Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (2) 1987, S. 107–119

Eine gemischte Randwertaufgabe für stationäre Mehrschichtenströmungen

J. SOCOLOWSKY und J. BERGMANN

Es wird eine gemischte Randwertaufgabe für die mehrschichtige Strömung Newtonscher Flüssigkeiten untersucht, die in enger Beziehung zu freien Randwertaufgaben steht. Anhand eines entsprechenden verallgemeinerten Lösungsbegriffes werden Aussagen über Existenz und Unität der Lösung bewiesen. Für die lineare Aufgabe werden lokale Regularitätseigenschaften der verallgemeinerten Lösung nachgewiesen.

Исследуется смешанная краевая задача для многослойного течения ньютоновских жидкостей, которая находится в тесной связи с задачами со свободными границами. При помощи соответствующего понятия обобщенного решения доказываются теоремы существования и единственности решения. Для линейной задачи показываются локальные свойства регулярности обобщенного решения.

A mixed boundary value problem for the multi-layer flow of Newtonian liquids is discussed, which corresponds to free boundary problems. Basing on an appropriate generalized solution, theorems of existence and uniqueness are proved. For the linear problem local regularity properties of the generalized solution can be shown.

1. Einführung und mathematische Problemformulierung

Es soll ein mathematisches Modell für die stationäre, isotherme Mehrschichtenströmung Newtonscher Flüssigkeiten, wie sie insbesondere bei Beschichtungsvorgängen auftritt, untersucht werden. Aus dem technischen Hintergrund dieses Problems ergibt sich, daß das Strömungsgebiet zweidimensional betrachtet wird und die Flüssigkeiten als inkompressibel vorausgesetzt werden. Die im folgenden erläuterte gemischte Festrandwertaufgabe steht in enger Beziehung zu einer Aufgabe mit freien Grenzflächen (vgl. [8]) und stellt eine wesentliche Zwischenstufe bei der Lösung der letzteren dar.

Es wird das Strömungsgebiet aus Abb. 1 zugrunde gelegt, das sich aus N ($N \geqq 2$) Gebieten (Schichten) G_k zusammensetzt.

Aus dem technischen Hintergrund der Aufgabe resultieren die folgenden geometrischen Einschränkungen an das Gebiet G. Sie sind mathematisch nicht zwingend notwendig, vereinfachen jedoch die Ausführungen. Gegeben seien 6 paarweise verschiedene Punkte P_{1N}, P_{10}, Q_1, Q_2, P_{20} und P_{2N}. Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem so in die Ebene, daß Q_2 zum Ursprung wird und die Koordinaten von P_{20} die Forderungen $x_1(\mathsf{P}_{20}) > 0$ sowie $x_2(\mathsf{P}_{20}) = 0$ erfüllen. Das nichttriviale Dreieck $\Delta \mathsf{P}_{1N}\mathsf{P}_{10}\mathsf{Q}_1$ und der Punkt P_{2N} mögen im ersten oder zweiten Quadranten liegen. Ferner gelte $x_1(\mathsf{P}_{2N}) \geqq x_1(\mathsf{P}_{20})$ und die Strecke $\overline{\mathsf{P}_{20}\mathsf{P}_{2N}}$ möge außerhalb des Dreieckes $\Delta \mathsf{P}_1\mathsf{P}_{10}\mathsf{Q}_1$ liegen. Schließlich wird noch verlangt, daß $x_1(\mathsf{P}_{10}) < x_1(\mathsf{P}_{1N})$ gilt. Wir benennen ferner folgende Strecken:

$$\Sigma_1 = \overline{\mathsf{P}_{10}\mathsf{P}_{1N}}, \quad \Sigma_2 = \overline{\mathsf{P}_{20}\mathsf{P}_{2N}}, \quad \Sigma_3 = \overline{\mathsf{P}_{10}\mathsf{Q}_1}, \quad \Sigma_4 = \overline{\mathsf{Q}_2\mathsf{P}_{20}}.$$

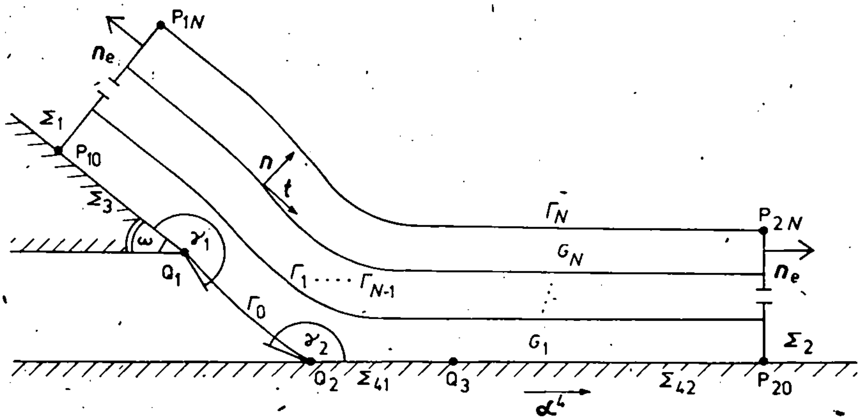

Abb. 1

Der Punkt Q_3 zerlegt die Strecke Σ_4 in zwei nichttriviale Teilstrecken Σ_{41} und Σ_{42}. Bezüglich der Kurven Γ_k werden folgende Voraussetzungen getroffen.

I. Es sei $\Gamma_k \in C^2$ für $k = 0, 1, \ldots, N$ im Sinne von [15: S. 62]. Die Endpunkte P_{ik} ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, N$) der Kurven Γ_k liegen gemäß Abb. 1 auf Σ_i. Die Endpunkte von Γ_0 sind Q_1 und Q_2.

II. In allen Eckpunkten P_{ik} der Gebiete G_k sowie in Q_1 und Q_2 liegen positive „Öffnungswinkel" vor. Dabei gelte außerdem $0 < \gamma_1 < 2\pi - \omega$ und $0 < \gamma_2 \leqq \pi$. Wir verwenden im weiteren die Bezeichnungen

$$G = \bigcup_{k=1}^{N} G_k,\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_{42},\ \Gamma = \bigcup_{k=0}^{N} \Gamma_k \cup \Sigma_{41}$$

sowie

$$\Sigma_{ik} = \Sigma_i \cap \partial G_k = \overline{P_{i,k-1}P_{ik}} \qquad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, N).$$

Für die Orientierung des normalen (bzw. tangentialen) Einheitsvektors $\mathbf{n}$ (bzw. $\mathbf{t}$) an Γ möge gelten, daß er in Richtung wachsender Kurvennummern (bzw. von Σ_1 nach Σ_2) zeigt. Anstelle von $\hat{G} := \operatorname{int} \overline{G}$ schreiben wir zur besseren Übersicht einfach G.

Es wird die folgende gemischte Festrandwertaufgabe betrachtet:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} - Re^{-1} \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (x \in G), \tag{1}$$

$$\mathbf{v}(x) = \boldsymbol{\alpha}(x) \quad (x \in \Sigma), \quad \boldsymbol{\alpha}(x)|_{\Sigma_3} = \boldsymbol{\alpha}^3 = \text{const}, \quad \boldsymbol{\alpha}(x)|_{\Sigma_{42}} = \boldsymbol{\alpha}^4 = \text{const}, \tag{2}$$

$$B_4\, |x - x^3|^\gamma\, \mathbf{T}(\mathbf{v})\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha}^4) = 0 \qquad (x \in \Sigma_{41}), \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathbf{v}]\|_{\Gamma_k} = 0 \quad (x \in \Gamma_k;\ k = 1, 2, \ldots, N-1), \\ &\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (x \in \Gamma), \qquad [\mathbf{T}(\mathbf{v})\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}]\|_{\Gamma_k} = 0 \quad (x \in \Gamma \setminus \Sigma_{41}). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

In der Aufgabe [(1)—(4)] (dimensionslose Formulierung) bedeuten x^3 den Koordinatenvektor des Punktes Q_3, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ die Geschwindigkeit, $p \in \mathbf{R}^1$ den Druck und $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^2$ die Dichte der äußeren Massenkräfte. Außerdem symbolisieren die Größe $[\mathbf{w}]\|_\Gamma$ den Sprung von $\mathbf{w}$ beim Durchgang durch Γ und $\mathbf{T}$ den Spannungstensor $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + Re^{-1} \cdot \mathbf{D}$, wobei $\mathbf{D}$ den Deformationsgeschwindigkeitstensor mit den Komponenten

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,(v_{i,j} + v_{j,i}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (i, j = 1, 2)$$

darstellt. Unter $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ verstehen wir das Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{n}$. Mit $\varkappa$ und Re wurde das schichtweise konstante Dichtenverhältnis $\varkappa = \varrho/\varrho_{\max}$ bzw. die schichtweise konstante verallgemeinerte Reynolds-Zahl bezeichnet. Mithin gilt $0 < \varkappa(x) \leqq 1$ sowie $Re_k := Re(x)|_{G_k} = \text{const} > 0$.

Bezüglich der Randwerte $\boldsymbol{\alpha}(x)$ nehmen wir an, daß

$$\operatorname{supp}\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n})|_\Sigma \subseteqq \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \tag{5}$$

gilt. Es sei $x^{i,k}$ der Ortsvektor des Punktes P_{ik}. Dann stellen wir die folgenden Voraussetzungen ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, N$):

$$\boldsymbol{\alpha}|_{\Sigma_{ik}} \in C^1(\Sigma_{ik}), \qquad \boldsymbol{\alpha}|_\Sigma \in C(\Sigma), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(x^{i,k}) \cdot \mathbf{n}^k(x^{i,k}) = 0, \qquad |\boldsymbol{\alpha}^3| \cdot \sin \gamma_1 = 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\Sigma_{1k}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}_e\, ds + \int\limits_{\Sigma_{2k}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}_e\, ds = 0 \quad \text{und in (3)} \quad 0 < B_4, \quad 0 \leqq \gamma < 1. \tag{8}$$

In (7) sei $\mathbf{n}^k(x^{i,k})$ der nach Voraussetzung I existierende Normaleneinheitsvektor an die Kurve Γ_k im Endpunkt P_{ik}. In (8) bezeichnet $\mathbf{n}_e$ den äußeren Normaleneinheitsvektor und s die Bogenlänge. Die Voraussetzungen (5)–(8) an die Geschwindigkeitsrandwerte $\boldsymbol{\alpha}(x)$ garantieren gewisse Regularitätseigenschaften, die bei der Konstruktion der Lösung der inhomogenen Aufgabe benötigt werden. Sie lassen sich weiter abschwächen, sind aber vom Standpunkt des Anwenders aus vernünftig und garantieren die Zugehörigkeit von $\boldsymbol{\alpha}$ zum Sobolew-Slobodezkij-Raum $W_2^{1/2}(\Sigma)$ (zu dessen Definition vgl. etwa [14: S. 94]). Die Beziehungen (7) stellen Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Forderungen (2) und $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ $(x \in \Gamma)$ in den Kontaktpunkten von Σ und Γ dar. Die Gleitrandbedingung (3), die zwecks größerer Allgemeinheit in die Aufgabe einbezogen wurde, ist insbesondere dann von Interesse, wenn $\boldsymbol{\alpha}^4 \neq 0$ und $\gamma_2 < \pi$ gilt. Dann wäre nämlich eine entsprechende Verträglichkeitsbedingung der Gestalt $|\boldsymbol{\alpha}^3| \cdot \sin \gamma_1 = 0$ verletzt. Puchnacev und Solonnikov [6] haben gezeigt, daß in einem solchen Fall das Dirichlet-Integral der Normalgeschwindigkeit unendlich groß würde und die Tangentialspannung eine nicht integrierbare Singularität hätte, was im Widerspruch zu Messungen steht. Deshalb hat man für $\boldsymbol{\alpha}^4 \neq 0$ lediglich die Alternativen $\gamma_2 = \pi$ oder (3). Diese Randbedingung 3. Art (sie wurde schon 1827 von C. L. M. N. Navier angegeben) stellt eine Linearkombination von Wandhaftbedingung $\mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha}^4 = 0$ und totalem Schlupf $\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{t} = 0$ dar, wobei der Proportionalitätsfaktor $\beta = B_4\,|x - x^3|^\gamma$ ortsabhängig sein kann.

Wir kommen zur Definition einiger wichtiger Räume. Sei

$$M = \{\mathbf{u} \in C(\overline{G}) : \mathbf{u}|_{\overline{G}_k} \in C^1(\overline{G}_k)\ (k = 1, 2, \ldots, N),\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0,\ \mathbf{u}|_\Sigma = 0\}$$

und $H(G)$ die Abschließung von M in der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_H := \left(\sum_{i,j=1}^{2} \|u_{i,j}\|^2_{L_2(G)}\right)^{1/2} = \|\mathbf{u}_x\| := \|\mathbf{u}_x\|_{L_2(G)}.$$

Wegen $\operatorname{mes} \Sigma > 0$ ist dies tatsächlich eine Norm und mit

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_G u_{i,j} v_{i,j}\, dx$$

wird $H(G)$ ein Hilbertraum. Ferner sei $\mathring{M} = \{\mathbf{u} \in M : \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}|_\Sigma = 0\}$ und $\mathring{H}(G)$ entsprechend die Abschließung von $\mathring{M}$ in der Norm $\|\cdot\|_H$. Schließlich sei

$$D(G) = \left\{q \in L_2(G) : \int_{G_k} q\,dx = 0\ (k = 1, 2, \ldots, N)\right\}.$$

Lemma 1 ([8]; vgl. [3: Bew. Lemma 2.5]): *Für ein beliebiges Feld $p \in D(G)$ existiert ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in \mathring{H}(G)$, welches der Darstellung $p = \operatorname{div} \mathbf{v}$ sowie der Abschätzung $\|\mathbf{v}_x\| \leqq c\,\|p\|$ mit einer nicht von p abhängigen Konstanten c genügt.*

Es sei $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_H$ irgend ein Skalarprodukt in $H(G)$, welches eine zu $\|\cdot\|_H$ äquivalente Norm erzeugt. Wir betrachten ferner das über $\mathbf{v} \in H(G)$ lineare beschränkte Funktional $(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) := \int_G p \operatorname{div} \mathbf{v}\,dx$, das für $p \in D(G)$ erklärt ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert genau ein Element $\mathbf{u} \in H(G)$, für welches die Beziehung $(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_H$ gilt. Dabei ist $\mathbf{u} = Bp$ mit einem linearen Operator $B: D(G) \to H(G)$. Es läßt sich zeigen [8], daß B beschränkt und sein Wertebereich $R(B)$ abgeschlossen ist.

Definition 1: Mit $J(G)$ bezeichnen wir den Unterraum aller solenoidalen (= divergenzfreien) Vektorfelder aus $H(G)$.

Lemma 2: *Der Hilbertraum $H(G)$ läßt sich als orthogonale (bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$) Summe von $J(G)$ und $R(B)$ darstellen.*

Der Beweis ergibt sich direkt aus den Definitionen. Wir definieren in $H(G)$ ein weiteres Skalarprodukt durch

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \int_{G_k} Re_k^{-1} \sum_{i,j=1}^{2} (u_{i,j} + u_{j,i})\,(v_{i,j} + v_{j,i})\,dx.$$

Mit $|\mathbf{u}|_H = \sqrt{[\mathbf{u}, \mathbf{u}]_H}$ wird die dadurch erzeugte Norm bezeichnet.

Lemma 3 [8]: *Für alle $\mathbf{u} \in H(G)$ gilt die Kornsche Ungleichung*

$$\|\mathbf{u}\|_H \leqq \frac{c_0}{\sqrt{Re_0}}\,|\mathbf{u}|_H \quad \textit{mit} \quad Re_0 = \min_k Re_k^{-1}, \tag{9}$$

wobei die Konstante c_0 nur von G abhängt.

2. Existenz und Unität der verallgemeinerten Lösung der linearen Aufgabe

Unter der Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ verstehen wir die Beschränkung der Aufgabe $[(1)-(4)]$ auf die Stokes-Gleichungen $-\mathrm{Re}^{-1}\,\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{F}$ anstelle der ersten Gleichung in (1).

Lemma 4: *Unter den Voraussetzungen I, II an das Gebiet G und den Forderungen (5)–(8) an die Randwerte $\boldsymbol{\alpha}$ existiert eine Fortsetzung $\mathbf{a} \in W_2^1(G)$ von $\boldsymbol{\alpha}$ auf $\overline{G}$ mit den Eigenschaften*

$$\mathbf{a}(x) = \boldsymbol{\alpha}(x)\ (x \in \Sigma), \quad \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0\ (x \in \Gamma), \quad \operatorname{div} \mathbf{a}(x) = 0\ (x \in G).$$

Zum Beweis ist anzumerken, daß die Fortsetzung für jedes Teilgebiet G_k gesondert erfolgt. Dabei wird zunächst $\boldsymbol{\alpha}$ auf den Rand ∂G_k so ausgedehnt, daß $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ erreicht wird und sich eine Zugehörigkeit zum $W_2^{1/2}(\partial G_k)$ ergibt. Dafür läßt sich eine entsprechende Formel angeben. Da der Rand ∂G_k zweimal beschränkt differenzierbar ist, läßt sich nach einer Bemerkung aus [2: S. 40] eine solenoidale Fortsetzung $\mathbf{a} \in W_2^1(G_k)$ auf G_k finden.

Definition 2: Es sei $\mathbf{a}$ ein beliebiges Feld, das Lemma 4 genügt. Unter einer *verallgemeinerten Lösung* der Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ versteht man ein Vektorfeld $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{u} \in J(G)$, welches für alle $\boldsymbol{\varphi} \in J(G)$ der folgenden Identität genügt:

$$[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}]_H + B_4^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\, \mathbf{u}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds$$
$$= -[\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}]_H + (\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}) - B_4^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma} [\mathbf{a}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4] \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds. \tag{10}$$

Den Ausgangspunkt für diese Definition bildet die Greensche Formel

$$\int_G (\mathrm{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v} - \nabla p) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx = -[\mathbf{v}; \boldsymbol{\varphi}]_H + \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial G_k} (\mathrm{T}\mathbf{n}_e \cdot \boldsymbol{\varphi})\, ds,$$

die für hinreichend glatte $\mathbf{v}$, p und $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt wird. Zusätzlich wurde die Integration von $\mathrm{T}(\mathbf{v})\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$ auf dem Randstück Σ_{41} unter Verwendung der Gleitrandbedingung (3) ausgeführt. In [8] konnte nachgewiesen werden, daß der verallgemeinerte Lösungsbegriff im Sinne von (10) korrekt ist. Das bedeutet, daß eine genügend glatte verallgemeinerte Lösung die Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ fast überall erfüllt.

Satz 1: *Die Aufgabe* $[(1)-(4)]_L$ *besitzt genau eine verallgemeinerte Lösung* $\mathbf{v}$, *wenn der Ausdruck* $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_G \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx$ *ein lineares stetiges Funktional auf* $J(G)$ *definiert. Für die Lösung gilt die a-priori-Abschätzung*

$$\|\mathbf{u}\|_H = \|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|_H \leqq c_0^2\, Re_0^{-1} [2\, Re^0\, \|\mathbf{a}_x\| + \langle \mathbf{F} \rangle + c_3(\gamma, G)\, B_4^{-1}\, |\boldsymbol{\alpha}^4|],$$

wobei $Re^0 = \max Re_k^{-1}$ *gilt und* $\langle \mathbf{F} \rangle$ *die Funktionalnorm des durch* $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ *definierten Funktionals bezeichnet.*

Beweis: Das Feld $\mathbf{a}$ läßt sich immer so wählen, daß auf Σ_{41} die Abschätzung $|\mathbf{a}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4| \leqq |\boldsymbol{\alpha}^4|$ gilt. Ferner wählen wir p, q derart, daß die Beziehungen $1 < q < \gamma^{-1}$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$ erfüllt sind. Dann folgt unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\left| B_4^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma} [\mathbf{a}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4] \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds \right|$$
$$\leqq B_4^{-1} \left(\int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma q}\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Sigma_{41}} |\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha}^4|^{2p}\, ds \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\Sigma_{41}} |\boldsymbol{\varphi}|^{2p}\, ds \right)^{\frac{1}{2p}}$$
$$\leqq B_4^{-1}\, |\boldsymbol{\alpha}^4|\, \hat{c}(\gamma, G)\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_{2p}(\Sigma_{41})}. \tag{11}$$

Nun gilt für Elemente $\mathbf{u} \in H(G)$ eine erweiterte Form der Friedrichsschen Ungleichung in der Gestalt $\|\mathbf{u}\| \leqq c_4\, \|\mathbf{u}_x\| = c_4\, \|\mathbf{u}\|_H$ (vgl. [4, 12]), aus der sich unmittelbar die Ungleichung

$$\|\mathbf{u}\|_1' := \|\mathbf{u}\|_{W_2^1(G)} \leqq \sqrt{c_4^2 + 1}\, \|\mathbf{u}\|_H =: c_2\, \|\mathbf{u}\|_H. \tag{12}$$

ergibt. Außerdem folgt nach den Sobolewschen Einbettungssätzen sowie den Spursätzen (vgl. [14, 16]), $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_{2p}(\Sigma \cup \Gamma)} \leqq c_5\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_1$ und unter Benutzung von (12) schließlich

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_{2p}(\Sigma_{41})} \leqq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_{2p}(\Sigma \cup \Gamma)} \leqq c_5\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_1 \leqq c_6\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_H.$$

Wenn man (11) mittels dieser Beziehung fortsetzt, erhält man

$$\left| B_4^{-1} \int\limits_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma} [\mathbf{a}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4] \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds \right| \leqq B_4^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4|\, c_3(\gamma, G)\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_H, \tag{13}$$

womit nachgewiesen ist, daß hierin der linke Ausdruck (ohne Betrag betrachtet) ein lineares, stetiges Funktional auf $J(G)$ definiert. Völlig analog ergibt sich ferner

$$\left| \int\limits_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\, \mathbf{u}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds \right| \leqq c_7 \|\mathbf{u}\|_H \|\boldsymbol{\varphi}\|_H. \tag{14}$$

Mit Hilfe der Norm $|\cdot|_H$ läßt sich die Gültigkeit der Abschätzungen

$$|\mathbf{u}|_H^2 \leqq 2\, Re^0 \|\mathbf{u}\|_H^2 \quad \text{und} \quad |[\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}]_H| \leqq 2\, Re^0 \|\mathbf{a}_x\|\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_H \tag{15}$$

direkt nachweisen. Somit haben wir gezeigt, daß die rechte Seite von (10) ein lineares stetiges Funktional auf $J(G)$ definiert. Die linke Seite von (10) bildet wegen (14) und aufgrund von $B_4 > 0$ ein neues Skalarprodukt $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}]_H^*$ in $H(G)$ (bzw. in $J(G)$) und die dazugehörige Norm $|\cdot|_H^*$ ist wegen (14), (9) und (15) der Norm $\|\cdot\|_H$ äquivalent. Durch Anwenden des Darstellungssatzes von Riesz auf die Norm $|\cdot|_H^*$ folgt der erste Teil der Behauptung.

Es sei $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ die eindeutige Lösung der Aufgabe $[(1)-(4)]_{\mathrm{L}}$. Dann setzen wir in (10) $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}$ und schätzen die rechte Seite mit Hilfe der Dreiecksungleichung ab:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}]_H^* \leqq 2\, Re^0 \|\mathbf{a}_x\|\, \|\mathbf{u}\|_H + \langle \mathbf{F} \rangle \|\mathbf{u}\|_H + B_4^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4|\, c_3(\gamma, G)\, \|\mathbf{u}\|_H.$$

Wegen $Re_0\, c_0^{-2} \|\mathbf{u}\|_H^2 \leqq |\mathbf{u}|_H^2 \leqq [\mathbf{u}, \mathbf{u}]_H^*$ folgt nach Kürzen durch $\|\mathbf{u}\|_H$ die gewünschte a-priori-Abschätzung ∎

Folgerung: *Für die homogene Aufgabe* $[(1)-(4)]_{\mathrm{L}}$, *d. h. bei* $\Sigma_{41} = \emptyset$ *und* $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} = 0$, *reduziert sich die a-priori-Abschätzung für die eindeutige Lösung auf* $\|\mathbf{u}\|_H = \|\mathbf{v}\|_H \leqq c_0^2\, Re_0^{-1} \langle \mathbf{F} \rangle$.

3. Die Regularität der verallgemeinerten Lösung der linearen Aufgabe

In diesem Abschnitt werden lokale Regularitätseigenschaften der verallgemeinerten Lösung der Aufgabe $[(1)-(4)]_{\mathrm{L}}$ nachgewiesen.

Zwecks größerer Allgemeinheit bleiben wir dabei im Gebiet G_1, da dort die Ränder vielgestaltiger sind als in den anderen G_k, auf die sich die Ergebnisse sinngemäß übertragen lassen. Es seien G'' und G' beliebige Gebiete mit $G'' \subset G' \subset G_1$. Das Gebiet G' sei so beschaffen, daß sein Rand positive Abstände von allen „Eckpunkten" des Gebietes G_1 besitzt. Das Gebiet G'' heißt vom *Typ* A, wenn der Abstand $d := \operatorname{dist}(\partial G'', \partial G')$ positiv ist. Das Gebiet G'' heißt vom *Typ* B, wenn das nichtleere Kurvenstück $S' = \partial G' \cap \partial G_1$ vollständig zu genau einem der glatten Randstücke $\Sigma_{11}, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_{21}, \Gamma_0$ oder Γ_1 gehört und wenn $S'' = \partial G'' \cap \partial G'$ ein positives Maß besitzt sowie eine echt innere Teilmenge (d. h. $\operatorname{dist}(\partial S'', \partial S') > 0$) von S' darstellt. Es sei $\varepsilon > 0$ und beliebig klein. Wir betrachten die Punktmenge

$$G_1^\varepsilon = \{x \in G_1 : \operatorname{dist}(x, \mathsf{P}_{ik}) > \varepsilon \text{ und } \operatorname{dist}(x, \mathsf{Q}_i) > \varepsilon \ (i = 1, 2;\ k = 0, 1)\}.$$

Lemma 5 [8]: *Es sei* $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^3$ *und* $\boldsymbol{\alpha}|_{\Sigma_{i1}} \in C^2(\Sigma_{i1})$ *für* $i = 1, 2$. *Dann gibt es ein Vektorfeld* $\mathbf{a}$, *das dem Lemma 4 genügt und ferner die Bedingung* $\mathbf{a}|_{\bar{G}_1^\varepsilon} \in C^2(\bar{G}_1^\varepsilon)$ *erfüllt.*

Wir fixieren ein Vektorfeld $\mathbf{a}$, das dem Lemma 5 genügt. Das Gebiet G'' sei vom Typ A oder vom Typ B. Dann gilt der folgende Regularitätssatz.

Satz 2: *Sei* $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ *mit* $\mathbf{u} \in J(G)$ *die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe* $[(1)-(4)]_L$. *Wenn* $\mathbf{F} \in L_2(G')$ *ist, dann gilt* $\mathbf{u} \in W_2^2(G'')$, *und die Gleichung* $-Re^{-1}\,\Delta(\mathbf{u} + \mathbf{a}) + \nabla p = \mathbf{F}$ *ist fast überall in* G'' *mit einem* $p \in W_2^1(G'')$ *erfüllt. Außerdem gilt die Abschätzung*

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^2(G'')} + \|p_x\|_{G''} \leqq \bar{c}_1 \|\mathbf{F}\|_{G'} + \bar{c}_2 \|\mathbf{u}\|_{1,G'} + \bar{c}_3 \|\mathbf{a}\|_{W_2^2(G')}.$$

Beweis: Beim Nachweis der Regularitätseigenschaften wird wesentlich die Theorie der Mittelfunktionen (bzw. Regularisierungsfunktionen) angewandt (vgl. dazu z. B. [2: S. 37]). Der Fall, bei dem das Gebiet G'' vom Typ A ist, wird in Analogie zur ersten Randwertaufgabe bei Stokes-Gleichungen in [2: S. 56] abgehandelt. Geringfügige Änderungen ergeben sich durch die Verwendung des Skalarproduktes $[\cdot,\cdot]_H$. Sei nun G'' vom Typ B.

Im Punkt $x^0 \in S''$ gehen wir zu lokalen Koordinaten

$$y_j = \sum_{m=1}^{2} h_{jm}(x_m - x_m^0) \quad \text{für } j = 1, 2 \tag{16}$$

über, wobei $h_{2m} = n_m(x^0)$ die Komponenten des inneren Normaleneinheitsvektors an S'' im Punkte x^0 sind. Die Matrix $(h_{jm})_{j,m=1}^2$ sei orthonormiert. Wegen $S'' \in C^3$ ist die Transformation (16) stets realisierbar, da sich eine gewisse Umgebung $\sigma \subset S''$ von x^0 darstellen läßt durch $y_2 = h(y_1)$ für $|y_1| \leqq \delta$, wobei $h(0) = h'(0) = 0$ gilt und δ so beschaffen ist, daß das Bild des Gebietes $\omega = \{y: |y_1| \leqq \delta$ und $h(y_1) \leqq y_2 \leqq h(y_1) + 2\delta\}$ vollständig zu G'' gehört. Hierbei gilt außerdem $h \in C^3[-\delta, \delta]$. Mit Hilfe von (16) konstruiert man neue Geschwindigkeitsvektoren ($j = 1, 2$)

$$\bar{u}_j(y) = \sum_{m=1}^{2} h_{jm}u_m(x) \quad \text{und} \quad \bar{a}_j(y) = \sum_{m=1}^{2} h_{jm}a_m(x). \tag{17}$$

Dann ist das Feld $[\bar{\mathbf{u}}(y) + \bar{\mathbf{a}}(y)]$ Lösung einer Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ mit einer rechten Seite der Form $\bar{F}_j = \sum_{m=1}^{2} h_{jm}F_m$ ($j = 1, 2$) und entsprechenden Randvorgaben $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(y)$. Mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$z_1 = y_1 \quad \text{und} \quad z_2 = y_2 - h(y_1) \tag{18}$$

wird die Menge ω in ein Quadrat Q der Seitenlänge 2δ überführt. Mit $\mathbf{u}(x)$ und $\mathbf{a}(x)$ als Lösung der Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ sind wegen der Orthogonalität der Matrix (h_{jm}) auch $\bar{\mathbf{u}}(y)$ und $\bar{\mathbf{a}}(y)$ divergenzfrei. Entsprechend der Transformation (18) bilden wir neue Geschwindigkeitsvektoren

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \bar{u}_1(y) \quad \text{und} \quad w_2(z) = \bar{u}_2(y) - h'(y_1)\,\bar{u}_1(y), \\ b_1(z) &= \bar{a}_1(y) \quad \text{und} \quad b_2(z) = \bar{a}_2(y) - h'(y_1)\,\bar{a}_1(y) \end{aligned} \tag{19}$$

und dazugehörige rechte Seiten

$$F_1^*(z) = \bar{F}_1(y) \quad \text{und} \quad F_2^*(z) = \bar{F}_2(y) - h'(y_1)\,\bar{F}_1(y).$$

Mittels Kettenregel ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$\bar{u}_{1,1} = w_{1,1} - h'(z_1)\,w_{1,2}, \qquad \bar{u}_{2,2} = w_{2,2} + h'(z_1)\,w_{1,2},$$
$$\bar{u}_{1,2} = w_{1,2}, \qquad \bar{u}_{2,1} = w_{2,1} + h'(z_1)\,(w_{1,1} - w_{2,2}) - w_{1,2}[h'(z_1)]^2 + h''(z_1)\,w_1.$$

Daraus folgt sofort $\operatorname{div} \mathbf{w}(z) = 0$. Analoge Formeln gelten auch für $\bar{\mathbf{a}}(y)$ bzw. $\mathbf{b}(z)$. Wir vollziehen nunmehr den Übergang von Gleichung (10) zur entsprechenden Darstellung im $\{z_1, z_2\}$-Koordinatensystem. Dabei geht $\boldsymbol{\varphi}(x)$ analog zu $\mathbf{u}(x)$ gemäß der Transformationen (17) und (19) in $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(y)$ bzw. $\boldsymbol{\psi}(z)$ über. Die Funktionaldeterminante für (16) und (18) ist offensichtlich gleich 1. Der konstante Vektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^4$ geht in $\boldsymbol{\beta}^4(z)$ über. Es werden im folgenden nur Vektoren

$\boldsymbol{\varphi}(x) \in J(G)$ herangezogen, die in G außerhalb des Bildes von ω verschwinden. $J(\omega)$ sei der Raum der Einschränkungen derartiger Felder auf ω und $J(Q)$ bezeichne den Raum der entsprechenden solenoidalen Felder $\boldsymbol{\psi}(z)$. Die Elemente von $J(Q)$ verschwinden auf allen Rändern von Q außer bei $z_2 = 0$. Dort gilt $\psi_2(z) = 0$ für $z \in \Gamma \cap \partial Q$ und $\boldsymbol{\psi}(z) = 0$ für $z \in \partial Q \cap \Sigma$.

Durch die angegebenen Überführungen[1]) gelangt man von (10) zur Identität für $\boldsymbol{\psi} \in J(Q)$

$$[\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}]_{H(Q)} + [\mathbf{b}, \boldsymbol{\psi}]_{H(Q)} + \mathsf{B}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \mathsf{B}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{B_4} \int_{\Sigma_{41}} \mathbf{w}(z) \cdot \boldsymbol{\psi}(z)\, ds$$

$$+ \frac{1}{B_4} \int_{\Sigma_{41}} [\mathbf{b}(z) - \boldsymbol{\beta}^4(z)] \cdot \boldsymbol{\psi}(z)\, ds = \int_Q \mathbf{F}^*(z) \cdot \boldsymbol{\psi}(z)\, dz. \tag{20}$$

Hierbei ist $\mathsf{B}(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform

$$\mathsf{B}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = Re_1^{-1} \int_Q \Bigg[\sum_{i,j,k,m=1}^{2} q_{km}^{ij}(z_1)\; w_{i,k}\psi_{j,m} + \sum_{i,k=1}^{2} q_k{}^i(z_1)\, w_{i,k}\psi_1$$

$$+ \sum_{j,m=1}^{2} \tilde{q}_m{}^j(z_1)\, w_1\psi_{k,m} + \tilde{q}(z_1)\, w_1\psi_1 \Bigg] dz.$$

In ihr bedeuten q_{km}^{ij}, $q_k{}^i$, $\tilde{q}_m{}^j$ und $\tilde{q}$ stetig differenzierbare Funktionen, die von $h(z_1)$ und ihren Ableitungen abhängen. Unter anderem gilt $q_{km}^{ij}(z_1) = \sum_{l=1}^{4} m_l[h'(z_1)]^l$, wobei die Koeffizienten m_l aus der Menge $\{0, \pm 2, \pm 4\}$ kommen. Daraus folgt unmittelbar die Abschätzung $|q_{km}^{ij}(z_1)| \leqq c_8\, |h'(z_1)|$ mit einer nicht von δ abhängigen Konstanten c_8.

Im Anhang von [8] wurde gezeigt, daß die Identität (20) äquivalent der Beziehung für $\boldsymbol{\psi} \in H(Q)$

$$[\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}]_H + [\mathbf{b}, \boldsymbol{\psi}]_H + \mathsf{B}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \mathsf{B}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{B_4} \int_{\Sigma_{41}} \mathbf{w}(z) \cdot \boldsymbol{\psi}(z)\, ds$$

$$+ \frac{1}{B_4} \int_{\Sigma_{41}} [\mathbf{b}(z) - \boldsymbol{\beta}^4(z)] \cdot \boldsymbol{\psi}(z)\, ds = \int_Q \mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\psi}\, dz - \int_Q p^* \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, dz \tag{21}$$

ist. In ihr ist $p^* \in D(Q) = \{q \in L_2(Q) : \int_Q q(z)\, dz = 0\}$ die der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ zugeordnete Lösung für den Druck.

Wir betrachten jetzt das Feld

$$\boldsymbol{\psi}(z) = \left[\xi(z)\, \frac{\partial^2}{\partial z_1{}^2} \big(\xi(z)\, \mathbf{w}_\varrho(z)\big)\right]_\varrho, \tag{22}$$

wobei $\mathbf{f}_\varrho$ die Mittelfunktion von $\mathbf{f}$ bezüglich der Variablen z_1 mit dem Radius ϱ darstellt (vgl. Anhang von [8]). Ferner ist ξ eine unendlich oft differenzierbare Funktion der Gestalt

$$\xi(z) = \begin{cases} 1, & z \in Q' := \{|z_1| \leqq 3\delta/4 \text{ und } 0 \leqq z_2 \leqq 3\delta/2\} \\ 0, & z \notin Q \text{ und } z_2 > 0. \end{cases}$$

---

[1]) Wenn $S'' \cap \Sigma_{41} = \emptyset$ gilt, so läßt sich die Regularität von $\mathbf{u}$ in Randnähe auf dem folgenden Weg nur für $\gamma = 0$ beweisen. Andernfalls kann γ mit $0 \leqq \gamma < 1$ beliebig bleiben. Deshalb können wir im weiteren innerhalb des Randintegrals über Σ_{41} den Ausdruck $|x - x^3|^{-\gamma}$ weglassen.

Offensichtlich gilt für $\varrho < \delta/4$ die Beziehung $\boldsymbol{\psi} \in H(Q)$. Im weiteren wird die Größe $|||\cdot|||_Q$ benötigt, die durch die Formel

$$|||\boldsymbol{\varphi}|||_Q^2 = \sum_{i,m=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z_i\, \partial z_1} \right\|_{L_2(Q)}^2$$

erklärt ist. Wenn man jetzt $\boldsymbol{\psi}$ in (21) einsetzt und anschließend jeden der entstehenden Summanden (vgl. [8]) nach der Hölderschen Ungleichung abschätzt, so erhält man nach verschiedenen Umformungen sowie unter Ausnutzung der Eigenschaften der Mittelfunktionen und des Friedrichsschen Lemmas [1: S. 313] die Ungleichung

$$|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q^2 \leqq c_9 \max_{z_1} |h'(z_1)|\; |||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q^2 + \bar{c}_4(\delta)\,(|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q + \|\mathbf{w}\|_{1,Q})\,(\|\mathbf{w}\|_{1,Q} + \|\mathbf{b}\|_{1,Q} + \|\mathbf{F}^*\|_Q). \tag{23}$$

Hierin hängt die Konstante c_9 nicht von δ ab. Für ein fixiertes, hinreichend kleines δ gilt $c_9 \max \{|h'(z_1)| : |z_1| \leqq \delta\} < 1$, so daß sich (23) als quadratische Ungleichung bezüglich $|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q$ lösen läßt. Dabei ergibt sich

$$|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q \leqq \bar{c}_5(\|\mathbf{w}\|_{1,Q} + \|\mathbf{b}\|_{1,Q} + |||\xi \mathbf{b}_\varrho|||_Q + \|\mathbf{F}^*\|_Q).$$

Wegen $|||\xi \mathbf{b}_\varrho|||_Q \leqq \bar{c}_6(\xi, \delta)\, \|\mathbf{b}_\varrho\|_{W_2^2(Q)} \leqq \bar{c}_7\, \|\mathbf{b}\|_{W_2^2(Q)}$ ergibt sich weiter $|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q \leqq \bar{c}_8(\|\mathbf{w}\|_{1,Q} + \|\mathbf{b}\|_{W_2^2(Q)} + \|\mathbf{F}^*\|_Q)$. Nach dem Grenzübergang hierin für $\varrho \to 0$ erhält man unter Berücksichtigung von $|||\xi \mathbf{w}_\varrho|||_Q \geqq |||\mathbf{w}_\varrho|||_{Q'}$ schließlich

$$\sum_{i,k=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_k\, \partial z_1} \right\|_{Q'} \leqq \bar{c}_9\, (\|\mathbf{w}\|_{1,Q} + \|\mathbf{b}\|_{W_2^2(Q)} + \|\mathbf{F}^*\|_Q).$$

Wegen $h(z_1) \in C_4[-\delta, \delta]$ sind dann ebenfalls die entsprechenden Ableitungen $\partial^2 u_i/\partial x_k\, \partial x_1$ beschränkt. Auf analoge Weise gelangt man zu einer Abschätzung für $\|\partial p/\partial z_1\|_{Q''}$ innerhalb des Quadrates $Q'' = \{z : |z_1| \leqq \delta/2$ und $0 \leqq z_2 \leqq \delta\}$. Dazu wählt man in der Identität (21) das Feld $\boldsymbol{\psi}$ als $\boldsymbol{\psi}(z) = \left(\eta(z)\, \partial^2 \boldsymbol{\varphi}^\varrho/\partial z_1^2\right)_\varrho$, wobei η eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, die im Quadrat Q'' identisch 1 ist und außerhalb von Q' für $z_2 > 0$ verschwindet. Ferner sei $\boldsymbol{\varphi}^\varrho$ eine Lösung der Aufgabe $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^\varrho = \eta p_\varrho^*$ mit $\boldsymbol{\varphi}^\varrho|_{z_2=0} = 0$ in der Halbebene $z_2 > 0$, welche den Ungleichungen

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{,z}^\varrho\| \leqq \bar{c}_1\, \|\eta p_\varrho^*\| \quad \text{und} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial z_1}\, \boldsymbol{\varphi}_{,z}^\varrho \right\| \leqq \bar{c}_2 \left\| \frac{\partial}{\partial z_1}\, (\eta p_\varrho^*) \right\|$$

genügt (aus Ergebnissen der Arbeit [12: S. 199] folgt, daß mindestens eine derartige Lösung existiert). Durch ähnliche Überlegungen wie oben erhält man schließlich

$$\left\| \frac{\partial p^*}{\partial z_1} \right\|_{Q''} \leqq \bar{c}_3(\|\mathbf{w}\|_{1,Q} + \|\mathbf{b}\|_{W_2^2(Q)} + \|\mathbf{F}^*\|_Q). \tag{24}$$

Für die noch fehlenden Ableitungen lassen sich mit Hilfe der Stokesschen Gleichungen ebenfalls Schranken angeben. Die Differentialgleichungen für $\tilde{\mathbf{u}}$ und p, die im Gebiet Q fast überall erfüllt werden, lauten in kompakter Schreibweise in z-Koordinaten

$$\begin{gathered} -Re_1^{-1}\, [\Delta \tilde{u}_1 + [h'(z_1)]^2\, \tilde{u}_{1,22} - 2h'(z_1)\, \tilde{u}_{1,12} - h''(z_1)\, \tilde{u}_{1,2}] = -p_{,1} + h'(z_1)\, p_{,2} + F_1^*, \\ -Re_1^{-1}\, [\Delta \tilde{u}_2 + [h'(z_1)]^2\, \tilde{u}_{2,22} - 2h'(z_1)\, \tilde{u}_{2,12} - h''(z_1)\, \tilde{u}_{2,2}] = -p_{,2} + F_2^*, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} - h'(z_1)\, \tilde{u}_{1,2} = 0 \quad \text{mit } u_{i,jk} := \partial^2 u_i/\partial z_j\, \partial z_k \text{ und } p_{,k} := \partial p/\partial z_k. \end{gathered} \tag{25}$$

Durch R mit speziellen Indizes bezeichnen wir im folgenden diejenigen Größen in (25), welche sich durch die rechte Seite von (24) abschätzen lassen. Aus den ersten beiden Gleichungen von (25) folgt

$$Re_1^{-1}\left[1 + \left(h'(z_1)\right)^2\right] \tilde{u}_{1,22} = R_1 - h'(z_1)\, p_{,2} = R_2 - Re_1^{-1} h'(z_1)\left[1 + \left(h'(z_1)\right)^2\right] \tilde{u}_{2,22} \tag{26}$$

und daraus sofort $\tilde{u}_{1,22} = R_3 - h'(z_1)\, \tilde{u}_{2,22}$. Die Differentiation der dritten Gleichung von (25) liefert

$$\tilde{u}_{2,22} = R_4 + h'(z_1)\, \tilde{u}_{1,22} = R_4 + h'(z_1)\, R_3 - [h'(z_1)]^2\, \tilde{u}_{2,22}$$

und damit $\tilde{u}_{2,22} = [R_4 + h'(z_1)\, R_3]/\left[1 + \left(h'(z_1)\right)^2\right] = R_5$ sowie gleichzeitig $\tilde{u}_{1,22} = R_3 - h'(z_1)\, R_5 = R_6$. Wenn die Ausdrücke R_5 und R_6 in (26) eingesetzt werden, so folgt abschließend $\partial p/\partial z_2 = R_7$. Damit wurden gleichzeitig sämtliche Ableitungen $\partial^2 \mathbf{u}/\partial x_k\, \partial x_i$ und $\partial p/\partial x_k$ im Gebiet $\omega'' = \{y\colon |y_1| \leqq \delta/2$ und $h(y_1) \leqq y_2 \leqq h(y_1) + \delta\}$ abgeschätzt. Hieraus läßt sich die Aussage von Satz 2 auch für allgemeinere Gebiete G'' ableiten ∎

4. Existenz und Unität der verallgemeinerten Lösung der nichtlinearen Aufgabe

In diesem Abschnitt werden unter Benutzung der Vorgehensweise bei der linearen Aufgabe $[(1)-(4)]_L$ ein verallgemeinerter Lösungsbegriff für die vollständige nichtlineare Aufgabe definiert sowie Existenz- und Unitätsaussagen für ihn bewiesen.

Definition 3: Es sei $\mathbf{a}$ ein fixiertes Vektorfeld, das Lemma 4 genügt. Unter einer *verallgemeinerten Lösung* der Aufgabe $[(1)-(4)]$ versteht man ein Feld $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{u} \in J(G)$, welches für alle $\boldsymbol{\varphi} \in J(G)$ der folgenden Identität genügt:

$$[\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}]_H + B_4^{-1} \int\limits_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\, [\mathbf{v}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4] \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, ds - \int\limits_G \varkappa v_k (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k})\, dx = \int\limits_G \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx. \tag{27}$$

In (27) wurde die für Elemente $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in J(G)$ gültige Gleichung (unter Benutzung der Summenkonvention)

$$\int\limits_G (v_k \mathbf{v}_{x_k}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx = -\int\limits_G v_k (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k})\, dx$$

mit $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ herangezogen. Es seien c_0 und c_2 die Konstanten aus den Ungleichungen (9) bzw. (12). Ferner benötigen wir die für beliebige Elemente des $W_2^1(G)$ gültige Abschätzung

$$\|\mathbf{g}\|_{L_4(G)} \leqq c_1 \|\mathbf{g}\|_{W_2^1(G)} =: c_1 \|\mathbf{g}\|_1, \tag{28}$$

die sich aus der kompakten Einbettung des $W_2^1(G)$ in den $L_4(G)$ ergibt (vgl. [2: S. 36] oder [14]).

Satz 3: *Die Aufgabe* $[(1)-(4)]$ *besitzt für alle* $\mathbf{F}$, *für die der Ausdruck* $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ *ein lineares, stetiges Funktional über* $J(G)$ *definiert, mindestens eine verallgemeinerte Lösung, wenn die Ungleichung* $Re_0^{-1} c_0^2 c_1^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1 < 1$ *gilt. Wenn diese erfüllt ist, dann genügt jede verallgemeinerte Lösung der a-priori-Abschätzung*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|_H = \|\mathbf{u}\|_H \leqq \frac{2\, \mathrm{Re}^0 \|\mathbf{a}_x\| + c_3 B_4^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4| + \langle \mathbf{F} \rangle + c_1^2 \|\mathbf{a}\|_1^2}{\mathrm{Re}_0\, c_0^{-2} - c_1^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1}. \tag{29}$$

Beweis: Die Identität (27) ist der Operatorgleichung $\mathbf{u} - \mathsf{A}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{F}} = 0$ im Hilbertraum $J(G)$ äquivalent. Dabei werden der nichtlineare Operator A und das Element $\tilde{\mathbf{F}} \in J(G)$ durch die Ausdrücke

$$[\mathsf{A}\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}]_H{}^* = \int_G \varkappa(u_k + a_k)\,(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k}\,dx,$$

$$[\tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\varphi}]_H{}^* = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}) - [\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}]_H - B_4{}^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\,[\mathbf{a}(x) - \boldsymbol{\alpha}^4] \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\,ds$$

definiert. Da die rechte Seite des letzteren ein lineares stetiges Funktional über $J(G)$ darstellt (vgl. Beweis von Satz 1), ist das Element $\tilde{\mathbf{F}}$ eindeutig bestimmt. Eine analoge Aussage erhält man für $\mathsf{A}\mathbf{u}$, wenn die rechte Seite des ersten Ausdruckes mit Hilfe der Hölderschen sowie der Ungleichungen (12) und (28) abgeschätzt wird. Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Operator A vollstetig im $J(G)$ ist. Dafür ist es hinreichend nachzuweisen, daß er jede schwach konvergente Folge $\{\mathbf{u}^m\}$ in eine stark konvergente Folge überführt. Mit Hilfe der Beziehung $J(G) \subset W_2{}^1(G)$ sowie (12) läßt sich direkt nachweisen, daß $\{\mathbf{u}^m\}$ auch im $W_2{}^1(G)$ schwach konvergiert. Wegen der kompakten Einbettung des $W_2{}^1(G)$ im $L_4(G)$ konvergiert diese Folge stark im $L_4(G)$ gegen einen Grenzwert $\mathbf{u}$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
&|[\mathsf{A}\mathbf{u}^m - \mathsf{A}\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\varphi}]_H{}^*| \\
&= \left| \int_G \varkappa(u_k{}^m - u_k{}^j)\,(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k}\,dx + \int_G \varkappa(u_k{}^j + a_k)\,(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^j) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k}\,dx \right| \\
&\leqq \bar{c}_4\,\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^j\|_{L_4}\,(\|\mathbf{u}^m + \mathbf{a}\|_{L_4} + \|\mathbf{u}^j + \mathbf{a}\|_{L_4})\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_H \\
&\leqq \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^j\|_{L_4}\,(\bar{c}_5\,\|\mathbf{u}^m\|_H + \bar{c}_6\,\|\mathbf{u}^j\|_H + \bar{c}_7\,\|\mathbf{a}\|_1)\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_H .
\end{aligned}$$

Wegen $\|\mathbf{u}^m\|_H \leqq$ const (schwach konvergente Folgen im Hilbertraum sind beschränkt) erhält man hieraus nach dem Einsetzen von $\boldsymbol{\varphi} = \mathsf{A}\mathbf{u}^m - \mathsf{A}\mathbf{u}^j$ schließlich

$$\|\mathsf{A}\mathbf{u}^m - \mathsf{A}\mathbf{u}^j\|_H \leqq \bar{c}_8\,|\mathsf{A}\mathbf{u}^m - \mathsf{A}\mathbf{u}^j|_H{}^* \leqq \bar{c}_9\,\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^j\|_{L_4}.$$

Da $\{\mathbf{u}^m\}$ stark im L_4 konvergiert, konvergiert die Folge $\{\mathsf{A}\mathbf{u}^m\}$ ebenfalls stark im $J(G)$, und der Operator A ist gemeinsam mit $\bar{\mathsf{A}}: \mathbf{u} \to \mathsf{A}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{F}}$ vollstetig.

Für den Nachweis der Existenz mindestens einer Lösung der Operatorgleichung $\mathbf{u} - \mathsf{A}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{F}} = 0$ im Hilbertraum $J(G)$ benutzen wir das Leray-Schauder-Prinzip (vgl. z. B. [2: S. 48]). Dabei ist es hinreichend, zu zeigen, daß alle möglichen Lösungen $\mathbf{u}^\lambda$ der Gleichungen $\mathbf{u} - \lambda(\mathsf{A}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{F}}) = 0$ für $\lambda \in [0, 1]$ im $J(G)$ gleichmäßig beschränkt sind. Unter Benutzung der wegen $\mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{u}^\lambda|_\Sigma = 0$ und $\operatorname{div}(\mathbf{u}^\lambda + \mathbf{a}) = 0$ gültigen Gleichung

$$\int_G \varkappa(u_k{}^\lambda + a_k)\,\mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{u}^\lambda_{x_k}\,dx = \frac{1}{2} \int_G \varkappa(u_k{}^\lambda + a_k)\,\frac{\partial(\mathbf{u}^\lambda)^2}{\partial x_k}\,dx = 0$$

erhält man für $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}^\lambda$ aus (27) die Beziehung

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{u}^\lambda, \mathbf{u}^\lambda]_H + B_4{}^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\,\mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{u}^\lambda\,ds = \lambda \int_G \varkappa(u_k{}^\lambda + a_k)\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^\lambda_{x_k}\,dx \\
&+ \lambda(\mathbf{F}, \mathbf{u}^\lambda) - \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{u}^\lambda]_H - \lambda B_4{}^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\,(\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha}^4) \cdot \mathbf{u}^\lambda\,ds.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abschätzungen (13)—(15) sowie der Beziehung

$$\left| \int_G \varkappa a_k \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^\lambda_{x_k}\,dx \right| \leqq \|\mathbf{a}\|^2_{L_4}\,\|\mathbf{u}_x{}^\lambda\| \leqq c_1{}^2\,\|\mathbf{a}\|_1{}^2\,\|\mathbf{u}^\lambda\|_H$$

ergibt sich daraus die Ungleichung

$$Re_0 c_0^2 \|\mathbf{u}^\lambda\|_H \leqq [\mathbf{u}^\lambda, \mathbf{u}^\lambda]_H^* \leqq \lambda \left| \int_G \varkappa u_k{}^\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^\lambda_{x_k}\, dx \right| + \lambda c_1{}^2 \|\mathbf{a}\|_1{}^2 \|\mathbf{u}^\lambda\|_H$$

$$+ \lambda \langle \mathbf{F} \rangle \|\mathbf{u}^\lambda\|_H + 2\lambda\, Re^0 \|\mathbf{a}_x\| \|\mathbf{u}^\lambda\|_H + \lambda c_3 B_4{}^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4| \|\mathbf{u}^\lambda\|_H .$$

Wegen $\lambda \leqq 1$ und der mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhaltenen Abschätzung

$$\left| \int_G \varkappa u_k{}^\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^\lambda_{x_k}\, dx \right| \leqq \|\mathbf{u}^\lambda\|_{L_4} \|\mathbf{a}\|_{L_4} \|\mathbf{u}_x{}^\lambda\| \leqq c_1{}^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{u}^\lambda\|_H{}^2$$

folgt abschließend nach Umordnung und Division durch $\|\mathbf{u}^\lambda\|_H$

$$\|\mathbf{u}^\lambda\|_H \left(Re_0\, c_0{}^{-2} - c_1{}^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1\right)$$

$$\leqq 2\, Re^0 \|\mathbf{a}_x\| + \langle \mathbf{F} \rangle + c_3 B_4{}^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4| + c_1{}^2 \|\mathbf{a}\|_1{}^2$$

und damit die Behauptung ∎

Satz 4: *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Dann existiert genau eine verallgemeinerte Lösung* $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ *der Aufgabe* [(1)—(4)], *wenn darüber hinaus die folgende Bedingung erfüllt wird:*

$$Re_0{}^{-1} c_0{}^2 c_1{}^2 c_2{}^2 \, \frac{2\, Re^0 \|\mathbf{a}_x\| + c_3 B_4{}^{-1} |\boldsymbol{\alpha}^4| + \langle \mathbf{F} \rangle + c_0{}^{-2} c_2{}^{-1} Re_0 \|\mathbf{a}\|_1}{Re_0\, c_0{}^{-2} - c_1{}^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1} < 1 .$$

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei verallgemeinerte Lösungen $\mathbf{v}$ und $\bar{\mathbf{v}}$ der Aufgabe [(1)—(4)]. Dann gehört ihre Differenz $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ dem Raum $J(G)$ an und genügt der Identität

$$[\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varphi}]_H + B_4{}^{-1} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma}\, \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, ds = \int_G \varkappa (\hat{u}_k \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k} + \bar{v}_k \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{x_k})\, dx .$$

Wir setzen wiederum $\boldsymbol{\varphi} = \hat{\mathbf{u}}$ und erhalten nach wenigen Umformungen

$$|\hat{\mathbf{u}}|_H{}^2 + \frac{1}{B_4} \int_{\Sigma_{41}} |x - x^3|^{-\gamma} |\hat{\mathbf{u}}|^2\, ds = \int_G \varkappa \hat{u}_k \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{x_k}\, dx .$$

Daraus ergibt sich wie oben die Abschätzung

$$Re_0\, c_0{}^{-2} \|\hat{\mathbf{u}}\|_H{}^2 \leqq [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}]_H^* \leqq \int_G |\hat{u}_k \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{x_k}|\, dx \leqq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L_4} \|\mathbf{v}\|_{L_4} \|\hat{\mathbf{u}}_x\|$$

$$\leqq c_1{}^2 c_2 \|\hat{\mathbf{u}}\|_H{}^2 \|\mathbf{v}\|_1$$

bzw.

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_H^2 \leqq (Re_0{}^{-1} c_0{}^2 c_1{}^2 c_2 \|\mathbf{v}\|_1) \|\hat{\mathbf{u}}\|_H{}^2. \tag{30}$$

Wegen $\|\mathbf{v}\|_1 \leqq \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{a}\|_1 \leqq c_2 \|\mathbf{u}\|_H + \|\mathbf{a}\|_1$ erhalten wir mit Hilfe von (29) für $\|\mathbf{v}\|_1$ eine Abschätzung, die unter der zusätzlichen Bedingung des Satzes die Ungleichung $Re_0{}^{-1} c_0{}^2 c_1{}^2 c_2 \|\mathbf{v}\|_1 < 1$ nach sich zieht. Dann folgt aber aus (30) sofort $\|\hat{\mathbf{u}}\|_H = 0$ bzw. $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ fast überall in G ∎

Für die Aufgabe [(1)—(4)] mit homogenen Randbedingungen lassen sich in Analogie zur Folgerung aus Satz 1 auch solche aus den Sätzen 3 und 4 angeben. Die Regularität der verallgemeinerten Lösung der Aufgabe [(1)—(4)] ist bisher noch nicht untersucht worden. Abschließend sei noch angemerkt, daß in [8] für ein modifiziertes Strömungsgebiet und solche Randbedingungen, daß die Punktmenge $\Sigma \cap \partial G_1$ einfach zusammenhängend ist und das

Feld α auf $\Sigma \setminus \partial G_1$ verschwindet, die Existenz der verallgemeinerten Lösung ohne eine Voraussetzung der Gestalt $Re_0^{-1} c_0^2 c_1^2 c_2 \|\mathbf{a}\|_1 < 1$ (s. Satz 3) bewiesen werden konnte. Dabei wurde die Vorgehensweise von LADYSHENSKAJA in [2] entsprechend modifiziert.

LITERATUR

[1] FRIEDRICHS, K. O.: On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 299–325.

[2] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва: Изд-во Наука 1970.

[3] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А., и В. А. Солонников: О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Зап. научн. семин. ЛОМИ 59 (1976), 81–116.

[4] Михлин, С. Г.: Проблема минимума квадратичного функционала. Москва-Ленинград: Гостехиздат 1952.

[5] MIRANDA, C.: Partial differential equations of elliptic type. New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag 1970.

[6] Пухначев, В. В., и В. А. Солонников: К вопросу о динамическом краевом угле. ЛОМИ препринт Р-7-81 (1981), 1–26.

[7] SILLIMAN, W. J., and L. E. SCRIVEN: Separating flow near a static contact line: Slip at a wall and shape of a free surface. J. Comput. Physics 34 (1980), 287–313.

[8] SOCOLOWSKY, J.: Theoretische und numerische Untersuchungen von Strömungsproblemen bei Beschichtungsvorgängen. Dissertation A. Merseburg: Technische Hochschule Leuna-Merseburg 1983.

[9] SOCOLOWSKY, J.: Über eine Randwertaufgabe für stationäre Mehrschichtenströmungen. Wiss. Ber. Techn. Hochsch. Leipzig 6 (1983), 43–46.

[10] SOCOLOWSKY, J., und J. BERGMANN: Leitlinientechnik zur Berechnung von Strömungen nichtlinear-viskoser Medien bei Beschichtungsvorgängen. Techn. Mechanik 7 (1986), 21–29.

[11] Солонников, В. А.: Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд. Изв. Акад. Наук СССР, Серия матем. 43 (1979), 203–236.

[12] Солонников, В. А., и В. Е. Щадилов: Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса. Труды Мат. ин-та Акад. Наук СССР 125 (1973), 196–210.

[13] ТЕМАМ, Р.: Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Москва: Изд-во Мир. 1981.

[14] WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1982.

[15] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.

[16] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977.

Manuskripteingang: 10. 12. 1984, in ergänzter Fassung 28. 6. 1985

VERFASSER:

Dr. JÜRGEN SOCOLOWSKY
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg
DDR-4200 Merseburg, Otto-Nuschke-Straße

Prof. Dr. JOACHIM BERGMANN
Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule
DDR-4370 Köthen, Lohmannstraße 23