. Die Eigenschaft (**B1**) ist somit erfüllt. Die Eigenschaften (**B2**) und (**B3**) gelten ebenfalls, wenn man $C_B = 2$ und $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|$ setzt.

b) *Jeder reflexive Banachraum* $(V, \|\cdot\|)$ *mit Basis ist vom Typ* (BB): Es sei (x_n) eine Basis für V und (x_n^*) die entsprechende (biorthogonale) Basis für V^*. Nach [4: § 28] existiert zu jedem $\delta > 0$ und jeder kompakten Teilmenge $U \subset V^*$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$, so daß $\|P_m^*(x^*) - x^*\| < \delta$ für $x \in U$ und $m \geqq n_0$ gilt. Demzufolge ist die Eigenschaft (**B1**) bezüglich $E_m = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$ und $F_m = \operatorname{span}\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ mit $m \geqq n_0$ erfüllt. Es wurde in [4: § 28] weiterhin gezeigt, daß es eine Konstante C mit $\|P_m\| \leqq C$ und $\|P_m^*\| \leqq C$ für beliebige m gibt, die Eigenschaft (**B2**) ist also erfüllt. Die Eigenschaft (**B3**) schließlich folgt direkt aus Satz 1.1.

§ 2 Spezielle Funktionen aus $J^k(f, \omega)$ (0)

In diesem Abschnitt sei V ein Banachraum vom Typ (BB). Es sei $p \in V$ und $\mathcal{O}$ eine Umgebung von p. Auf $\mathcal{O}$ wird eine C^k-Funktion f betrachtet, für die wir folgende **Bedingungen** annehmen:

(a) $d^i f(p) = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$ ($k \geqq 2$; $d^i f$ bezeichne hier das i-te Differential von f).

(b) Die Abbildung $df: \mathcal{O} \to V^*$ ist vollstetig, d. h. df überführt beschränkte in relativ kompakte Mengen.

Da unsere Betrachtungen lokaler Natur sind, nehmen wir im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ an. In [10] wurde die *Funktionenklasse* $J^k(f, \omega)$ (0) für eine beliebige reelle Zahl $\omega > 0$ definiert:

$$J^k(f, \omega)(0) = \{\hat{f} \in C^1(\mathcal{O}, \mathbf{R}) : \hat{f}(0) = f(0) \text{ und für eine Umgebung } U \text{ von } 0 \text{ gilt}$$
$$\|d\hat{f}(x) - df(x)\| \leqq \omega \|x\|^{k-1} \text{ für alle } x \in U\}.$$

Sie enthält die in der Singularitätentheorie bekannte Funktionenklasse

$$J^k(f)(0) = \{\hat{f} \in C^k(\mathcal{O}, \mathbf{R}) : \hat{f}(0) = f(0) \text{ und zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine}$$
$$\text{Umgebung } U \text{ von } 0, \text{ so daß gilt } \|d\hat{f}(x) - df(x)\| \leqq \varepsilon \|x\|^{k-1} \text{ für alle } x \in U\}.$$

Wir konstruieren nun spezielle, zu $J^k(f, \omega)$ (0) gehörende Funktionen, deren Definitionsbereich auf einen endlichdimensionalen Unterraum von V eingeschränkt werden kann. Zuerst zeigen wir

Lemma 2.1: *Es sei $G = df$ und*

$$I = \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}G(0) \quad \textit{mit} \quad I(x) = \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}G(0)\, x^{k-1}.$$

Zu jedem $\omega > 0$ gibt es m-dimensionale Unterräume $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ mit $V = E_m \oplus F_m{}^0$, so daß für alle $x \in V$ folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$\text{(i)} \qquad \|I(x) - I(P_m(x))\| \leqq \frac{\omega}{4} \|x\|^{k-1},$$

$$\text{(ii)} \qquad \|I(P_m(x)) - I(P_m(x))\, P_m\| \leqq \frac{\omega}{4} \|x\|^{k-1}.$$

Beweis: Es gilt $I \in SL^{k-1}(V, V^*)$ (Raum aller symmetrischen linearstetigen Abbildungen). Die Ableitung von I an der Stelle v hat daher bei $k > 2$ die Form

$$dI(v)\, u = \frac{1}{(k-2)!} d^{k-1}G(0)\, (v, \ldots, v, u), \qquad u \in V$$

(bei $k = 2$ ist $dI(v)\, u = dG(0)\, u$). Es sei nun $\hat{G}(v, u) = (k-2)!\, dI(v)\, u$. Dann ist $\hat{G}$ eine Abbildung von $V \times V$ in V^*. Nach [3: § 17] ist $\hat{G}$, da G eine vollstetige Abbildung ist, sogar vollstetig. Wir wählen weiter $r > 0$ so, daß $B(0, r) = \{x \in V: \|x\| < r\} \subset \mathcal{O}$ ist. Zu $\omega_1 > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß die Ungleichung

$$\frac{2^{k-1}(1 + C_B)^k\, \delta}{r^{k-1}} < \omega_1 \tag{2}$$

erfüllt ist. Setzen wir $U = \hat{G}(B(0, r) \times B(0, r))$, so ist $U_0 = \overline{U} \subset V^*$ eine kompakte Teilmenge. Zu U_0 und δ gibt es nach der Eigenschaft (B1) m-dimensionale Unterräume $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ mit $V = E_m \oplus F_m{}^0$ und $V^* = F_m \oplus E_m{}^\perp$, so daß gilt

$$\|P_m{}^*(x^*) - x^*\| < \delta \quad \text{für alle } x^* \in U_0. \tag{3}$$

Für $r_0 = r/(1 + C_B)$ und $z = P_m(x)$ mit $x \in B(0, r_0)$ sind die Werte $\|x - z\|$, $\|z\|$ und $\|tx + (1 - t) z\|$ offensichtlich kleiner als r, die Punkte $x - z$, z und $tx + (1 - t) z$ liegen also in $B(0, r)$.

(i): Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\langle I(x) - I(z), w\rangle = \int_0^1 dI(y)\,(x - z)\, w\, dt$$

mit $y = tx + (1 - t) z$, $0 \leq t \leq 1$, wobei

$$dI(y)\,(x - z)\, w = \frac{1}{(k - 2)!}\, d^{k-1}G(0)\,(y, \ldots, y, x - z)\, w$$

mit

$$\begin{aligned} d^{k-1}G(0)\,(y, \ldots, y, x - z)\, w &= d^{k-1}G(0)\,(y, \ldots, y, w)\,(x - z) \\ &= \langle \hat{G}(y, w), x - z\rangle \end{aligned}$$

gilt. Für $\gamma = \langle I(x) - I(z), w\rangle$ mit $w \in B(0, 1)$ und $s = r_0 w$ erhalten wir

$$\gamma = \frac{1}{(k - 2)!\, r_0} \int_0^1 \langle \hat{G}(y, s), x - z\rangle\, dt$$

mit $(y, s) \in B(0, r) \times B(0, r)$. Da $x - z \in F_m{}^0$ und somit $\big\langle P_m{}^*\big(\hat{G}(y, s)\big), x - z\big\rangle = 0$ gilt, folgt

$$\gamma = \frac{1}{(k - 2)!\, r_0} \int_0^1 \langle \hat{G}(y, s), x - z\rangle - \big\langle P_m{}^*\big(\hat{G}(y, s)\big), x - z\big\rangle\, dt.$$

Aus (3) erhalten wir wegen $x \in B(0, r_0)$ und $\hat{G}(y, s) \in U_0$ die Abschätzung

$$\|I(x) - I(z)\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle I(x) - I(z), w\rangle| \leq \frac{(1 + C_B)}{(k - 2)!}\, \delta.$$

Nun sei $x \in V$ beliebig und $u = (r_0/2\,\|x\|)\, x$. Dann ist $u \in B(0, r_0)$ und daher $\|I(u) - I\big(P_m(u)\big)\| \leq \big((1 + C_B)/(k - 2)!\big)\, \delta$. Aus der Linearität von P_m und der $(k - 1)$-Linearität von I folgt

$$\frac{r_0{}^{k-1}}{2^{k-1}\,\|x\|^{k-1}}\, \|I(x) - I\big(P_m(x)\big)\| \leq \frac{(1 + C_B)\,\delta}{(k - 2)!}.$$

Diese Ungleichung, (2) und $r_0 = r/(1 + C_B)$ ergeben sofort (i).

(ii): Aus $V = E_m \oplus F_m{}^0$ und $V^* = F_m \oplus E_m{}^\perp$ folgt $\langle I(x) - I(x)\, P_m, w\rangle = \big\langle I(x) - P_m{}^*\big(I(x)\big), w\big\rangle$. Nach Eigenschaft (B1) und (3) gilt die Ungleichung

$$\|I(x) - P_m\big(I(x)\big)\| < \frac{1}{(k - 1)!}\, \delta < \delta \quad \text{für } I(x) = \frac{1}{(k - 1)!}\, \hat{G}(x, x),$$

$x \in B(0, r)$, womit die Beziehung $\|I(x) - I(x) P_m\| \leqq \delta$, $x \in B(0, r)$ bewiesen ist. Es sei nun $x \in V$ beliebig und $u = rP_m(x)/2\,\|P_m(x)\|$. Dann ist $u \in B(0, r)$ und daher $\|I(u) - I(u) P_m\| \leqq \delta$. Durch Anwendung von (2) erhalten wir wie vorher (ii) ∎

Satz 2.2: *Zu jedem $\omega > 0$ gibt es m-dimensionale Unterräume $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ mit $V = E_m \oplus F_m^0$, und durch $f^m(x) = f(P_m(x))$ wird eine C^k-Funktion $f^m \in J^k(f, \omega)(0)$ definiert.*

Beweis: Nach Lemma 2.1 gibt es zu $\omega > 0$ m-dimensionale Unterräume $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ mit $V = E_m \oplus F_m^0$, so daß die Beziehungen (i) und (ii) gelten. Es sei $f^m(x) = f(P_m(x))$; $x \in B(0, r_0)$. Wir zeigen, daß $f^m \in J^k(f; \omega)(0)$ ist. Offensichtlich ist $f^m \in C^k$ und $f^m(0) = f(0)$. Ferner gilt $df^m(x) = df(P_m(x)) P_m = G(z) P_m$ mit $G = df$ und $z = P_m(x)$. Nach Bedingung (a) erhalten wir (durch Anwendung des Taylor-Theorems)

$$G(z) P_m = \left(\frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}G(0) z^{k-1} + O(z)\right) P_m = I(z) P_m + O(z) P_m$$

mit $\|O(z)\|/\|z\|^{k-1} \to 0$ für $z \to 0$. Weiter folgt aus $\|O(z) P_m\| \leqq \|O(z)\|\,\|P_m\| \leqq C_B\,\|O(z)\|$ und aus $\|z\| \leqq C_B\|x\|$ die Beziehung $\|O(z) P_m\|/\|x\|^{k-1} \to 0$ für $x \to 0$. Für $\omega_1 = \omega/4$ existiert daher eine Umgebung U_1 von 0 mit $U_1 \subset B(0, r_0)$, so daß $\|O(z) P_m\| \leqq \omega_1\|x\|^{k-1}$ für $x \in U_1$ gilt. Wir haben die Gleichung

$$\begin{aligned} df(x) - df^m(x) &= G(x) - I(z) P_m - O(z) P_m \\ &= G(x) - I(x) + I(x) - I(z) + I(z) - I(z) P_m - O(z) P_m. \end{aligned}$$

Wegen $G(0) = \cdots = d^{k-2}G(0)\ (= df(0) = \cdots = d^{k-1}f(0)) = 0$ folgt aus dem Taylor-Theorem $G(x) - I(x) = O(x)$ mit $\|O(x)\|/\|x\|^{k-1} \to 0$ für $x \to 0$. Zu ω_1 existiert also eine Umgebung $U_2 \subset B(0, r_0)$, so daß $\|G(x) - I(x)\| \leqq \omega_1\|x\|^{k-1}$ für $x \in U_2$ gilt. Wir erhalten für $x \in U_1 \cap U_2$ die Abschätzung (unter Anwendung der Ungleichungen (i) und (ii) im Lemma 2.1)

$$\begin{aligned} &\|df(x) - df^m(x)\| \\ &\leqq \|G(x) - I(x)\| + \|I(x) - I(z)\| + \|I(z) - I(z) P_m\| + \|O(z) P_m\| \\ &\leqq 4\omega_1\,\|x\|^{k-1} \leqq \omega\,\|x\|^{k-1} \end{aligned}$$ ∎

§ 3 Quadratische Formen mit konstantem Index

In diesem Abschnitt seien V, $\mathcal{O}$ und f wie in § 2. Wir betrachten auf $\mathcal{O}$ die C^k-Funktion ($k \geqq 2$)

$$g: \mathcal{O} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) = \lambda(x) + f(x).$$

Dabei sei $\lambda: \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ eine C^k-Funktion, die folgende **Bedingung** (λ) erfüllen soll, (darin bezeichnen $E_m \subset V$ und $F_m \subset V^*$ wieder m-dimensionale Unterräume):

(λ) Gilt $V = E_m \oplus F_m^0$ und $(1-t)\,x + tP_m(x) \in \mathcal{O}$ mit $0 \leqq t \leqq 1$, dann ist

$$\lambda(x) \geqq \lambda((1-t)\,x + tP_m(x)).$$

Wir bemerken, daß die Funktion $\lambda(\cdot) = (\cdot, \cdot)^{k/2}$ eines Hilbertraumes $(H, (\cdot, \cdot))$ der Bedingung (λ) genügt.

Nun sei $\omega > 0$ beliebig gegeben und E_m, F_m sowie f^m mit $f^m(x) = f(P_m(x))$ wie in Lemma 2.1 definiert (bezüglich eines bestimmten $\delta > 0$ und einer kompakten Menge

$U_0 \subset V^*$). Setzt man $g^m(x) = \lambda(x) + f^m(x)$, dann ist g^m eine wohldefinierte C^k-Funktion auf einer Umgebung von 0. Wegen $dg^m(x) - dg(x) = df^m(x) - df$ gilt ferner $\|dg^m(x) - dg(x)\| \leqq \omega \|x\|^{k-1}$ für alle x in einer Umgebung von 0. Das bedeutet, daß g^m wegen $g^m(0) = g(0)$ zu $J^k(g, \omega)(0)$ gehört. Es werden nun einige Begriffe und Ergebnisse aus [10] wiederholt:

Gegeben sei $\alpha \in \mathbf{R}$. g hat die Eigenschaft $Q(\alpha, a)$ in $0 \in V$ mit einer Konstanten $a > 0$, falls $\|dg(x)\| \geqq a \|x\|^{k-1}$ für alle x in einer Umgebung von 0 gilt. g heißt *lokal homöomorph* in 0 zu $\hat{g}$, wenn es zu jeder Umgebung U von 0 eine Umgebung W von 0 und einen Homöomorphismus Φ, $W \approx \Phi(W)$ gibt, so daß $\Phi(0) = 0$, $\Phi(W) \subset U$ und $g\Phi(x) = g(\Phi(x)) = \hat{g}(x)$ für alle $x \in W$ gilt. Offenbar ist $\hat{g}$ dann auch lokal homöomorph in 0 zu g.

Satz 3.1: *Hat g die Eigenschaft $Q(\alpha, a)$ mit $\alpha > 1$ in 0, dann ist g lokal homöomorph in 0 zu jedem $\hat{g} \in J^\alpha(g, \omega)(0)$ mit $\omega < a/2^{\alpha+1}$.*

Folgerung 3.2: *Die n-kritischen Gruppen $C_n(0, g)$ von g und $C_n(0, \hat{g})$ von $\hat{g}$ sind zueinander isomorph.* (Die n-kritische Gruppe $C_n(0, g)$ von g an der Stelle 0 ist durch die n-Homologiegruppe $H_n(U_{c-} \cup 0, U_{c-}; \mathrm{G})$ definiert. Dabei ist $c = g(0)$, U eine Umgebung von 0, $U_{c-} = \{x \in U : g(x) < c\}$ und G eine Abelsche Gruppe. Für genügend kleine U ist $C_n(0, g)$ bis auf Isomorphie eine Invariante.)

Mit g^m, f^m und E_m wie vorher setzen wir nun $g^{(m)} = g \mid E_m$ und $f^{(m)} = f \mid E_m$ (die Einschränkung von g und f auf E_m). Wir bemerken, daß bisher die Eigenschaft (B3) noch nicht benutzt wurde. Im folgenden Satz 3.3 ist diese aber erforderlich. Wir nehmen von nun $g(0) = c$ an und halten G bei allen kritischen Gruppen fest.

Satz 3.3: *Für beliebige n gilt $C_n(0, g^m) \cong C_n(0, g^{(m)})$.*

Beweis: Nach Eigenschaft (B3) gibt es eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_m$ mit $\|P_m(x)\|_m \leqq \|x\|_m$ für $x \in V$. Es erzeugen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_m$ also dieselbe Topologie für V. Daher existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $W = \{x \in V : \|x\|_m < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$ ist und für $W_{c-} = \{x \in W : g^m(x) < c\}$ gerade $C_n(0, g^m) \cong H_n(W_{c-} \cup 0, W_{c-}; \mathrm{G})$ gilt. Für $x \in W_{c-}$ und $y = tp_m(x) + (1 - t)\, x$ mit $0 \leqq t \leqq 1$ gilt $y \in W$ wegen $\|y\|_m \leqq \|x\|_m$. Dies zusammen mit der Beziehung $g^m(y) = \lambda(y) + f(P_m(y)) \leqq \lambda(y) + f(P_m(x)) \leqq \lambda(x) + f^m(x)$ bedeutet, daß y zu W_{c-} gehört. Für $W_m = W \cap E_m$ und $W_{mc-} = \{x \in W_m : g^{(m)}(x) < c\}$ ist weiter $W_{mc-} = W_{c-} \cap E_m$ (tatsächlich, für $x \in W_{mc-}$ ist $g^m(x) = \lambda(x) + f(P_m(x)) = \lambda(x) + f(x) = g^{(m)}(x)$ und damit $x \in W_{c-} \cap E_m$, und letzteres impliziert $g^{(m)}(x) = g(x) = \lambda(x) + f(x) = (x) + f(P_m(x)) = g^m(x) < c$ und damit $x \in W_{mc-}$). Folglich gehört $P_m(x)$ zu W_{mc-} für $x \in W_{c-}$, denn $P_m(x) \in E_m$ und nach obigen gehört $P_m(x)$ auch zu W_{c-}. Durch die Abbildung $h: [0, 1] \times (W_{c-} \cup 0) \to (W_{c-} \cup 0)$, $h(t, x) = tP_m(x) + (1 - t)\, x$, ist das Paar $(W_{mc-} \cup 0, W_{mc-})$ ein Deformationsretrakt von dem Paar $(W_{c-} \cup 0, W_c)$. Die Homologiegruppen von diesen Mengen von Paaren sind nach [1: Theorem I.11.8] einander isomorph. Man kann ε so verkleinern, daß die Beziehung $C_n(0, g^{(m)}) \cong H_n(W_{mc-} \cup 0, W_{mc-}; \mathrm{G})$ gilt, mit anderen Worten $C_n(0, g^m) \cong C_n(0, g^{(m)})$ ∎

Es folgt nun unser Hauptergebnis.

Satz 3.4: *Es sei 0 ein kritischer Punkt von g und g besitze die Eigenschaft $Q(k, a)$ in 0. Dann gibt es eine Umgebung $U^{(m)}$ von 0 in einem m-dimensionalen Unterraum $E_m \subset V$ und eine Umgebung U von 0 in V, so daß für jedes $y \in U$ ein $v \in U^{(m)}$ und eine von y abhängige nichtnegative reelle Zahl α_y existieren, die folgender Gleichung* *genügen:*

$$g(y) = \alpha_y + g(0) + \frac{1}{k!}\, d^k g^{(m)}(0)\, v^k + \frac{1}{i!}\, d^i\lambda(0)\, v^i. \tag{4}$$

Im Falle $k = 2$ hat g eine quadratische Darstellung um 0:

$$g(y) = \alpha_y + g(0) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 + \sum_{i=q+1}^{m} \alpha_i^2, \tag{5}$$

wobei α_i Koordinaten von v bezüglich einer fixierten Basis in E_m sind. Die Zahl q ist eine von der Dimension m unabhängige Konstante. Es gilt

$$C_n(0, g) \cong \begin{cases} G & \text{für } n = q \\ 0 & \text{für } n \neq q. \end{cases}$$

E. Rothe [8] setzte für eine Funktion g auf einem Hilbertraume voraus, daß $\operatorname{grad} g = x\|x\|^{k-1} + \operatorname{grad} f(x)$ sei, wobei f eine C^{k+2}-Funktion und $x \to \operatorname{grad} f(x)$ eine vollstetige Abbildung ist. Unter der Annahme, daß 0 ein nichtentarteter k-kritischer Punkt ist (d. h. $d^i g(0) = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und g hat die Eigenschaft $Q(k, a)$ in 0), zeigte er die Isomorphie von $C_n(0, g)$ und $C_n(0, g^m)$. Dabei ist g^m durch $g^m(x) = g(P_m(x))$ mit der orthogonalen Projektion P_m definiert. Danach konnte er nachweisen, daß $C_n(0, g)$ endlich erzeugt ist. Bei uns folgt die Endlichkeit von $C_n(0, g^{(m)})$ wegen $g^m \in J^k(g, \omega)$ (0) aus $C_n(0, g) \cong C_n(0, g^n)$ und aus einem bei Rothe erwähnten Argument. Im Falle $k = 2$ wird bei uns die kritische Gruppe $C_n(0, g)$ sogar berechnet.

Beweis des Satzes 3.4: Man wähle $0 < \omega < a/2^{k+1}$ und bestimme bezüglich ω den m-dimensionalen Unterraum E_m, die Funktion g^m sowie $g^{(m)}$ wie vorher. Dann ist $g^m \in J^k(g, \omega)$ (0) und demzufolge existiert nach Satz 3.1 eine Umgebung W von 0 und ein Homöomorphismus Φ, $W \approx \Phi(W)$, so daß $\Phi(0) = 0$, $\Phi(W) \subset \mathcal{O}$ und $g(\Phi(x)) = g^m(x)$ für $x \in W$ gilt. Es sei nun $W_1 = E_m \cap W$ und $W_2 = P_m^{-1}(W_1) \cap W$. Für $x \in W_2$ und $z = P_m(x)$ folgt $g^m(x) = \lambda(x) + f^m(x) = \lambda(x) + f(z) = \lambda(x) - \lambda(z) + \lambda(z) + f(z) = \lambda(x) - \lambda(z) + g^{(m)}(z)$. Nun gilt für $W_3 = \Phi(W_2)$ und $y = \Phi(x)$ mit $x \in W_2$ die Gleichung

$$g(y) = g(\Phi(x)) = g^m(x) = \alpha_y + g^{(m)}(z) \quad \text{mit} \quad \alpha_y = \lambda(x) - \lambda(y).$$

Es sei $g_k(m)$ (x) die bis zur Ordnung k gebildete Taylor-Entwicklung an der Stelle 0 von $g^{(m)}$. Wegen $g^{(m)}(0) = g(0)$ und $d^i f^{(m)}(0) = d^i f(0) = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$ gilt

$$g_k^{(m)}(x) = g(0) + \frac{1}{k!}\, d^k g^{(m)}(0)\, x^k + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{i!}\, d^i\lambda(0)\, x^i.$$

Als eine Funktion gehört $g_k^{(m)}$ bekanntlich zu $J^k(g^{(m)})$ (0), und da $g^{(m)}$ die Eigenschaft $Q(k, a)$ in 0 hat, hat $g_k^{(m)}$ in 0 auch die Eigenschaft $Q(k, a')$ mit einem $a' > 0$ [10: § 5]. Nach Satz 3.1 ist $g_k^{(m)}$ lokal homöomorph in 0 zu $g^{(m)}$. Es gibt also eine Umgebung W_4 von 0 mit $W_4 \subset W_1$ und einen Homöomorphismus Φ', $W_4 \approx \Phi'(W_4)$, so daß $\Phi'(0) = 0$, $\Phi'(W_4) \subset W_1$ und

$$g_k^{(m)}(\Phi'(x)) = g^{(m)}(x), \quad \text{für} \quad x \in W_4 \tag{6}$$

gilt. $U = \Phi(P_m^{-1}(W_4) \cap W)$ und $U^{(m)} = \Phi'(W_4)$ sind dann Umgebungen von 0 in V bzw. in E_m. Ferner gilt $U \subset W_3$, so daß aus $g(y) = \alpha_y + g^{(m)}(z)$ für $y \in W_3$ und aus $g^{(m)}(x) = g_k^{(m)}(\Phi'(x))$ die Gleichung

$$g(y) = \alpha_y + g^{(m)}(z) = \alpha_y + g_k^{(m)}(\Phi'(z)) = \alpha_y + g_k^{(m)}(v) \quad \text{für } y \in U$$

mit $v = \Phi^{-1}(z) \in U^{(m)}$ folgt. Setzen wir (6) ein, so folgt (4).

Für $k = 2$ erhalten wir $g(y) = \alpha_y + g(0) + 2^{-1}d^2g^{(m)}v^2$. Andererseits gilt nach dem Taylor-Theorem

$$dg^{(m)}v = dg^{(m)}(0) + d[dg^{(m)}](0)\,v + O(v) = d^2g^{(m)}v + O(v),$$

wobei $\|O(v)\| \leqq \varepsilon\,\|v\|$ für beliebige $\varepsilon > 0$ und v in einer durch ε bestimmten Umgebung U_1 von 0 gilt. Da $g^{(m)}$ die Eigenschaft $Q(2, a)$ in 0 hat, gibt es eine Umgebung U_2 von 0 mit $\|dg^{(m)}v\| \geqq a\,\|v\|$ für $v \in U_2$. Für $\varepsilon < a$ und $v \in U_1 \cap U_2$ erhalten wir

$$\|d^2g^{(m)}v\| \geqq \|dg^{(m)}v\| - \|O(v)\| \geqq a\,\|v\| - \varepsilon\,\|v\| = (a - \varepsilon)\,\|v\|.$$

Demzufolge ist $d^2g^{(m)}\colon E_m \to E_m{}^*$ eine injektive Abbildung. $d^2g^{(m)}$ ist sogar surjektiv wegen $\dim E_m = \dim E_m{}^* = m$. Daher definiert $\mathbf{D}(v, v) = 2^{-1}d^2g^{(m)}v^2$ eine nichtentartete quadratische Form. Es gibt also eine Basis $B = \{x_1, \ldots, x_m\}$ für E_m mit der Eigenschaft $\mathbf{D}(x_j, x_j) = \pm 1$ und $\mathbf{D}(x_i, x_j) = 0$ für $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Für jedes $v \in E_m$ mit $v = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_mx_m$ folgt

$$\mathbf{D}(v, v) = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_i{}^2 + \sum_{i=q+1}^{m} \alpha_i{}^2,$$

wobei q der Index von $\mathbf{D}$ ist. Damit gilt (5).

Zum Schluß zeigen wir, daß die Zahl q konstant bleibt, wenn wir statt E_m einen anderen m'-dimensionalen Unterraum $E_{m'}$ mit $m' \neq m$ wählen. Wegen $\mathbf{R}^m \cong E_m$ (topologisch) existiert ein Isomorphismus $\pi\colon \mathbf{R}^m \cong E_m$ derart, daß die Menge $B' = \{s_1, \ldots, s_m : s_i = \pi^{-1}(x_i),\ x_i \in B\}$ eine orthogonale Basis für $\mathbf{R}^m$ bildet. Man setze nun $U' = \pi^{-1}(U^{(m)})$ und $\xi(s) = g^{(m)}(\pi(s))$ mit $s \in U'$. Dann ist ξ eine C^2-Funktion auf U' mit $d\xi(0) = 0$ und $d^2\xi(0)\,s^2 = d^2g^{(m)}(0)\,x^2$ für $x = \pi(s)$. ξ hat folglich auch die Eigenschaft $Q(2, a'')$ in 0 mit einer Konstanten $a'' > 0$. Somit gelten die Beziehungen $C_n(0, g^{(m)}) \cong C_n(0, \xi) \cong C_n(0, \xi_2)$, wobei $\xi_2(s) = \xi(0) + 2^{-1}d^2\xi(0)\,s^2$ ist. Wir haben ferner nach Satz 3.3 $C_n(0, g^{(m)}) \cong C_n(0, g^m)$ und $C_n(0, g^m) \cong C_n(0, g)$ wegen $g^m \in J^2(g, \omega)(0)$, womit die Beziehung $C_n(0, g) \cong C_n(0, \xi_2)$ folgt. Weiterhin berechnen wir $C_n(0, \xi_2)$. Dazu sei D^m eine abgeschlossene Kugel um $0 \in \mathbf{R}^m$ mit $D^m \subset U'$, $R^q = \operatorname{span}\{s_1, \ldots, s_q\}$, $D^q = D^m \cap R^q$ und $D^m_{c-} = \{s \in D^m : \xi_2(s) < c\}$ mit $c = \xi_2(0)$. Zuerst gilt $D^q \subset D^m_{c-} \cup 0$. Ist nämlich $v = \gamma_1s_1 + \cdots + \gamma_qs_q \neq 0$, dann folgt

$$\xi_2(v) = \xi(0) + \frac{1}{2}\,d^2\xi(0)\,v^2 = c - \sum_{i=1}^{q} \gamma_i{}^2 < 0,$$

d. h. $v \in D^m_{c-}$. Für $s \in D^m_{c-}$ und s' als die Projektion von s auf R^q zeigen wir, daß $w = (1 - t)\,s + ts'$ für $0 \leqq t \leqq 1$ zu D^m_{c-} gehört. Dazu setzen wir $\mathbf{D}(w, v) = 2^{-1}d^2\xi(0)\,(w, v)$, $\mathbf{D}(w) = \mathbf{D}(w, w)$ und zeigen, daß

$$\xi_2(w) = c + \mathbf{D}(w) = c + (1 - t)^2\,\mathbf{D}(s) + t^2\mathbf{D}(s') + 2(1 - t)\,t\mathbf{D}(s, s') < c$$

für $0 \leqq t \leqq 1$ ist. Zunächst sind folgende Gleichungen einfach zu beweisen:

$$\mathbf{D}(s, s - s') = 0, \qquad \mathbf{D}(s, s') = \mathbf{D}(s') \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(s) = \mathbf{D}(s') + \mathbf{D}(s - s').$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so ergibt sich wegen $s \in D^m_{c-}$

$$\xi_2(w) = c + \mathbf{D}(s') + (1 - t)^2\,\mathbf{D}(s - s') \leqq c + \mathbf{D}(s') + \mathbf{D}(s - s') = c + \mathbf{D}(s) < c.$$

Demzufolge gehört w zu D^m_{c-}. Durch $h(t, s) = (1 - t)\,s + ts'$ wird somit eine Abbildung von $D^m_{c-} \cup 0$ in sich definiert. Man überzeugt sich leicht, daß dadurch das Paar $(D^q, D^q \cup 0)$ ein Deformationsretrakt von $(D^m_{c-} \cup 0, D^m_{c-})$ ist. Wir erhalten $H_n(D^m_{c-} \cup 0, D^m_{c-}; \mathbf{G}) \cong H_n(D^q, D^q \cup 0; \mathbf{G})$. Nach einem bekannten Ergebnis der algebraischen Topologie gilt aber

$$H_n(D^q, D^q \cup 0; G) \cong H_n(D^q, S^{q-1}; G) \cong \begin{cases} G & \text{für } n = q \\ 0 & \text{für } n \neq q, \end{cases}$$

wobei S^{q-1} die $(q-1)$-dimensionale Sphäre von D^q ist. Da aber $C_n(0, \xi_2) \cong H_n(D^m_{c-} \cup 0, D^m_{c-}; G)$ ist, folgt

$$C_n(0, \xi_2) \cong \begin{cases} G & \text{für } n = q \\ 0 & \text{für } n \neq q. \end{cases}$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich sofort der Beweis der letzten Behauptung ∎

Aus unseren Ergebnissen, besonders denen von § 2, ergeben sich weitere Fragen über Approximationseigenschaften. Unter gewissen Kompaktheitsbedingungen lassen sich für eine Abbildung $A: V \to V^*$ endlichdimensionale Approximationsabbildungen A_m konstruieren, so daß $\|A(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ für alle x in einer ε-Umgebung des Nullpunktes gilt. Diese Approximationsungleichung ist insofern interessant, als sie stabil ist. In einer weiteren Arbeit werden wir uns mit solchen Stabilitätseigenschaften von Abbildungen befassen.

Danksagung: Der Autor bedankt sich herzlich bei L. Bittner für viele Anregungen, bei T. Riedrich für hilfreiche Bemerkungen und Hinweise und bei K. Zacharias für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.

LITERATUR

[1] Eilenberg, S., and N. Steenrod: Foundation of Algebraic Topology. Princeton (N.J.): Princeton University Press 1952.
[2] Gromoll, D., and W. Meyer: On differentiable functions with isolated critical points. Topology 8 (1969), 361–369.
[3] Красносельский, М. А., и П. П. Забрейко: Геометрические методы нелинейного анализа. Москва: Изд-во Наука 1975.
[4] Ljusternik, L. A., und W. T. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin: Akademie-Verlag 1975.
[5] Morse, M., and S. S. Cairns: Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology. New York–London: Akademic Press 1969.
[6] Palais, R.: Morse theory on Hilbert manifolds. Topology 5 (1966), 115–132.
[7] Riedrich, T.: Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 4). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.
[8] Rothe, E.: Critical point theory under the regular boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 36 (1971), 377–431.
[9] Singer, I.: Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin–Heidelberg: Springer Verlag 1973.
[10] Tu, N. A.: Lokale topologische Eigenschaften der auf Banachmannigfaltigkeiten definierten differenzierbaren Funktionen. Math. Nachr. 105 (1982), 225–245.

Manuskripteingang: 01. 03. 1983; in revidierter Fassung 17. 12. 1985

VERFASSER:

Dr. N. A. Tu
Akademie der Landwirtschaftswissenschaften
Institut für Landwirtschaftliche Information und Dokumentation
DDR-1086 Berlin, Krausenstr. 38–39