Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (2) 1987, S. 159–174

Dualität bei Steuerungsproblemen mehrfacher Integrale

S. PICKENHAIN

Es werden Dualitätsbeziehungen zu Steuerungsproblemen mehrfacher Integrale untersucht. Im Mittelpunkt steht die Frage nach starker Dualität. Durch nochmalige Dualisierung der dualen Aufgabe gelingt es, Beziehungen zwischen Steuerungsproblemen und Flußproblemen im Sinne von YOUNG und KLÖTZLER herzuleiten und einen möglichen neuen Zugang zu Aussagen über starke Dualität bei mehrdimensionalen Problemen zu finden.

Исследуются соотношения двойственности для задач оптимального управления с кратными интегралами. В центре интереса стоит вопрос о сильной двойственности. С помощью рассмотрения бидуальной задачи удается найти соотношения между проблемами оптимального управления и потоковыми проблемами в смысле ЯНГА и КЛЁЦЛЕРА и возможный новый подход к сильной двойственности для задач оптимального управления с кратными интегралами.

A duality is presented for problems of optimal control with multiple integrals. In the centre of interest the question on strong duality stands. The mean idea is to study the bi-dual problem to the given optimal control problem. It succeeds to get relations between flow problems in the sense of YOUNG and KLÖTZLER and to find a new possible approach to assertions on strong duality for control problems with multiple integrals.

1. Einleitung

Für die theoretische und numerische Behandlung von Optimierungsproblemen spielt die Dualität eine bedeutende Rolle. Ist ein reelles Funktional f über einer Menge X und das *primale Problem*

$$f(x) \to \inf, \qquad x \in X, \tag{1}$$

gegeben, dann ist

$$g(y) \to \sup, \qquad y \in Y, \tag{2}$$

für ein reelles Funktional g über einer Menge Y eine zu ihm *duale Aufgabe*, wenn

$$\sup \{g(y) \mid y \in Y\} \leqq \inf \{f(x) \mid x \in X\} \tag{3}$$

gilt. Insbesondere sprechen wir von *starker Dualität* zwischen (1) und (2), wenn in (3) die Gleichheit gilt. Bekanntlich kann man mittels der Dualität einerseits Fehlerabschätzungen, andererseits hinreichende Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe (1) gewinnen. Dazu ist von besonderem Interesse zu klären, wann zwischen (1) und (2) starke Dualität vorliegt.

Wir untersuchen Steuerungsprobleme und deren entsprechende Dualprobleme im Sinne von R. KLÖTZLER [7] auf starke Dualität. Für Steuerungsprobleme einfacher Integrale und deren zugeordnete Dualprobleme ist diese Frage weitgehend geklärt

[8, 11, 13]. Dabei spielt im eindimensionalen Falle das Studium der Bellmanschen Funktion eine entscheidende Rolle. Eine solche Funktion steht aber bei mehrdimensionalen Problemen nicht mehr zur Verfügung. In dieser Arbeit wird ein möglicher neuer Zugang zu starken Dualitätsaussagen angegeben. Die grundlegende Idee besteht darin, die duale Aufgabe erneut zu dualisieren. Die gewonnene biduale Aufgabe ist ein Flußproblem im Sinne von L. C. YOUNG [14]. Es gelingt nun, einerseits Beziehungen zwischen diesem sehr abstrakten Flußproblem und einem anschaulich interpretierbaren und relevanten Flußproblem im Sinne von R. KLÖTZLER [9, 10] herzustellen und andererseits im eindimensionalen Falle auch den Zusammenhang von Flußproblemen und entsprechenden Steuerproblemen herzustellen. Es ist zu vermuten, daß die hier verwendeten Methoden im wesentlichen auf mehrdimensionale Probleme übertragbar sind. Gelingt dies, so kann die Frage nach starker Dualität im mehrdimensionalen Fall ohne die bisher allzu einschränkenden Konvexitätsforderungen [3] positiv beantwortet werden.

2. Problemstellung

Es sei das folgende Steuerproblem $(\mathbf{P}_0)$ in Dieudonné-Rashevskyscher Form gegeben:

$$J(x, u) = \int_\Omega r(t, x(t), u(t))\, dt \to \mathrm{Min!}$$

bez. aller $x \in W_\infty^{1,n}(\Omega)$ und $u \in L_\infty^r(\Omega)$, die den

$$\begin{aligned}
&\textit{Zustandsgleichungen} \quad x_{t_\alpha}(t) = g_\alpha(t, x(t), u(t)) \text{ f. ü. auf } \Omega,\\
&\textit{Phasenbeschränkungen} \quad x(t) \in \bar{G} \subset \mathbf{R}^n \text{ auf } \Omega,\\
&\textit{Steuerbeschränkungen} \quad u(t) \in U \subseteq \mathbf{R}^r \text{ f. ü. auf } \Omega\\
&\textit{Randbedingungen} \quad x(s) \in M_s \subset \bar{G} \text{ auf } \partial\Omega
\end{aligned}$$

($\partial\Omega$ sei der Rand von Ω) genügen. Wir treffen folgende Grundvoraussetzungen:

1. r sei stetig und größer Null auf $\bar{\Omega} \times \bar{G} \times U$.
2. $g_{i\alpha}$ sei stetig auf $\bar{\Omega} \times \bar{G} \times U$ und $g_\alpha = (g_{1\alpha}, \ldots, g_{n\alpha})^T$ $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m)$.
3. $U \subseteq \mathbf{R}^r$ sei kompakt und nicht leer.
4. $\mathfrak{M}_s$ sei abgeschlossen und nicht leer für alle $s \in \partial\Omega$.
5. $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ und $G \subset \mathbf{R}^n$ seien Lipschitzgebiete im Sinne von C. B. MORREY und S. HILDEBRANDT [5].
6. Die Menge X_0 aller zulässigen Prozesse (x, u) zu $(\mathbf{P}_0)$ sei nicht leer.

Bezeichnet $\mathfrak{n}(s)$ den äußeren Normalen-Einheitsvektor zu $s \in \partial\Omega$, so erhalten wir als *duale Aufgabe* zu $(\mathbf{P}_0)$ nach R. KLÖTZLER [7] die folgende Aufgabe $(\mathbf{D}_0)$:

$$L(S) = \int_{\partial\Omega} \sigma(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do \to \mathrm{Max!}$$

bez. aller $S \in \mathfrak{S}_0$,

$$\mathfrak{S}_0 = \{S \in \mathfrak{S} \mid \nabla_t{}^T S^T(t, \xi) + [\nabla_\xi S^\alpha(t, \xi)]^T g_\alpha(t, \xi, v) \leq r(t, \xi, v) \text{ auf } \Omega \times G \times U\} \quad \text{(über doppelte Indizes wird summiert)}$$

mit

$$\mathfrak{S} = \{S = (S^1, \ldots, S^m) \in C^{1,m}(\bar{\Omega} \times \bar{G}) \mid S(s, \xi)_{\xi \in \mathfrak{M}_s} = \sigma(s) \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Die zwischen $(\mathbf{D}_0)$ und $(\mathbf{P}_0)$ ausgedrückte Dualität ist nicht involutorisch, wie man schon an der unterschiedlichen Struktur der beiden Probleme erkennen kann.

Wir können ($\mathbf{D}_0$) als Aufgabe der linearen Optimierung in Banachräumen X, Y auffassen, die gemäß [4: S. 123] für ein lineares Zielfunktional $\langle c^*, \cdot\rangle_X$ auf X lautet:

$$\langle c^*, x\rangle_X \to \text{Max!}$$

bez. aller $x \in X$, die den Nebenbedingungen

$$Ax \underset{K(Y)}{\leqq} b \quad \text{und} \quad x \underset{K(X)}{\geqq} 0$$

genügen. Dabei ist $A: X \to Y$ ein linearer stetiger Operator, $K(X) \subset X$ und $K(Y) \subset Y$ sind Ordnungskegel. In unserer Aufgabe ist $X = \mathfrak{S}$ und als Teilraum von $C^{1,m}(\bar{\Omega} \times \bar{G})$ mit der Norm $\|S\| = \sum_{\alpha=1}^{m} \|S^\alpha\|$,

$$\|S^\alpha\| = \operatorname*{Max}_{\bar{\Omega}\times\bar{G}} |S^\alpha(t, \xi)| + \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Max}_{\bar{\Omega}\times\bar{G}} |S^\alpha_{t_j}(t, \xi)| + \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Max}_{\bar{\Omega}\times\bar{G}} |S^\alpha_{\xi^i}(t, \xi)|,$$

wieder ein Banachraum, $Y = C(Q)$ in der Maximumnorm mit $Q = \bar{\Omega} \times \bar{G} \times U$, $K(C(Q)) = \{f \in C(Q) \mid f(x) \geqq 0$ für alle $x \in Q\}$ und $K(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$. Für $f_1, f_2 \in C(Q)$ soll $f_1 \leqq f_2$ bez. $K(C(Q))$ bedeuten $f_2 - f_1 \in K(C(Q))$ und analog für $S', S'' \in \mathfrak{S}$ (also ist $S \geqq 0$ bez. $K(\mathfrak{S})$ für *alle* $S \in \mathfrak{S}$). Der Operator A ist folgendermaßen definiert:

$$AS = \nabla_t{}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} + [\nabla_\xi S^\alpha]^{\mathrm{T}} g_\alpha .$$

Offensichtlich ist er linear, und da Q kompakt ist, folgt

$$\|AS\|_Y \leqq \max\{1, C\} \|S\|_X \quad \text{mit} \quad C = \max\{|g_{i\alpha}(t, \xi, v)| \mid \text{alle } (t, \xi, v), i, \alpha\}.$$

Damit ist A stetig. Das Zielfunktional c^* auf $\mathfrak{S}$ läßt sich durch

$$\langle c^*, S\rangle = \int_{\partial\Omega} \sigma(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do$$

definieren. Weiter ist $b = r$.

3. Eine zu ($\mathbf{D}_0$) duale Aufgabe

Dem Problem ($\mathbf{D}_0$) ordnen wir nach Fenchel-Rockafellarscher Dualitätstheorie, angewandt auf lineare Programme [4: S. 108], das duale Programm

$$\langle y^*, b\rangle_Y \to \text{Min!}$$

bez. aller $y^* \in Y^*$ zu, die den Nebenbedingungen

$$A^*y^* \underset{K^*(X)^*}{\geqq} c \quad \text{und} \quad y^* \underset{K^*(Y^*)}{\geqq} 0$$

genügen. Hier bezeichnen X^* und Y^* die zu X bzw. Y topologisch dualen Räume, $K^*(X^*)$ und $K^*(Y^*)$ die zu $K(X)$ und $K(Y)$ dualen Kegel und $A^*: Y \to X$ den zu A adjungierten Operator. Für unser Problem ergibt sich speziell:

$Y^* = C^*(Q)$, und $y^* \geqq 0$ bedeutet $\int_Q f(x)\, d\mu(x) \geqq 0$ $(f \in K(C(Q)))$[1]. Ferner ist, da mit Φ auch $-\Phi$ in $\mathfrak{S}$ liegt,

$$K^*(\mathfrak{S}^*) = \{\Phi^* \in \mathfrak{S}^* \mid \langle \Phi^*, \Phi\rangle = 0 \text{ für alle } \Phi \in \mathfrak{S}\}.$$

[1]) μ bezeichnet das durch y^* eindeutig bestimmte nichtnegative reguläre Borelsche Maß.

Folglich heißt $A^*y^* \geqq c^*$, daß $\langle A^*y^*, \Phi\rangle = \langle c^*, \Phi\rangle$ für alle $\Phi \in \mathfrak{S}$ ist, bzw. nach Definition von A^*, daß $\langle c^*, \Phi\rangle = \langle y^*, A\Phi\rangle$, d. h.

$$\int_Q \{\nabla_t{}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t, \xi) + [\nabla_\xi \Phi^\alpha(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, g_\alpha(t, \xi, v)\}\, d\mu(t, \xi, v) = \int_{\partial\Omega} \varphi(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do$$

für alle $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^m) \in \mathfrak{S}$, $\varphi(s) = \Phi(s, \xi)|_{\xi \in \mathfrak{M}_s}$, ist. Schließlich gilt die Darstellung

$$\langle y^*, b\rangle = \int_Q r(t, \xi, v)\, d\mu(t, \xi, v).$$

Damit lautet die zu $(\mathbf{D}_0)$ gemäß Fenchel-Rockafellarscher Theorie dualisierte Aufgabe $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$:

$$y^*(r) = \int_Q r(t, \xi, v)\, d\mu(t, \xi, v) \to \text{Min!}$$

bez. aller $y^* \in K^*\big(C^*(Q)\big)$, die für alle $\Phi \in \mathfrak{S}$ der Bedingung

$$\int_Q \{\nabla_t{}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t, \xi) + [\nabla_\xi \Phi^\alpha(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, g_\alpha(t, \xi, v)\, d\mu(t, \xi, v) = \int_{\partial\Omega} \varphi(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do \tag{4}$$

genügen.

Ausgehend von der Aufgabe $(\mathbf{P}_0)$ für den Fall $m = 1$, also für eindimensionale Steuerungsprobleme, wird bei L. C. Young [14: Kap. 6] und bei R. B. Vinter und R. M. Lewis [13] durch Einbettung der zu $(\mathbf{P}_0)$ zulässigen Prozesse in eine Menge linearer stetiger Funktionale über $C(Q)$ ein ähnliches Problem gewonnen. Wir könnten deshalb in Anlehnung an die zitierten Arbeiten $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ als *Flußproblem im Sinne von L. C. Young* bezeichnen.

Im Sinne der Rockafellarschen Dualitätstheorie zeigen wir nun die Stabilität von $(\mathbf{D}_0)$.

Satz 1: *Es existiere ein $\bar{S} \in \mathfrak{S}_0$ mit $A\bar{S} < r$, d. h. mit*

$$\nabla_t{}^{\mathrm{T}}\bar{S}^{\mathrm{T}}(t, \xi) + [\nabla_\xi \bar{S}^\alpha(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, g_\alpha(t, \xi, v) < r(t, \xi, v) \qquad \big((t, \xi, v) \in Q\big)$$

d. h. $\mathfrak{S}_0$ besitze einen inneren Punkt). Dann ist $(\mathbf{D}_0)$ stabil.

Beweis: Nach [4: Satz 6] ist $(\mathbf{D}_0)$ stabil, wenn $f\colon C(Q) \to \mathbf{R}$ mit

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leqq r \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $A\bar{S}$ stetig ist. Diese Forderung ist erfüllt, wenn $A\bar{S}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}_0$ ist und die Stetigkeit von f aus der Konvexität von $-f$ folgt. Das wiederum ist erfüllt nach [4: Satz 24], da $-f$ ein konvexes unterhalbstetiges Funktional auf einem Banachraume ist ∎

Für den weiteren Verlauf der Arbeit werden wir $(\mathbf{D}_0)$ stets als stabil voraussetzen. Die damit gewonnene Aussage über starke Dualität zwischen $(\mathbf{D}_0)$ und $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ erlaubt uns, die Aufgabe $(\mathbf{P}_0)$ in die sehr abstrakte Aufgabenstellung $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ einzubetten:

$$\sup(\mathbf{D}_0) = \min(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}} \leqq \inf(\mathbf{P}_0),$$

und wie man leicht zeigen kann, wird durch jedes $(\hat{x}, \hat{u}) \in X_0$ ein zulässiges Element $\hat{y}^*$ zu $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ definiert:

$$\hat{y}^*(f) = \int_Q f(t, \xi, v)\, d\hat{\mu}(t, \xi, v) = \int_\Omega f\big(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)\big)\, dt \qquad (f \in Q).$$

Im eindimensionalen Falle gilt bei Konvexität von $r(t, \xi, \cdot)$, $g(t, \xi, \cdot)$ und U zwischen $(\mathbf{P}_0)$ und $(\mathbf{D}_0)$ starke Dualität, weshalb dann $\min (\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}} = \inf (\mathbf{P}_0)$ ist. Unser Ziel ist es, unter ähnlichen Voraussetzungen solch ein Resultat auch im mehrdimensionalen Falle nachzuweisen.

4. Flüsse

Um eine anschauliche Vorstellung von „Flüssen" im Sinne von L. C. Young zu gewinnen, führen wir nun in Anlehnung an [9, 10] Flußprobleme im Sinne von R. Klötzler ein. Dabei sei zunächst folgende Begriffsbildung vorgenommen.

Definition 1: Es heißt $\mathfrak{w} = v_0 \begin{pmatrix} E_m \\ w \end{pmatrix} = (\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_m)$, mit

$$\mathfrak{w}_\alpha = (0, \ldots, \underset{\hat{\alpha}}{1}, \ldots, 0, w_{1\alpha}, \ldots, w_{n\alpha})^{\mathrm{T}} \in C^{1, m+n}(\bar{\Omega} \times \bar{G})$$

für $\alpha = 1, \ldots, m$, *Fluß über* U, wenn $v_0 \geqq 0$ auf $\bar{\Omega} \times \bar{G}$ und für $j = 1, \ldots, n$

$$w_{j\alpha}(t, \xi) = \int_U g_{j\alpha}(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \quad \text{f. ü. auf} \quad \bar{\Omega} \times \bar{G}$$

gilt. Dabei ist $\{\mu_{(t,\xi)} \mid (t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \bar{G}\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit den folgenden Eigenschaften:

(A) Für jedes $f \in C(\bar{\Omega} \times \bar{G} \times U)$ ist nachfolgende Funktion L-meßbar:

$$h_f : \bar{\Omega} \times \bar{G} \to \mathbf{R} \text{ mit } h_f(t, \xi) = \int_U f(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v).$$

(B) Auf $\{\xi \in G \mid v_0(t, \xi) > 0\}$ ist nachfogende Funktion stetig:

$$r_{\mathfrak{w}}(t, \cdot) \text{ mit } r_{\mathfrak{w}}(t, \xi) = \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \; (t \in \Omega).$$

Die Menge aller Flüsse über U bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_U$ und formulieren folgendes *Flußproblem* (F) (in [9] als *Flußproblem* 1. *Art* bezeichnet):

$$F(\mathfrak{w}) = \int_\Omega \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_0(t, \xi) \, d\xi \, dt \to \text{Min!}$$

bez. aller $\mathfrak{w} \in \mathfrak{R}_U$, die den Nebenbedingungen

$$\nabla^{\mathrm{T}}_{(t,\xi)} \mathfrak{w}_\alpha = 0^{2)} \qquad \text{auf } \Omega \times G \; (\alpha = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

$$\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi) \, d\xi = 1 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{6}$$

und

$$\mathfrak{w}_\alpha^{\mathrm{T}} \, d\mathfrak{o}_{\bar{\Omega} \times \bar{G}} = 0^{3)} \qquad \text{auf } \partial(\bar{\Omega} \times \bar{G}) \setminus \mathfrak{A} \tag{7}$$

mit

$$\mathfrak{A} = \{(s, \xi) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid s \in \partial\Omega \text{ und } \xi \in \mathfrak{M}_s\} \tag{8}$$

genügen. Die Menge der zulässigen Flüsse zu (F) bezeichnen wir mit Y_0.

---

[2]) $\nabla^{\mathrm{T}}_{t,\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)$.

[3]) $d\mathfrak{o}_{\bar{\Omega} \times \bar{G}}$ bezeichnet das im $\mathbf{E}^{m+n}$ nach außen orientierte vektorielle Oberflächenelement zu $\partial(\bar{\Omega} \times \bar{G})$.

Die durch Flüsse $\mathfrak{w} \in Y_0$ erzeugten linearen stetigen Funktionale y^* auf $C(Q)$ mit

$$y^*(f) = \int\limits_Q f(t, \xi, v)\, d\nu(t, \xi, v) := \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U f(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

erfüllen die Bedingung (4), denn nach Gaußschem Integralsatz folgt wegen (5), (7) und (8)

$$\int\limits_\Omega \int\limits_G (\nabla_{(t,\xi)}\Phi^\alpha(t, \xi))^{\mathrm{T}}\, \mathfrak{w}_\alpha(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\mathfrak{M}_t} \Phi^\alpha(t, \xi)\, \mathfrak{w}_\alpha(t, \xi)\, d\xi \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ o_n \end{pmatrix} do$$

mit $\mathfrak{n}$ als äußeren Normalen-Einheitsvektor zu $\partial\Omega$ und o_n als n-dimensionalen Nullvektor. Schließlich gilt nach (6) und Definition von Φ

$$\int\limits_\Omega \int\limits_G (\nabla_{(t,\xi)}\Phi^\alpha(t, \xi))^{\mathrm{T}}\, \mathfrak{w}_\alpha(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do.$$

Durch Flüsse $\mathfrak{w} \in Y_0$ werden also zulässige Elemente zu $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ erzeugt, deshalb gilt die Relation $\min (\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}} \leq \inf (\mathbf{F})$. Ist umgekehrt $\mathfrak{w} \in \mathfrak{R}_U$ und gilt (4), so folgt, daß $\mathfrak{w}$ die Nebenbedingungen (5)—(8) erfüllt [9].

Die Interpretation des Flusses nehmen wir der Einfachheit halber für den Fall eindimensionaler Probleme ($m = 1$) vor. Ein Fluß $\mathfrak{w} \in \mathfrak{R}_U$ ist zulässig bezüglich (F), wenn er in $\{t_0\} \times \mathfrak{M}_{t_0}$ mit einer bestimmten Intensität $\int\limits_{\mathfrak{M}_0} v_0(t_0, \xi)\, d\xi$ $(= 1)$ startet, in $(t_0, t_1) \times G$ quellfrei verläuft und dabei gewisse Richtungsbeschränkungen und Zustandsgleichungen einhält und mit der gleichen Intensität in $\{t_1\} \times \mathfrak{M}_{t_1}$ ankommt. Ein Flußproblem dieser Gestalt entsteht aus einem Steuerproblem $(\mathbf{P}_0)$ bei konvexem U und für alle $(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times \overline{G}$ konvexen $g_i(t, \xi, \cdot)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $r(t, \xi, \cdot)$, wenn anstelle der zulässigen Trajektorien zu $(\mathbf{P}_0)$, die wir als „fadenförmig dünne" Flüsse auffassen können, „breitere" Flüsse $\mathfrak{w} \in Y_0$ zugelassen werden.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Problem $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ und dem Flußproblem (F) näher charakterisieren.

Definition 2: Eine Folge von Flüssen $\{\mathfrak{w}^n\} \subset \mathfrak{R}_U$ heißt *asymptotisch zulässig bez.* Y_0, wenn für alle $\Phi \in \mathfrak{S}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \{\nabla_t{}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(t, \xi) + [\nabla_\xi\Phi^\alpha(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, w_\alpha{}^n(t, \xi)\}\, v_0{}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int\limits_Q \varphi(s)\, \mathfrak{n}(s)\, do.$$

Satz 2: *Zu jedem zulässigen Element* $y^* \in C^*(Q)$ *zum Problem* $(\mathbf{D}_0)^{\mathrm{D}}$ *existiert eine Folge* $\{\mathfrak{w}^n\} \subset \mathfrak{R}_U$ *asymptotisch zulässiger Flüsse bez.* Y_0, *so daß gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U r(t, \xi, v)\, d\mu^n_{(t,\xi)}(v)\, v_0{}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int\limits_Q r(t, \xi, v)\, d\nu(t, \xi, v).$$

Beweis: Nach [4: S. 66ff.] ist $C^*(Q)$ mit der schwachen* Topologie σ^* ein lokalkonvexer Hausdorffscher Raum. Wir zeigen, daß die Menge $\hat{Y}^*$ aller durch Flüsse $\mathfrak{w} \in \mathfrak{R}_U$ erzeugten linearen stetigen Funktionale y^*, mit

$$y^*(f) = \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U f(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0(t, \xi)\, d\xi\, dt \qquad \big(f \in C(Q)\big),$$

in $C^*(Q)$ bez. dieser Topologie dicht liegt.

1. $\hat{Y}^*$ ist konvex: Sind $y_1^*, y_2^* \in \hat{Y}^*$, so gilt

$$y_i^*(f) = \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U f(t, \xi, v)\, d\mu^i_{(t,\xi)}(v)\, v_0{}^i(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

mit

$$\mathfrak{w}^l \in \mathfrak{R}_U', \qquad \mathfrak{w}^l = v_0{}^l \begin{pmatrix} E_m \\ w^l \end{pmatrix}, \qquad w_{j\alpha}^l(t, \xi) = \int_U g_{j\alpha}(t, \xi, v)\, d\mu^l_{(t,\xi)}(v)$$

$(l = 1, 2; j = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, m)$. Dann ist für $0 < \lambda < 1$

$$[\lambda y_1{}^* + (1 - \lambda)\, y_2{}^*]\,(f) = \int_\Omega \int_G \int_U f(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0(t, \xi)\, d\xi\, dt,$$

wobei $\mu_{(t,\xi)}$ für jedes $f \in C(U)$ folgendermaßen erklärt sei:

$$\int_U f(v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v) = \begin{cases} \int_U f(v)\, d\mu^1_{(t,\xi)}(v) \text{ für } \lambda v_0{}^1(t, \xi) + (1 - \lambda)\, v_0{}^2(t, \xi) = 0 \\ \int_U f(v)\, d\left(\dfrac{\lambda v_0{}^1(t, \xi)\, \mu^1_{(t,\xi)}(v) + (1 - \lambda)\, v_0{}^2(t, \xi)\, \mu^2_{(t,\xi)}(v)}{\lambda v_0{}^1(t, \xi) + (1 - \lambda)\, v_0{}^2(t, \xi)}\right) \\ \qquad \text{für } \lambda v_0{}^1(t, \xi) + (1 - \lambda)\, v_0{}^2(t, \xi) > 0. \end{cases}$$

Es gilt:

a) $v_0 = \lambda v_0{}^1 + (1 - \lambda)\, v_0{}^2 \in C^1(\bar\Omega \times \bar G)$ und $v_0(t, \xi) \geqq 0$ für alle $(t, \xi) \in \bar\Omega \times \bar G$.

b) $\mu_{(t,\xi)} \geqq 0$, $\operatorname{supp} \mu_{(t,\xi)} \subseteqq U$ und $\int_U d\mu_{(t,\xi)}(v) = 1$ für f. a. $(t, \xi) \in \Omega \times G$, da $\mu^1_{(t,\xi)}$ und $\mu^2_{(t,\xi)}$ für f. a. $(t, \xi) \in \Omega \times G$ Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

c) Für jede Funktion $f \in C(Q)$ ist

$$h_f\colon \bar\Omega \times \bar G \to \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad h_f(t, \xi) = \int_U f(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)$$

L-meßbar, da die den Familien $\{\mu^1_{(t,\xi)}\}$ und $\{\mu^2_{(t,\xi)}\}$ entsprechenden Funktionen h diese Eigenschaft (A) haben. Ebenso ist

$$r_\mathfrak{w}(t, \cdot) \quad \text{mit} \quad r_\mathfrak{w}(t, \xi) = \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)$$

in $\{\xi \in G \mid \lambda v_0{}^1(t, \xi) + (1 - \lambda)\, v_0{}^2(t, \xi) > 0\}$ stetig (Eigenschaft (B)). Also ist $\mathfrak{w} = (\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_m)$ ein Fluß über U, der das Funktional $\lambda y_1{}^* + (1 - \lambda)\, y_2{}^*$ erzeugt. Folglich ist letzteres ein Element von G^* und diese Menge konvex.

2. Wir wenden nun folgenden Trennungssatz [4: S. 71] an: X sei ein lokalkonvexer Hausdorffscher Raum und $M \subset X$ eine dessen Nullelement enthaltende konvexe abgeschlossene Teilmenge, $x^0 \in X \setminus M$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit $\langle x^*, x^0\rangle > 1$ und $\langle x^*, x\rangle \leqq 1$ für alle $x \in M$. Wir wenden dies auf $C^*(Q)$ mit der schwachen* Topologie σ^* und M gleich dem Abschluß von $\hat Y^*$ in σ^* an. Würde ein $\bar y^* \in K^*(C^*(Q)) \setminus M$ existieren, so gäbe es ein $\hat f \in [C^*(Q), \sigma^*]^*$ mit

$$\bar y^*(\hat f) = \int_Q \hat f(t, \xi, v)\, d\vartheta(t, \xi, v) > 1 \tag{9a}$$

(ϑ ist das durch $\bar y^*$ eindeutig bestimmte nichtnegative Borelsche Maß) und

$$\int_\Omega \int_G \int_U \hat f(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0(t, \xi)\, d\xi\, dt \leqq 1 \quad \text{für alle } \mu, v_0 \tag{9b}$$

mit

$$\mathfrak{w} = v_0 \begin{pmatrix} E_m \\ w \end{pmatrix}, \qquad w_{j\alpha}(t, \xi) = \int_U g_{j\alpha}(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v), \qquad \mathfrak{w} \in \mathfrak{R}_U.$$

Wäre $\hat{f} \leqq 0$, dann ist wegen $\bar{y}^* \in K^*(C^*(Q))$ auch $\int\limits_Q \hat{f}(t, \xi, v)\, d\vartheta(t, \xi, v) \leqq 0$. Also existiert ein $(t', \xi', v') \in \operatorname{supp} \vartheta$ mit $\hat{f}(t', \xi', v') > 0$. Es sei

$$\hat{f}(t^0, \xi^0, v^0) = \max \{\hat{f}(t, \xi, v) \mid (t, \xi, v) \in \operatorname{supp} \vartheta\}.$$

Da $\hat{f}$ stetig und $\Omega \times G$ ein Lipschitzgebiet ist, existiert eine Teilmenge $\Omega' \times G' \subseteqq \Omega \times G$ mit $\operatorname{mes}(\Omega' \times G') > 0$, so daß $\hat{f}(t, \xi, v^0) > 0$ für alle $(t, \xi) \in \Omega' \times G'$ ist. Wählt man nun

$$\tilde{v}_0(t, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } (t, \xi) \in \bar{\Omega}' \times \bar{G}' \\ 0 & \text{für } (t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \bar{G} \setminus (\bar{\Omega}' \times \bar{G}') \end{cases}$$

und $\mu_{(t,\xi)} = \delta_{v^0}$ (dies ist das in $v^0 \in U$ konzentrierte Diracmaß) für alle $(t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \bar{G}$, so erhält man

$$\int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U \hat{f}(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, \tilde{v}_0(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int\limits_{\Omega'} \int\limits_{G'} \hat{f}(t, \xi, v^0)\, d\xi\, dt = \lambda > 0.$$

Da $C_0^\infty(\Omega \times G)$ in $L_p(\Omega \times G)$, $p \geqq 1$, dicht liegt, existiert zu $\tilde{v}_0$ eine Folge $\{v_0^k\} \subset C_0^\infty(\Omega \times G)$, die f. ü. gegen $\tilde{v}_0$ konvergiert und für die $0 \leqq v_0^k \leqq \tilde{v}_0$ für alle k gilt. Für diese Folge ist dann

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U \hat{f}(t, \xi, v)\, d\delta_{v^0} v_0^k(t, \xi)\, d\xi\, dt = \lambda$$

und für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U \hat{f}(t, \xi, v)\, d\delta_{v^0}(1/\lambda + \varepsilon)\, d\xi\, dt = (1/\lambda + \varepsilon)\, \lambda > 1.$$

Somit existiert ein natürliches $\hat{k}$ mit

$$\int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U \hat{f}(t, \xi, v)\, d\delta_{v^0}(1/\lambda + \varepsilon)\, v_0^{\hat{k}}(t, \xi)\, d\xi\, dt > 1,$$

und $\mathfrak{w} = v_0^{\hat{k}}(1/\lambda + \varepsilon) \begin{pmatrix} E_m \\ w \end{pmatrix}$ mit $w_{j\alpha}(t, \xi) = g(t, \xi, v^0)$ ist ein Fluß, der (9b) verletzt.

3. Es liegt also $\hat{Y}^*$ dicht in $K^*(C^*(Q))$. Zu jedem $y^* \in K^*(C^*(Q))$ existiert deshalb eine Folge $\{\mathfrak{w}^h\} \subset \mathfrak{R}_U$ mit (für alle $f \in C(Q)$)

$$y^*(f) = \int\limits_Q f(t, \xi, v)\, d\nu(t, \xi, v) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \int\limits_U f(t, \xi, v)\, d\mu^n_{(t,\xi)}(v)\, v_0^n(t, \xi)\, d\xi\, dt,$$

$$\mathfrak{w}^n = v_0^n \begin{pmatrix} E_m \\ w \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w^n_{j\alpha}(t, \xi) = \int\limits_U g_{j\alpha}(t, \xi, v)\, d\mu^n_{(t,\xi)}(v).$$

Erfüllt y^* zusätzlich (4), dann gilt für $f = \nabla_t{}^T \Phi^T + [\nabla_\xi \Phi^\alpha]^T g_\alpha$

$$\int\limits_Q \{\nabla_t{}^T \Phi^T(t, \xi) + [\nabla_\xi \Phi^\alpha(t, \xi)]^T g_\alpha(t, \xi, v)\}\, d\nu(t, \xi, v) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(s) \cdot \mathfrak{n}(s)\, do$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_\Omega \int\limits_G \{\nabla_t{}^T \Phi^T(t, \xi) + [\nabla_\xi \Phi^\alpha(t, \xi)]^T w_\alpha{}^n(t, \xi)\, v_0^n(t, \xi)\, d\xi\, dt,$$

d. h. $\{\mathfrak{w}^n\}$ ist asymptotisch zulässig. Speziell für $\hat{f} = r$ ist die Behauptung des Satzes erfüllt ∎

Die Aussage von Satz 2 kann auch als Dualitätsaussage aufgefaßt werden:

$$\sup(\mathbf{D}_0) = \underline{\lim}\, \{\mathbf{F}(\mathfrak{w}^n) / \{\mathfrak{w}^n\} \text{ asymptotisch zulässig zu } f\}.$$

Es gibt Beispiele, in denen $\sup(\mathbf{D}_0) < \inf(\mathbf{F})$ ist (vgl. [10]).

5. Zusammenhang zwischen zulässigen Flüssen zum Flußproblem und zulässigen Prozessen zum Steuerungsproblem im eindimensionalen Fall

Die Grundgedanken des folgenden Satzes stützen sich wesentlich auf die anschauliche Interpretation eines zulässigen Flusses: Aus jedem Fluß $\mathfrak{w} \in Y_0$, der mit vorgegebener Intensität in $\{t_0\} \times \mathfrak{M}_{t_0}$ startet, in $(t_0, t_1) \times G$ quellfrei verläuft und in $\{t_1\} \times \mathfrak{M}_{t_1}$ mit der gleichen Intensität ankommt, kann man einen „Stromfaden" auswählen, der, wenn man die Flüssigkeit mit der gleichen Gesamtintensität durch diesen einen „Stromfaden" fließen läßt, dem entsprechenden Zielfunktional einen Wert erteilt, der kleiner oder gleich dem Wert des Zielfunktionals des Flußproblems für den vorgegebenen Fluß ist. Vorbereitend formulieren wir

Hilfssatz 1: *Es sei* $\mathfrak{w} = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_U$ *ein zulässiger Fluß zu* (**F**). *Dann hat das nachfolgend definierte* $\tilde{\mathfrak{w}} = \tilde{v}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$ *die Eigenschaft*

$$\int_{\tilde{\mathfrak{M}}_t} \tilde{v}_0(t, \xi)\, d\xi = \int_{\tilde{\mathfrak{M}}_{t_0}} v_0(t_0, \xi)\, d\xi \qquad (t \in t_0, t_1)).$$

Dabei ist

$$\tilde{v}_0(t, \xi) = \begin{cases} v_0(t, \xi)/\tilde{I} & \text{für } (t, \xi) \in \tilde{G} \\ 0 & \text{für } (t, \xi) \in \{[t_0, t_1] \times \bar{G}\} \setminus \tilde{G}, \end{cases}$$

$$\hat{\mathfrak{M}}_{t_0} = \mathrm{cl}\, \{\xi \in \bar{G} \mid v_0(t_0, \xi) > 0\}, \qquad \tilde{\mathfrak{M}}_{t_0} \subseteqq \hat{\mathfrak{M}}_{t_0}, \qquad \mathrm{mes}\, \tilde{\mathfrak{M}}_{t_0} > 0,$$

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{\mathfrak{M}}_{t_0}} v_0(t_0, \xi)\, d\xi,$$

$$\tilde{G} = \{(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times G \mid \textit{es existiert ein } x \textit{ mit } \dot{x}(\tau) = w(\tau, x(\tau)) \\ \textit{f. ü. auf } (t_0, t_1),\ x(t) = \xi,\ x(t_0) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{t_0}\},$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_t = \{\xi \in G \mid (t, \xi) \in \tilde{G}\}.$$

Beweis: Da $\mathfrak{w}$ zulässig ist, so gilt $\nabla_{(t,\xi)}\mathfrak{w} = 0$ und v_0 ist folglich bei festem w Lösung der Differentialgleichung

$$(v_0)_t + w^{\mathrm{T}} \nabla_\xi v_0 = -v_0[\nabla_\xi{}^{\mathrm{T}} w], \tag{10}$$

deren Charakteristiken dem folgenden System genügen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= 1 \\ \dot{x}(t) &= w(x_0(t), x(t)) \\ \dot{z}(t) &= -z(t)\left[\nabla_\xi{}^{\mathrm{T}} w(x_0(t), x(t))\right] \quad \text{auf } (t_0, t_1) \end{aligned}\right\}$$

bzw. mit $x_0(t) = t$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= w(t, x(t)) \\ \dot{z}(t) &= -z(t)\left[\nabla_\xi{}^{\mathrm{T}} w(t, x(t))\right] \quad \text{auf } (t_0, t_1) \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Zu $\bar{v}_0$ konstruieren wir nun eine Folge $\{\bar{v}_0{}^n\}$, so daß bei festem $t \in [t_0, t_1]$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{v}_0{}^n(t, \xi) = \bar{v}_0(t, \xi) \quad \text{für f. a. } \xi \in G,$$

$$\mathfrak{w}^n = \bar{v}_0{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} \in C^1([t_0, t_1] \times \bar{G}) \quad \text{und} \quad \nabla_{(t,\xi)} \mathfrak{w}^n = 0 \quad \text{auf} \ (t_0, t_1) \times G$$

gilt. Wir definieren zunächst α nach

$$\alpha(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \eta \in \mathfrak{M}_{t_0} \\ 0 & \text{für } \eta \in \bar{G} \setminus \mathfrak{M}_{t_0}. \end{cases}$$

Dazu existiert eine Folge $\{\alpha^n\} \subset C^{1,n+1}(G)$ mit $\alpha^n \leqq \alpha$ und $\alpha^n(\eta) = 0$ für alle n und $\eta \in \bar{G} \setminus \mathfrak{M}_{t_0}$, die f. ü. (im Sinne des L-Maßes auf G) gegen α konvergiert. Die Lösung $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ von (11) hängt bei stetig differenzierbarer rechter Seite stetig von den Anfangswerten $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \bar{G}$ ab und nach [6: S. 175ff.] existieren die Ableitungen

$$\psi_{k_t}, \psi_{k\eta_1}, \ldots, \psi_{k\eta_n} \quad \text{und} \quad \psi_{k\eta_i t} = \psi_{kt\eta_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und sind stetig. Für die Funktionaldeterminante gilt dabei

$$\left|\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}\right| \neq 0 \quad \text{in} \ (t_0, t_1) \times G. \tag{12}$$

Infolgedessen läßt sich die Lösung von (11) nach den Anfangswerten auflösen: $\eta = \chi(t, \xi)$, und es gilt $\chi \in C^{1,n}([t_0, t_1] \times \bar{G})$. Die Funktion $\bar{v}_0{}^n$ mit $\bar{v}_0{}^n(t, \xi) = \alpha^n(\chi(t, \xi)) \times \bar{v}_0(t, \xi)$ ist dann Element von $C^1([t_0, t_1] \times G)$ und in $(t_0, t_1) \times G$ genau dann Lösung von (10), wenn durch jeden Punkt $(t, \xi) \in (t_0, t_1) \times G$ genau eine Charakteristik geht, die ganz der Fläche $\bar{v}_0{}^n$ angehört, d. h. längs jeder Charakteristik $z - \bar{v}_0{}^n$ konstant ist (vgl. [6: Satz 1]). Da v_0 Lösung von (10) ist, gilt $d(z(t) - v_0(t, x(t)))/dt = 0$ entlang jeder Charakteristik (x, z). Mit (x, z) ist für beliebiges $\lambda > 0$ auch $(x, \lambda z)$ Charakteristik, folglich gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha^n(x(t_0)\, z(t) - \bar{v}_0{}^n(t, x(t)))\right) = \alpha^n(x(t_0)) \frac{d}{dt}\left(z(t) - v_0(t, x(t))\right) = 0$$

Damit ist $\bar{v}_0{}^n$ tatsächlich Lösung von (10) und $\mathfrak{w}^n = \bar{v}_0{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$ erfüllt die Gleichung $\nabla_{(t,\xi)} \mathfrak{w}^n = 0$ in $(t_0, t_1) \times G$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Auf die Funktionen $\mathfrak{w}^n$ wenden wir den Gaußschen Integralsatz an: für alle $t \in (t_0, t_1)$ ist

$$\int_{t_0}^{t} \int_G [\nabla_{(t,\xi)} \Phi(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, \mathfrak{w}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_G \Phi(t, \xi)\, \nabla_{(t,\xi)} \mathfrak{w}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt + \int_{\partial([t_0,t]\times\bar{G})} \Phi(t, \xi)\, \mathfrak{w}^n(t, \xi)\, do.$$

Längs $\partial([t_0, t_1] \times \bar{G}) \setminus [\{t_0\} \times \mathfrak{M}_{t_0} \cup \{t_1\} \times \mathfrak{M}_{t_1}]$ ist $\mathfrak{w}^n\, do = \mathfrak{w}\, do = 0$, demzufolge

$$\int_{\partial([t_0,t]\times\bar{G})} \Phi(t, \xi)\, \mathfrak{w}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt = \int_{\mathfrak{M}_t} \Phi(t, \xi)\, \bar{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi - \int_{\mathfrak{M}_{t_0}} \Phi(t_0, \xi)\, \bar{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi$$

und

$$\int_{t_0}^{t} \int_G [\nabla_{(t,\xi)} \Phi(t, \xi)]^{\mathrm{T}}\, \mathfrak{w}^n(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{\mathfrak{M}_t} \Phi(t, \xi)\, \bar{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi - \int_{\mathfrak{M}_{t_0}} \Phi(t_0, \xi)\, \bar{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi.$$

Speziell für $\Phi \equiv 1$ erhalten wir

$$0 = \int_{\mathfrak{M}_t} \tilde{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi - \int_{\mathfrak{M}_{t_0}} \tilde{v}_0{}^n(t, \xi)\, d\xi. \tag{13}$$

Die Folge $\{\alpha^n\}$ konvergiert für f. a. $\eta \in \overline{G}$ gegen α. Infolgedessen konvergiert auch die Folge $\{\alpha^n(\chi(t, \xi))\}$ bei festem $t \in (t_0, t_1)$ für f. a. $\xi \in G$ gegen $\alpha(\chi(t, \xi))$. In der Tat, sei $\mathfrak{a}$ die Menge aller $\xi \in \overline{G}$, für die $\{\alpha^n(\chi(t, \xi))\}$ nicht gegen $\alpha(\chi(t, \xi))$ konvergiert, $\operatorname{mes} \mathfrak{a} > 0$ und $\mathfrak{L} = \chi(t, \mathfrak{a})$. Dann ist

$$\operatorname{mes} \mathfrak{L} = \int_{\mathfrak{a}} \left| \frac{\partial(\chi_1, \ldots, \chi_n)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \right| d\xi \tag{14}$$

und nach (12) $\operatorname{mes} \mathfrak{L} > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß α^n für f. a. $\eta \in G$ gegen α konvergiert. Damit konvergiert $\{\tilde{v}_0{}^n(t, \xi)\}$ bei festem $t \in (t_0, t_1)$ für f. a. $\xi \in G$ gegen $\alpha(\chi(t, \xi))\, v_0(t, \xi) = \tilde{v}_0(t, \xi)$ und nach dem Lebesgueschen Grenzwertsatz [1: Satz 13.8.4/S. 138] erhält man aus (13) für f. a. $t \in [t_0, t_1]$ durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$0 = \int_{\mathfrak{M}_t} \tilde{v}_0(t, \xi)\, d\xi - \int_{\mathfrak{M}_{t_0}} \tilde{v}_0(t_0, \xi)\, d\xi \quad \text{bzw.} \quad \hat{I} = \int_{\hat{\mathfrak{M}}_t} \tilde{v}_0(t, \xi)\, d\xi \ \blacksquare$$

Formel (14) gilt zunächst nach [12: S. 263ff.] für beliebige Intervallbereiche $\mathfrak{a}$ und damit auch für jede Borelmenge. Aus der Regularität des Lebesgueschen Maßes kann man nun leicht schlußfolgern, daß sie dann auch für jede L-meßbare Menge gilt.

Satz 3: *Sind die Grundvoraussetzungen 1—6 für das Problem* $(\mathbf{P}_0)$ *erfüllt,* U *konvex,* $r(t, \xi, \cdot)$ *und* $g(t, \xi, \cdot)$ *konvex für alle* $(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times \overline{G}$ *und* $\operatorname{mes} \mathfrak{M}_{t_0} > 0$, *so existiert zu jedem zulässigen Fluß* $\mathfrak{w} \in Y_0$ *ein zulässiger Prozeß* $(\hat{x}, \hat{u}) \in X_0$, *mit* $F(\mathfrak{w}) \geqq J(\hat{x}, \hat{u})$.

Beweis: Wir wählen $a > 0$ so, daß gilt

$$\hat{\mathfrak{M}}_{t_0} \subseteqq K := \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid -a \leqq \xi^l \leqq a \ (l = 1, \ldots, n)\}.$$

Die Zerlegung des Intervalls $[-a, a]$ in 2^i $(i = 1, 2, \ldots)$ Teilintervalle $\hat{I}_j{}^i$ $(j = 1, \ldots, 2^i)$ gleicher Länge $a/2^{i-1}$,

$$\hat{I}_j{}^i = \{\vartheta \in \mathbf{R} \mid -a + (j - 1)\, a/2^{i-1} \leqq \vartheta \leqq -a + ja/2^{i-1}\},$$

nennen wir *Zerlegung i-ter Ordnung.* Das kartesische Produkt von Intervallen $\hat{I}^i_{j_1}, \ldots, \hat{I}^i_{j_r}$ gleicher Ordnung i bildet einen *Würfel i-ter Ordnung* mit der Kantenlänge $a/2^{i-1}$. Jeder Würfel $(i - 1)$-ter Ordnung K_j^{i-1} kann als Vereinigung von Würfeln i-ter Ordnung dargestellt werden. Zu einem gegebenen Fluß $\mathfrak{w} = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} \in Y$ konstruieren wir nun induktiv eine Folge $\{\tilde{\mathfrak{w}}^i\}_{i=0}^{\infty} \subset L^{\infty}_{n+1}((t_0, t_1) \times G)$ „flußähnlicher" Elemente.

1. $\tilde{\mathfrak{w}}^0 = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = v_0{}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$, $\mathfrak{M}^0_{t_0} = \operatorname{cl} \{\xi \in \overline{G} \mid v_0(t_0, \xi) > 0\}$, $G^0 = [t_0, t_1] \times \overline{G}$.
2. Sei eine Zerlegung i-ter Ordnung gegeben, $K^0 = K_1{}^i \cup \cdots \cup K^i_{2^{n_i}}$ und

$$J^i = \{j \in \{1, \ldots, 2^{n_i}\} \mid \operatorname{mes} (\mathfrak{M}^{i-1}_{t_0} \cap K_j{}^i) \neq 0\}.$$

Dann definieren wir

$$v_{0,j}^i(t,\xi) = \begin{cases} v_0^{i-1}(t,\xi)/I_j^i & \text{für } (t,\xi) \in G_j^i, \quad j \in J^i \\ 0 & \text{für } (t,\xi) \in G^0 \setminus G_j^i, \quad j \in J^i \\ 0 & \text{für } (t,\xi) \in G^0, \quad j \notin J^i, \end{cases}$$

wobei

$$I_j^i = \int_{\mathfrak{M}_{t_0,j}^i} v_0^{i-1}(t_0,\xi)\, d\xi, \qquad \mathfrak{M}_{t_0,j}^i = \mathfrak{M}_{i-1}^{t_0} \cap K_j^i$$

und

$$G_j^i = \{(t,\xi) \in G^{i-1} \mid \text{es existiert ein } x \text{ mit } \dot{x}(\tau) = w(\tau, x(\tau))$$
$$\text{f. ü. auf } (t_0, t_1),\ x(t) = \xi,\ x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0,j}^i\}$$

sei. Ist $\hat{\jmath} \in J$ durch

$$\min_{j \in J^i} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t,\xi,v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_{0,j}^i(t,\xi)\, d\xi\, dt \right\}$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t,\xi,v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_{0,\hat{\jmath}}^i(t,\xi)\, d\xi\, dt,$$

festgelegt, dann definieren wir

$$v_0^i = v_{0,\hat{\jmath}}^i, \qquad \tilde{\mathfrak{w}}^i = v_0^i \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{M}_t^i = \mathfrak{M}_{t,\hat{\jmath}}^i, \qquad G^i = G_{\hat{\jmath}}^i, \qquad I^i = I_{\hat{\jmath}}^i.$$

Es gelten nun folgende Eigenschaften:

a) Für alle $i = 0, 1, \dots$ ist

$$\int_{\mathfrak{M}_{t_0}^i} v_0^i(t_0,\xi)\, d\xi = 1. \tag{15}$$

Dies folgt mittels vollständiger Induktion, denn für $i = 0$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung, und ist sie für $i - 1$ richtig, so ist $v_0^i = v_{0,\hat{\jmath}}^i$ für ein $\hat{\jmath} \in J^i$ und folglich

$$v_{0,\hat{\jmath}}^i(t,\xi) = \begin{cases} v_0^{i-1}(t_0,\xi)/I_{\hat{\jmath}}^i & \text{für } \xi \in \mathfrak{M}_{t_0,\hat{\jmath}}^i \\ 0 & \text{für } \xi \in \mathfrak{M}_{t_0} \setminus \mathfrak{M}_{t_0,\hat{\jmath}}^i \end{cases}$$

sowie

$$\int_{\mathfrak{M}_{t_0}^i} v_0^i(t_0,\xi)\, d\xi = (1/I^i) \int_{\mathfrak{M}_{t_0}^i} v_0^{i-1}(t_0,\xi)\, d\xi = 1.$$

b) Es gilt

$$\mathfrak{M}_{t_0}^i = \bigcup_{j \in J^i} \mathfrak{M}_{t_0,j}^i \quad \text{und} \quad \operatorname{mes}(\mathfrak{M}_{t_0,j'}^i \cap \mathfrak{M}_{t_0,j''}^i) = 0 \quad \text{für } j' \neq j'' \tag{16}$$

nach Definition und folglich auch $G^{i-1} = \cup \{G_j^i : j \in J^i\}$. Es ist dann

$$\operatorname{mes}(G_{j'}^i \cap G_{j''}^i) = 0 \quad \text{für alle } j' \neq j'', \tag{17}$$

denn wäre $\operatorname{mes}(G_{j'} \cap G_{j''}) > 0$, dann betrachteten wir das Bild von $G_{j'}^i \cap G_{j''}^i$ bei der Abbildung

$$\hat{\varphi} : [t_0, t_1] \times (G_{j'}^i \cap G_{j''}^i) \to \mathbf{R}^{n+1}, \qquad \hat{\varphi}(t,\xi) \doteq (t, \chi(t,\xi))^{\mathrm{T}},$$

mit der im Beweis des Hilfssatzes 1 definierten Funktion χ, und es gälte nach (15) wegen $|\partial\chi(t, \xi)/\partial\xi| > 0$ auch

$$\operatorname{mes} \hat{\psi}(G^i_{j'} \cap G^i_{j''}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{G^i_{j'} \cap G^i_{j''}} \left| \frac{\partial \hat{\psi}(t, \xi)}{\partial(t, \xi)} \right| d\xi\, dt > 0.$$

Andererseits ist aber für $j' \neq j''$ im Widerspruch dazu

$$\operatorname{mes} \hat{\psi}(G^i_{j'} \cap G^i_{j''}) = \operatorname{mes}\big([t_0, t_1] \times (\mathfrak{M}^i_{t_0,j'} \cap \mathfrak{M}^i_{t_0,j''})\big) = 0.$$

c) Aus (16) und (17) ergibt sich weiter $v^{i-1}_{0,j} = \sum_{j \in J^i} I_j{}^i v^i_{0,j}$.
d) Für $j \in J^i$ ist

$$v^i_{0,j}(t, \xi) = \begin{cases} v_0{}^{i-1}(t, \xi)/I_j{}^i & \text{für } (t, \xi) \in G_j{}^i \\ 0 & \text{für } (t, \xi) \in G^0 \setminus G_j{}^i \end{cases}$$
$$= \begin{cases} v_0{}^0(t, \xi)/I_j{}^i I^{i-1} \dots I^1 & \text{für } (t, \xi) \in G_j{}^i \\ 0 & \text{für } (t, \xi) \in G^0 \setminus G_j{}^i. \end{cases}$$

Wir können Hilfssatz 1 anwenden, wobei $\tilde{v}_0 = v^i_{0,j}$, $\tilde{I} = I_j{}^i I^{i-1} \dots I^1$ und $\tilde{G} = G_j{}^i$ ist und erhalten

$$\int_{\mathfrak{M}^i_{t,j}} v_0{}^0(t, \xi)\, d\xi = I_j{}^i I^{i-1} \dots I^1$$

mit $\mathfrak{M}^i_{t,j} = \operatorname{cl} \{\xi \in \bar{G} \mid v^i_{0,j}(t, \xi) > 0\}$ bzw. für $t \in [t_0, t_1]$ und $i = 0, 1, \dots$

$$\int_{\mathfrak{M}^i_{t,j}} v_0{}^i(t, \xi)\, d\xi = 1 \ (j \in J^i), \quad \text{speziell} \quad \int_{\mathfrak{M}_t{}^i} v_0{}^i(t, \xi)\, d\xi = 1.$$

e) Die Folge der Zielfunktionswerte

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0{}^i(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

zu $\mathfrak{w}^i = v_0{}^i \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$ ist monoton fallend. Da $v_0{}^{i-1} = \sum_{j \in J^i} I_j{}^i v^i_{0,j}$ und

$$\sum_{j \in J^i} I_j{}^i = \sum_{j \in J^i} \int_{\mathfrak{M}^i_{t_0,j}} v_0{}^{i-1}(t_0, \xi)\, d\xi = \int_{\mathfrak{M}^{i-1}_{t_0}} v_0{}^{i-1}(t_0, \xi)\, d\xi = 1$$

ist, erhält man für $j = \hat{\jmath}$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v^i_{0,\hat{\jmath}}(t, \xi)\, d\xi\, dt$$
$$\leq \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0{}^{i-1}(t, \xi)\, d\xi\, dt = \beta, \tag{18}$$

denn anderenfalls wäre für alle $j \in J^i$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v^i_{0,j}(t, \xi)\, d\xi\, dt > \beta$$

und somit

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_0^{i-1}(t, \xi) \, d\xi \, dt$$

$$= \sum_{j \in J^i} I_j^i \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_{0,j}^i(t, \xi) \, d\xi \, dt > \beta .$$

f) Schließlich gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r\big(t, x(t), u(t)\big) \, dt$$

für einen zulässigen Prozeß $(x, u) \in X_0'$. Wir zeigen diese letzte Behauptung. Aus dem Konstruktionsprinzip ist klar, daß genau ein $\xi \in \bigcap \mathfrak{M}_{t_0}^i \subset \mathfrak{M}_{t_0}$ existiert. Folglich enthält $\bigcap G^i$ genau ein x mit

$$\dot{x}(t) = w\big(t, x(t)\big) = \int_U g\big(t, x(t), v\big) \, d\mu_{(t,x(t))}(v) \quad \text{f. ü. auf } (t_0, t_1)$$

und da x Charakteristik von (10) und v_0 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ zu (10) ist, folgt $x(t_1) \in \mathfrak{M}_{t_1}$. Es ist

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt = \lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \bar{r}(t, \xi) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt$$

mit $\bar{r}(t, \xi) = \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v)$ und wegen $\int_{\mathfrak{M}_t^i} v_0^i(t, \xi) \, d\xi = 1$ folgt

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \bar{r}(t, \xi) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt = \lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt$$

$$\leqq \lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathfrak{M}_t^i} \Big[\sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi)\Big] \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt \leqq \int_{t_0}^{t_1} \sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi) \, dt .$$

Wir verwenden einen Lebesgueschen Grenzwertsatz [1: Satz 13.8.1/S. 137]: $\{r_i\}$ mit $r_i(t) = \sup \{r(t, \xi) \mid \xi \in \mathfrak{M}_t^i\}$ ist wegen $\mathfrak{M}_t^i \subseteqq \mathfrak{M}_t^{i-1}$ monoton fallend, und wegen $x(t) \in \cap \mathfrak{M}_t^i$ ist $r_i(\cdot) \geqq r\big(\cdot, x(t)\big)$ für alle i. Also kann man den Grenzübergang $i \to \infty$ unter dem Integralzeichen ausführen und somit ist

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \lim_{i \to \infty} \Big(\sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi)\Big) \, dt .$$

Wegen der Stetigkeit von $\bar{r}$ in $x(t)$ nach Eigenschaft (B) ist nun $\sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi) = r\big(t, x(t)\big)$ und folglich

$$\int_{t_0}^{t_1} \lim_{i \to \infty} \Big(\sup_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi)\Big) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \bar{r}\big(t, x(t)\big) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_U r\big(t, x(t), v\big) \, d\mu_{(t,x(t))}(v) \, dt ,$$

bzw. zusammengefaßt

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v) \, d\mu_{(t,\xi)}(v) \, v_0^i(t, \xi) \, d\xi \, dt \leqq \int_{t_0}^{t_1} \int_U r\big(t, x(t), v\big) \, d\mu_{(t,x(t))}(v) \, dt . \tag{19}$$

Analog zeigt man

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}\, v_0^i(t, \xi)\, d\xi\, dt \geqq \lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \inf_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi)\, dt$$

und

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \inf_{\mathfrak{M}_t^i} \bar{r}(t, \xi)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_U r\big(t, x(t)\big)\, d\mu_{(t,x(t))}(v)\, dt.$$

Also folgert man wiederum wegen der Stetigkeit von $\bar{r}$ in $x(t)$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0^i(t, \xi)\, d\xi\, dt \geqq \int_{t_0}^{t_1} \int_U r\big(t, x(t)\big)\, d\mu_{(t,x(t))}(v)\, dt. \tag{20}$$

Es ist $\mu^* = \{\mu_{(t,x(t))} = \mu_t \mid t \in [t_0, t_1]\}$ eine verallgemeinerte Steuerung zum Steuerproblem $(\mathbf{P}_0)$ im Sinne von L. C. YOUNG [14: Kap. 3], zu der bei konvexem U und bei für alle $(t, \xi) \in [t_0, t_1] \times \bar{G}$ konvexen $r(t, \xi, \cdot)$ und $g_i(t, \xi, \cdot)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine zulässige Steuerung u zu $(\mathbf{P}_0)$ existiert, so daß nach (19) und (20) gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_G \int_U r(t, \xi, v)\, d\mu_{(t,\xi)}(v)\, v_0^i(t, \xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_U r\big(t, x(t), v\big)\, d\mu_{(t,x(t))}(v)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} r\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt;$$

$$\dot{x}(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big) \quad \text{f. ü. auf } (t_0, t_1), \quad x(t) \in \bar{G}; \quad x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0},$$

$$x(t_1) \in \mathfrak{M}_{t_1}.$$

Mit anderen Worten, es ist $(x, u) \in X_0$, und nach Eigenschaft e) folgt die Behauptung des Satzes, $F(\mathfrak{w}) \geqq J(x, u)$. ∎

Es ist zu vermuten, daß sich die Hauptideen des Satzes 3 auch auf mehrdimensionale Probleme übertragen lassen. Damit könnten auch in diesem Fall eine Beziehung zwischen dem Flußproblem (F) und dem Steuerproblem $(\mathbf{P}_0)$ hergestellt und Aussagen folgender Art gewonnen werden: Liegt zwischen $(\mathbf{D}_0)$ und (F) starke Dualität vor, so auch zwischen $(\mathbf{D}_0)$ und $(\mathbf{P}_0)$, wobei starke Dualitätsaussagen zwischen $(\mathbf{D}_0)$ und (F) einfacher zu gewinnen sind.

LITERATUR

[1] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 2. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, und Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1975.

[2] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARZ: Linear Operators, Part I. New York: Intersc. Publ. 1958.

[3] EKELAND, I., and R. TEMAM: Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. and New York: Amer. Elsevier Publ. Comp., Inc. 1976.

[4] GÖPFERT, A.: Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsges. 1973.

[5] HILDEBRANDT, S.: Über die Identität der Sobolewschen und Calkin-Morreyschen Räume. Math. Annalen **148** (1962), 226–237.

[6] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Bd. 1. Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G. 1956.

[7] KLÖTZLER, R.: On a general conception of duality in optimal control. Lecture Notes in Math. **703** (1979), 189–196.

[8] KLÖTZLER, R.: Starke Dualität in der Steuerungstheorie. Math. Nachr. 95 (1977), 313 bis 320.
[9] KLÖTZLER, R.: Dualität bei Steuerungsproblemen und zugeordneten Flußproblemen I. Z. Anal. Anw. 1 (1982) 4, 47–57.
[10] KLÖTZLER, R.: Dualität bei Steuerungsproblemen und zugeordneten Flußproblemen II. Z. Anal. Anw. 2 (1983), 57–74.
[11] PICKENHAIN, S.: Zur Dualität bei verallgemeinerten Steuerungsproblemen. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.
[12] SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 2. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1958.
[13] VINTER, R. B., and R. M. LEWIS: Relaxation of Optimal Control Problems to Equivalent Convex Programs. J. Math. Anal. Appl. 74 (1983), 475–493.
[14] YOUNG, L. C.: Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia–London–Toronto: W. B. Saunders Comp. 1969.

Manuskripteingang: 05. 09. 1984; in revidierter Fassung 25. 03. 1986

VERFASSER:

Dr. SABINE PICKENHAIN
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DRR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz