Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (2) 1987, S. 151–157

Zusammenhang zwischen einer Integrodifferentialgleichung und einer Funktionalgleichung

I. Fenyö

Durch Anwendung der Laplace-Transformation wird die Integrodifferentialgleichung

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\, dx = h(t)$$

in eine Funktionalgleichung übergeführt, welche leicht zu lösen ist. Dadurch wird ein Alternativsatz bewiesen und die allgemeine Lösung explizit angegeben.

Применением преобразования Лапласа интегро-дифференциальное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\, dx = h(t)$$

переводится в функциональное уравнение, которое легко решается. Этим устанавливается теорема об альтернативе и дается общее решение.

By application of the Laplace-transformation, the integro-differential equation

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\, dx = h(t)$$

can be reduced to a functional equation which can be solved in an easy way. By this idea, an alternative theorem concerning the investigated equation is proved and the general form of solutions is given.

1. Wir wollen zuerst die Funktionalgleichung

$$F(s) + \frac{\lambda}{s^p} F\left(\frac{1}{s}\right) = H(s)\,^{1)} \tag{1}$$

betrachten, wobei H eine gegebene Funktion, λ und p gegebene Zahlen und F die unbekannte Funktion ist. Diese Gleichung soll auf einer Teilmenge D der reellen (oder komplexen) Zahlen betrachtet werden, welche mit s auch $1/s$ enthält. Die Lösung der obigen Funktionalgleichung liefert eine Methode zur Auffindung der Lösungen einer gewissen Integrodifferentialgleichung. Für die Funktionalgleichung (1) gilt der folgende Alternativsatz.

---

1) Anm. d. Red.: Wir weisen auf die Notiz des Verfassers *Solution of an integral equation via functional equation* über die entsprechende homogene Funktionalgleichung hin in: Wiss. Beitr. Ingenieurhochschule Wismar, Sonderheft 4 (1985), 18–20.

Satz A: 1. *Ist* $\lambda^2 \neq 1$, *so hat Gleichung* (1)

$$F(s) = \frac{1}{1 - \lambda^2}\left[H(s) - \frac{\lambda}{s^p} H\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{2}$$

als einzige Lösung.

2. *Ist* $\lambda^2 = 1$, *so hat die inhomogene Gleichung* (1) *genau dann Lösungen, falls H der Gleichung*

$$H(s) = \frac{\lambda}{s^p} H\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3}$$

genügt. Ist diese erfüllt, so ist die allgemeine Lösung von (1) *von der Gestalt*

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[H(s) + \frac{1}{s^p} G\left(\frac{1}{s}\right) - \lambda G(s)\right], \tag{4}$$

wobei G eine beliebige auf D definierte Funktion ist.

3. *Ist* $\lambda^2 = 1$, *so hat die zu* (1) *gehörige homogene Gleichung nichttriviale Lösungen, deren allgemeine Gestalt*

$$F(s) = G(s) - \frac{\lambda}{s^p} G\left(\frac{1}{s}\right) \tag{5}$$

ist, wobei G eine beliebige auf D definierte Funktion ist.

1. Aus der Behauptung 1 ergibt sich sofort, daß im Falle $\lambda^2 \neq 1$ die zu (1) gehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung hat. Dies ist ein Spezialfall aus [4: Theorem 2]. 2. Satz A hat zum Inhalt, daß $\lambda = \pm 1$ die Eigenwerte des Operators $(Af)(s) = 1/s^p f(1/s)$ sind. Dieser ist für alle auf D definierten Funktionen erklärt.

Beweis: 1. Man setze in (1) anstatt s den Ausdruck $1/s$ ein: $F(1/s) + \lambda s^p F(s) = H(1/s)$. Eliminiert man hieraus und aus (1) $F(1/s)$, so ergibt sich

$$(1 - \lambda^2) F(s) = H(s) - \frac{\lambda}{s^p} H\left(\frac{1}{s}\right), \tag{6}$$

woraus als einzige Lösung (2) hervorgeht.

2. Aus der Beziehung (6) sieht man sofort, daß im Falle $\lambda^2 = 1$ für die Existenz der Lösung die Beziehung (3) notwendig ist. Sie ist aber auch hinreichend. Um das für den Fall $\lambda = 1$ zu zeigen (für den Fall $\lambda = -1$ verläuft der Beweis ganz analog), betrachten wir die abgeänderte Funktionalgleichung

$$Z_a(s) + \frac{1 + a}{s^p} Z_a\left(\frac{1}{s}\right) = H(s) + aG(s) \qquad (s \in D), \tag{7}$$

wobei $a \neq 0, 2$, sonst aber eine beliebige Zahl und G eine auf D definierte beliebige Funktion ist. (7) ist eine inhomogene Funktionalgleichung von der Gestalt (1), wobei für den Parameterwert $(1 + a)^2 \neq 1$ ist. Somit hat (7) nach (2) die einzige Lösung

$$Z_a(s) = -\frac{1}{a(a + 2)} H(s) + \frac{1 + a}{a(a + 2)} \frac{1}{s^p} H\left(\frac{1}{s}\right) - aG(s) + \frac{1 + a}{a + 2} \frac{1}{s^p} G\left(\frac{1}{s}\right).$$

Wir nehmen jetzt an, daß H der Bedingung (3) mit $\lambda = 1$ genügt. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung ergibt sich

$$Z_a(s) = \frac{1}{a+2}\left[H(s) - G(s) + \frac{1+a}{s^p}\, G\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

Bei $a \to 0$ geht (7) in (1) und Z_a in den Ausdruck (4) über. Dieser Schritt ist legal, da Z_a für jedes feste s eine stetige Funktion im Punkte $a = 0$ ist. Man sieht auch leicht ein, daß (4) die allgemeine Lösung von (1) ist. Dazu sei F eine beliebige Lösung von (1). Mit dieser kann der Ausdruck (4) jetzt als eine Funktionalgleichung bezüglich G betrachtet werden. Diese ist genau vom Typ (1). Für diese ist, wie man sofort sieht, die Existenzbedingung (3) erfüllt, was besagt, daß zu jeder Lösung F von (1) eine Funktion G derart bestimmt werden kann, daß die Beziehung (4) gilt.

3. (5) ergibt sich unmittelbar aus (4), wenn wir $H = 0$ setzen ∎

2. Wir werden jetzt zur Betrachtung der Integrodifferentialgleichung

$$f(t) + \lambda \int\limits_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\,dx = h(t) \tag{8}$$

übergehen. Hier bedeutet J_n die Besselsche Funktion erster Art, h eine gegebene in $(0, \infty)$ definierte Funktion, λ einen Parameter, n und k nichtnegative ganze Zahlen. Man bemerke, daß der zweite Summand auf der linken Seite von (8) die (modifizierte) Hankel-Transformierte von $f^{(k)}$ ist. Der Funktionenraum $B_n{}^k$, in welchem wir die Lösung von (8) suchen, bestehe genau aus denjenigen Funktionen f auf $(0, \infty)$, welche mindestens k-mal differenzierbar sind (die $(k-1)$-ten Ableitungen seien absolut stetig), für welche die Grenzwerte $f^{(j)}(+0)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ existieren und (einfachheitshalber) gleich Null sind, für welche $f^{(k)}$ die Hankel-Transformierte n-ter Ordnung für fast alle $t > 0$ besitzt und $t^{n/2}f(t)$ Laplace-transformierbar mit einer Konvergenzabszisse $\leqq 0$ ist.

Hinreichend, daß eine Funktion f in $B_n{}^k$ sei, ist die Erfüllung folgender Bedingungen:

a) $f \in C^k(0, \infty)$, $f^{(j)}(+0) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$,

b) $\int\limits_0^\infty e^{-\delta t} t^{n/2}\, |f(t)|\, dt < \infty$ für alle $\delta > 0$,

c) $\int\limits_0^\infty t^{-n-1/2} \left|f^{(k)}\left(\frac{t^2}{2}\right)\right| dt < \infty.$

Die Behauptungen a) und b) sind evident. Wenn wir im Integral von (8) für t die Variable $u = \sqrt{2t}$ und für x die Veränderliche $v = \sqrt{2x}$ einführen, so ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\,dx = \int\limits_0^\infty J_n(uv)\left(\frac{u}{v}\right)^n f^{(k)}\left(\frac{v^2}{2}\right) dv.$$

Dann aber folgt nach einem wohlbekannten Satze (s. z. B. [2: p. 182]) aus c) die Existenz der Hankel-Transformierten für alle $t > 0$.

Wir werden auch über die willkürliche Funktion h in (8) voraussetzen, daß diese aus $B_n{}^k$ ist.

Wir benötigen einen weiteren ebenfalls bekannten Hilfssatz [3: Satz 52/p. 237]. Nach diesem gilt: Ist eine Funktion φ Laplace-transformierbar, dann ist ihre

Hankel-Transformierte Laplace-transformierbar und es gilt ($\operatorname{Re} s > 0$).

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx})\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2}\varphi(x)\,dx\right\}(s) = \frac{1}{s^{n+1}}\,\mathcal{L}\{\varphi\}\left(\frac{1}{s}\right). \tag{9}$$

Satz B: 1. *Ist $\lambda^2 \neq 1$, so hat Gleichung* (8)

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[h(t) - \lambda\int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx})\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} h^{(k)}(x)\,dx\right] \tag{10}$$

als einzige Lösung im Raume B_n^k.

2. *Ist $\lambda^2 = 1$, so hat die inhomogene Gleichung* (8) *genau dann zum Raum B_n^k gehörige Lösungen, falls h der Gleichung*

$$h(t) = \lambda\int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx})\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} h^{(k)}(x)\,dx \tag{11}$$

genügt. Ist diese erfüllt, so ist die allgemeine Lösung von (8) *von der Gestalt*

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[h(t) - \lambda g(t) + \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx})\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} g^{(k)}(x)\,dx\right], \tag{12}$$

wobei g eine beliebige Funktion aus B_n^k ist.

3. *Ist $\lambda^2 = 1$, so hat die zu* (8) *gehörige homogene Gleichung nichttriviale Lösungen, deren allgemeine Gestalt*

$$f(t) = \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx})\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} g^{(k)}(x)\,dx - \lambda g(t) \tag{13}$$

ist, wobei g eine beliebige Funktion aus B_n^k ist.

Beweis: Wir setzen zuerst voraus, daß (8) eine Lösung aus B_n^k besitzt. Unter Berücksichtigung der klassischen Formel

$$\mathcal{L}\{\varphi^{(r)}\}(s) = s^r\mathcal{L}\{\varphi\}(s) - \varphi(+0)\,s^{r-1} - \varphi'(+0)\,s^{r-2} - \cdots - \varphi^{(r-1)}(+0)$$

($r = 0, 1, \ldots$) und der Regel (9) erhalten wir durch gliedweise Bildung der Laplace-Transformierten von (8)

$$F(s) + \frac{\lambda}{s^{n+k+1}}\,F\left(\frac{1}{s}\right) = H(s) \qquad (\operatorname{Re} s > 0), \tag{14}$$

wobei $\mathcal{L}(f) = F$ und $\mathcal{L}(h) = H$ ist. Dabei wurde schon berücksichtigt, daß f und h aus B_n^k sind. (14) ist eine Funktionalgleichung genau vom Typ (1), wobei jetzt $D = (0, \infty)$ ist. Wir können dementsprechend den Satz A auf (14) anwenden. Die Auflösung der Integrodifferentialgleichung (8) wurde somit auf die Auflösung der Funktionalgleichung (14) reduziert:

1. Ist $\lambda^2 \neq 1$, so ergibt sich laut Satz A/1, daß (14) genau eine Lösung hat, und diese ist nach (2)

$$F(s) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[H(s) - \frac{\lambda}{s^{n+k+1}}\,H\left(\frac{1}{s}\right)\right]. \tag{15}$$

Da die rechte Seite dieser Beziehung eine inverse Laplace-Transformierte hat, werden wir, nochmals durch Berücksichtigung von (9), die Rücktransformation durchführen und erhalten

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[h(t) - \lambda \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} h^{(k)}(x)\,dx\right]. \tag{16}$$

Angenommen, daß (8) eine Lösung aus $B_n{}^k$ hat, ergab sich, daß diese nur von obiger Gestalt sein kann. Es läßt sich sofort zeigen, daß die unter (16) angegebene Funktion die Gleichung (8) tatsächlich befriedigt. Denn unter Berücksichtigung von (9) folgt aus (16) die Beziehung (15), welche wiederum mit (14) gleichbedeutend ist. Aus (14) ergibt sich wiederum nach (9)

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty J_{n+k}(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{(n+k)/2} f(x)\,dx = h(t).$$

Man sieht sofort aus (16), daß f beliebig oft differenzierbar ist, daher gilt nach einer bekannten Formel [1: Formel 11.7]

$$\int_0^\infty J_{n+k}(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{(n+k)/2} f(x)\,dx = \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f^{(k)}(x)\,dx,$$

womit wir (8) erhalten haben.

2. Ist $\lambda^2 = 1$, so hat die inhomogene Gleichung (14) nach Satz A/2 genau dann Lösungen, falls

$$H(s) = \frac{\lambda}{s^{n+k+1}} H\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s > 0) \tag{17}$$

gilt. Daraus folgt unter Beachtung von (9) die Bedingung (11). Ist umgekehrt (11) erfüllt, so folgt daraus (17) und nach Satz A/2, daß (14) Lösungen besitzt. Diese haben die Form

$$F(s) = \frac{1}{2}\left[H(s) + \frac{1}{s^{n+k+1}} G\left(\frac{1}{s}\right) - \lambda G(s)\right], \tag{18}$$

wobei jetzt G eine Funktion ist, deren inverse Laplace-Transformierte existiert, die sonst aber beliebig ist. Bezeichnet nun g eine beliebige Funktion aus $B_n{}^k$ und setzt man $\mathcal{L}\{g\} = G$, so ergibt sich (12).

3. Setzt man $h = 0$, so ergibt sich die Behauptung (13) ∎

1. Aus der Behauptung 1 ergibt sich sofort, daß im Falle $\lambda^2 \neq 1$ die zu (8) gehörige homogene Integrodifferentialgleichung nur die triviale Lösung hat.

2. Wir können die Integrodifferentialgleichung (8) unter etwas allgemeineren Voraussetzungen betrachten, indem wir von der Lösung die Erfüllung der Anfangsbedingungen $f^{(j)}(+0) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ nicht unbedingt fordern. Man ersetzt dann die Bedingung a) durch

a') $f \in C^k(0, \infty)$, $f^{(j)}(+0)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ existieren und sind endlich.

Statt der Funktionalgleichung (14) erhält man die folgende:

$$F(s) + \frac{\lambda}{s^{n+k+1}} F\left(\frac{1}{s}\right) = H(s) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{k-j+n}}. \tag{14'}$$

Wenn wir diesmal den Satz A auf (14') anwenden, dann zeigt ein leichtes Rechnen folgendes: Ist $\lambda^2 \neq 1$, so muß die Lösung die Gestalt

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[h(t) - \lambda \int_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} h^{(k)}(x)\,dx\right.$$
$$\left.+ \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(+0)\frac{t^{n+k-j-1}}{(n+k-j-1)!} - \lambda \sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(+0)\frac{t^j}{j!}\right] \qquad (16')$$

haben. Die k-te Ableitung der Polynomterme auf der rechten Seite von (16') können Hankel-Transformierte nur dann besitzen, wenn entweder (i) $n = 0$ oder (ii) $n > 0$ und $f^{(k)}(+0) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ zutrifft, wobei $m = \min(n, k)$ ist. Im Falle (i) ist also die Lösung von (8) nebst Anfangsbedingungen $f^{(j)}(+0) = a_j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1; a_j$ sind beliebige Zahlen):

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[h(t) - \lambda \int_0^\infty J_0(2tx)\, h^{(k)}(x)\,dx + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!} - \lambda \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{t^j}{j!}\right].$$

Im Falle (ii) hat die Lösung die Gestalt (16'), in welcher jedoch $f(+0) = f'(+0) = \cdots = f^{(m)}(+0) = 0$ und $f^{(m+1)}(+0) = a_{m+1}, \ldots, f^{(k-1)}(+0) = a_{k-1}$ $(a_{m+1}, \ldots, a_{k-1}$ beliebige Zahlen) gesetzt werden soll.

Ist $\lambda^2 = 1$ und wenden wir Satz A/2 auf (14') an, so ergibt sich für die Auflösbarkeit von (14') die Bedingung

$$H(s) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{k-j-1}} = \frac{\lambda}{s^{n+k+1}} H\left(\frac{1}{s}\right) + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{n+2k+j}}.$$

Wenn wir diese als eine Funktionalgleichung bezüglich H betrachten, dann kann letztere, wiederum nach Satz A/2, genau dann befriedigt werden, wenn für $s > 0$

$$\lambda \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{n+2k+j}} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{k-j-1}} = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{k-j-1}} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(+0)}{s^{n+2k+j}}$$

gilt. Ist $\lambda = 1$, dann geht diese Beziehung in eine Identität über. Das bedeutet, falls h der Bedingung (11) (d. h. H der Bedingung (17)) genügt, daß dann die Integrodifferentialgleichung (8) mit beliebigen Anfangswerten befriedigt werden kann. Wenn aber $\lambda = -1$ ist, so ist (mit der Bezeichnung $f^{(j)}(+0) = a_j$)

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{s^{n+2k+j}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{s^{k-j-1}} \qquad (s > 0).$$

Auf der linken und rechten Seite gibt es keine zwei Exponenten von $1/s$, welche untereinander gleich wären, deshalb kann obige Beziehung für alle positiven Werte von s nur dann gelten, wenn alle a_j gleich Null sind. Das bedeutet, daß es für den Eigenwert $\lambda = 1$ keine anderen Lösungen von (8) gibt, nur solche, welche dem Raum $B_n{}^k$ angehören.

3. Wenn wir (8) für $k = 0$ betrachten, so bedeutet unser Ergebnis, daß die Eigenwerte der Hankel-Transformation 1 und -1 sind (was schon aus der Tatsache hervorgeht, daß die Hankel-Transformation involutorisch ist). Die zu ihnen gehörigen Eigenfunktionen haben die Gestalt

$$f(t) = \int_0^\infty J_n\left(2\sqrt{tx}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} g(x)\,dx \mp g(t) \qquad (g \in B_n{}^0).$$

4. Da die Hankel-Transformation involutorisch ist, folgt sofort aus (8)

$$\lambda f^{(k)}(t) + \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} f(x)\,dx = \int_0^\infty J_n(2\sqrt{tx}) \left(\frac{t}{x}\right)^{n/2} h(x)\,dx = g(x),$$

wobei jetzt g eine gegebene Funktion bedeutet, deren Hankel-Transformierte für alle $t > 0$ existiert. Diese Integrodifferentialgleichung ist mit (8) gleichwertig.[2])

---

[2]) Der Verfasser möchte auf diese Weise seine Dankbarkeit an den Herrn Referenten, dem er viele wertvolle Hinweise verdankt, zum Ausdruck bringen.

LITERATUR

[1] DITKIN, V. A., and A. P. PRUDNIKOV: Integral Transforms and Operational Calculus. New York: Pergamon Press 1965.

[2] MAGNUS, W., und F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1948.

[3] MEISTER, E.: Integraltransformationen mit Anwendungen auf Probleme der Mathematischen Physik. Frankfurt/M.—Bern—New York: Peter Lang Verlag 1983.

[4] PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D.: Right invertible operators and functional-differential equations with involutions. Demonstratio Math. 5 (1973), 165—177.

Manuskripteingang: 21. 03. 1985; in revidierter Fassung 19. 07. 1985

VERFASSER:

Prof. em. Dr. I. S. FENYÖ
Technische Universität
Mathematisches Institut der Elektrotechnischen Fakultät
H-1111 Budapest, Stoczek u. 2