Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (2) 1987, S. 175–182

Automorphismen auf Produkten Boolescher Algebren

P. Senf und D. A. Vladimirov

Es werden zwei verschiedene Produkte Boolescher Algebren untersucht. Das Boolesche Produkt ist verträglich mit der topologischen Interpretation der Booleschen Algebren, aber nur bedingt geeignet für die Theorie der Booleschen Algebren mit Maß, wofür das Produkt zweiter Art passend ist.

Рассматриваются два различных вида произведений булевых алгебр. Булево произведение согласовано с топологической интерпретации булевых алгебр, но не всегда подходит для теории булевых алгебр с мерой. Для нужд последней теории более подходящим является произведение второго рода.

Two different products of Boolean algebras are considered. The Boolean product is compatible with the topological interpretation of Boolean algebras but not always convenient for the theory of Boolean algebras with measure. The product of second kind is suitable for the aim of this theory.

In der Theorie der Booleschen Algebren betrachtet man verschiedene Produkte von Familien Boolescher Algebren. Das sogenannte Boolesche Produkt hat den Vorteil, daß es im Einklang mit der topologischen Interpretation einer Booleschen Algebra steht — es entspricht nämlich genau dem Produkt der Stone-Räume mit der Produkttopologie. Das Boolesche Produkt ist jedoch nur bedingt geeignet für die Belange der Theorie der Booleschen Algebren *mit Maß*, da dort vollständige und σ-vollständige Boolesche Algebren die wichtigsten sind und das Boolesche Produkt aus der Klasse der vollständigen Booleschen Algebren herausführt. Dies zeigen wir im § 1 und verallgemeinern somit einen Satz von J. Wada [4], der zeigte, daß für ein unendliches, extremal unzusammenhängendes Kompaktum Q der Raum $Q \times Q$ nicht extremal ist. Aus unserem Satz können wir Schlußfolgerungen über meßbare Zerlegungen extremal unzusammenhängender Kompakta ziehen. Im § 2 untersuchen wir Automorphismen und Gruppen von Automorphismen im Booleschen Produkt, insbesondere deren ergodische Eigenschaften. Im § 3 betrachten wir ein Produkt zweiter Art von Booleschen Algebren, welches für die Theorie der Booleschen Algebren mit Maß passend ist.

Wir benutzen sowohl die rein algebraische Sprache der Theorie der Booleschen Algebren als auch die topologische Interpretation derselben. In der Verwendung der Begriffe und Bezeichnungen halten wir uns durchweg an die Monographie [2].

§ 1. Das Boolesche Produkt

Es sei $\{X_t\}_{t \in T}$ eine beliebige Familie nicht-entarteter Boolescher Algebren, wobei die Indexmenge T eine beliebige Mächtigkeit haben kann. Unter dem *Booleschen Produkt* $X = \prod \{X_t : t \in T\}$ der Algebren X_t $(t \in T)$ versteht man jedes Paar

$(\{i_t\}_{t\in T}, X)$, wobei

a) X eine Boolesche Algebra ist

b) $i_t: X_t \to X$ ein Isomorphismus in X ist

c) das System der Unteralgebren $i_t(X_t) \subset X$ unabhängig ist

d) die Vereinigung aller Unteralgebren $i_t(X_t)$ die Algebra X erzeugt.

Die Bedingung der Unabhängigkeit c) bedeutet, daß für eine beliebige (endliche) Anzahl von Null verschiedener Elemente $x_{t_i} \in X_{t_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit verschiedenen Indizes $i_{t_1}(x_{t_1}) \wedge i_{t_2}(x_{t_2}) \wedge \cdots \wedge i_{t_n}(x_{t_n}) \neq 0$ gilt. Um die Bezeichnung nicht unnötig zu komplizieren, werden wir im weiteren die isomorphen Algebren X_t und $i_t(X_t)$ identifizieren, d. h., $\{X_t\}_{t\in T}$ betrachten wir als unabhängiges System von Unteralgebren von X.

Wir führen zunächst zwei Eigenschaften unabhängiger Systeme an, die unmittelbar aus der Definition der Unabhängigkeit folgen:

(i) Wenn $\{X_t\}_{t\in T}$ ein unabhängiges System von Unteralgebren ist, dann ist für jede nichtleere Teilmenge $T_0 \subset T$ auch das System $\{X_t\}_{t\in T_0}$ unabhängig.

(ii) Es seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ beliebige nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen von T. Wenn $\{X_t\}_{t\in T}$ ein unabhängiges System ist, dann ist auch das System der Algebren

$$\left\{\prod_{t\in T_1} X_t, \prod_{t\in T_2} X_t, \ldots, \prod_{t\in T_n} X_t\right\}$$

unabhängig.

Wir bemerken, daß die Definition des Booleschen Produktes im Einklang mit der topologischen Interpretation von Booleschen Algebren steht. Vermöge des Stone-Funktors wird nämlich das Boolesche Produkt gerade in das übliche topologische Produkt überführt: Es sei für jedes $t \in T$ der zur Booleschen Algebra X_t gehörige Stone-Raum mit $Q_t = Q_t(X_t)$ bezeichnet. Das ist ein total unzusammenhängender kompakter Raum mit der Eigenschaft, daß die Algebra X_t zur Algebra aller gleichzeitig abgeschlossenen und offenen Mengen in Q_t isomorph ist. Wenn $X = \prod \{X_t : t \in T\}$ ist, dann ist $Q = \prod \{Q_t : t \in T\}$, versehen mit der Produkttopologie, der Stone-Raum von X (vgl. [1]).

Theorem 1: *Eine unendliche vollständige Boolesche Algebra kann nicht Boolesches Produkt von unendlichen Algebren sein* (die Anzahl der Faktoren im Produkt ist unwesentlich, jedoch wenigstens 2).

Beweis: Zunächst betrachten wir eine endliche Indexmenge $T = \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \geq 2$. A contrario, es sei angenommen, daß unsere Algebra X Boolesches Produkt von $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ist. Wir zeigen, daß es dann eine Folge in X gibt, für die das Supremum nicht existiert. Wir wählen aus den m Unteralgebren zwei beliebige aus, z. B. X_1 und X_2. In X_1 und X_2 betrachten wir je eine beliebige Zerlegung der Eins:

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad x_i \in X_1, \quad x_i \neq 0, \quad x_i\, d\, x_j \ (i \neq j), \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} x_i = 1;$$

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad y_i \in X_2, \quad y_i \neq 0, \quad y_i\, d\, y_j \ (i \neq j), \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} y_i = 1.$$

Mit Hilfe dieser Zerlegungen konstruieren wir

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \wedge y_1 \\ z_2 &= x_1 \wedge y_1 + x_2 \wedge y_2 \\ &\vdots \\ z_n &= x_1 \wedge y_1 + x_2 \wedge y_2 + \cdots + x_n \wedge y_n, \end{aligned}$$

und zeigen, daß das Supremum $\vee\{z_n : n \in N\}$ in X nicht existiert. Angenommen es existiert: $\vee\{z_n : n \in N\} =: z \in X$. Dann hat z die Form

$$z = z^1 + z^2 + \cdots + z^s,$$

wobei

$$z^i = x_{1i} \wedge x_{2i} \wedge \cdots \wedge x_{mi}, \quad x_{ji} \in X_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, s)$$

ist. Aus der Darstellung von z als endliche Summe folgt, daß unendlich viele $x_{i_\nu} \wedge y_{i_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit einem gewissen z^k nicht disjunkt sind, genauer, es existieren ein Index k und eine Folge $\{i_\nu\}_\nu$, so daß $z^k \wedge (x_{i_\nu} \wedge y_{i_\nu}) \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist. Wir wählen zwei beliebige Indizes ν_1, ν_2 mit dieser Eigenschaft

$$z^k \wedge (x_{i_{\nu_1}} \wedge y_{i_{\nu_1}}) \neq 0 \quad \text{und} \quad z^k \wedge (x_{i_{\nu_2}} \wedge y_{i_{\nu_2}}) \neq 0.$$

Daraus folgt, daß $z^k \wedge x_{i_{\nu_1}} \neq 0$ ist, und aus der Darstellung von z^k erhalten wir $x_{1k} \wedge x_{i_{\nu_1}} \neq 0$. Analog überzeugen wir uns von der Richtigkeit der Relation $x_{2k} \wedge y_{i_{\nu_2}} \neq 0$. Wegen der Unabhängigkeit folgt aus den letzten beiden Relationen

$$(x_{1k} \wedge x_{i_{\nu_1}}) \wedge (x_{2k} \wedge y_{i_{\nu_2}}) = (x_{1k} \wedge x_{2k}) \wedge (x_{i_{\nu_1}} \wedge y_{i_{\nu_2}}) =: u \neq 0.$$

Wir setzen $z' = z - u$. Dann ist klar, daß $z' < z$ und außerdem u disjunkt zu allen z_n ist. In der Tat, es ist

$$[x_1 \wedge y_1 + x_2 \wedge y_2 + \cdots + x_n \wedge y_n] \wedge [(x_{1k} \wedge x_{2k}) \wedge (x_{i_{\nu_1}} \wedge y_{i_{\nu_2}})]$$
$$\leqq [x_1 \wedge y_1 + x_2 \wedge y_2 + \cdots + x_n \wedge y_n] \wedge (x_{i_{\nu_1}} \wedge y_{i_{\nu_2}}) = 0.$$

Hieraus folgt, daß z' obere Grenze für alle z_n ist. Das ist ein Widerspruch. Dieser Widerspruch beweist unser Theorem für den Fall einer endlichen Indexmenge.

Es sei jetzt T eine beliebige unendliche Indexmenge. Aus dem System der Unteralgebren wählen wir beliebig zwei aus: X_{t_1}, X_{t_2}. Mit ihnen gehen wir genauso vor wie eben: wir konstruieren eine Folge $\{z_n\}$ in X. Wenn wieder angenommen wird, daß $\vee\{z_n : n \in N\} =: z \in X$ existiert, dann läßt sich dieses z ebenfalls als endliche Summe disjunkter Elemente

$$z = z^1 + z^2 + \cdots + z^s,$$

schreiben, wobei

$$z^i = x_{t_1 i} \wedge \cdots \wedge x_{t_{k_i} i}, \quad x_{t_j i} \in X_{t_j} \quad (j = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, s)$$

ist. Alle anderen Überlegungen verlaufen völlig analog zum bereits betrachteten Fall. ∎

Aus dem Beweis folgt unmittelbar, daß auch eine σ-vollständige Boolesche Algebra nicht Boolesches Produkt sein kann.

Das folgende Theorem hat Bedeutung, wenn man Boolesche Algebren mit Maßfunktion betrachtet. Bevor wir es formulieren, erläutern wir einige Begriffe (vgl. [2, 3]). Es sei Q ein beliebiges total unzusammenhängendes Kompaktum, X die dazugehörige Boolesche Algebra und ξ eine beliebige Zerlegung von Q in abgeschlossene Mengen. Die Zerlegung ξ heißt *meßbar*, wenn es eine Teilalgebra $X_\xi \subset X$ derart gibt, daß die Elemente der Zerlegung gerade von der Beschaffenheit $\cap\{\tilde{x} : x \in X_\xi\}$ sind, wobei $\tilde{x}$ entweder gleich x oder gleich dem Komplement Cx ist. Betrachtet man die Gesamtheit aller Zerlegungen mit der Relation „feiner", so erhält man die teilweise geordnete Menge aller Zerlegungen von Q. Die Bezeichnung $\xi > \eta$ besagt, daß die Zerlegung ξ *feiner* als die Zerlegung η ist. Die feinste aller Zerlegungen, nämlich die Zerlegung von Q in seine Punkte, bezeichnen wir mit ν. $\xi \vee \eta$ bezeichnet das Supremum der Zerlegungen ξ und η, $\xi \wedge \eta$ ihr Infimum. Das Kompaktum Q wird *extremal* genannt, wenn in ihm die abgeschlossene Hülle einer beliebigen offenen Menge offen ist.

Theorem 2: *In einem unendlichen extremal unzusammenhängenden Kompaktum kann es keine zwei unabhängige, meßbare Zerlegungen ξ_1, ξ_2 geben, so daß der Durchschnitt beliebiger Elemente dieser zwei Zerlegungen aus genau einem Punkt besteht (mit anderen Worten: $\xi_1 \vee \xi_2 = \nu$).*

Beweis: Wir gehen vom Gegenteil aus. Angenommen, es existieren zwei solche Zerlegungen: $\xi_1 \vee \xi_2 = \nu$. Es sei X die Algebra aller gleichzeitig abgeschlossenen und offenen Mengen des Kompaktums Q und X_{ξ_i} diejenige Unteralgebra von X, welche die Zerlegung ξ_i $(i = 1, 2)$ erzeugt. Die Unteralgebren X_{ξ_1} und X_{ξ_2} sind unabhängig. Wir betrachten das Boolesche Produkt der beiden Unteralgebren $Z = X_{\xi_1} \times X_{\xi_2}$. Wir können annehmen, daß $Z \subset X$ ist. Der Stone-Raum für X_{ξ_i} ist $Q \mid \xi_i$ $(i = 1, 2)$. Folglich ist $Q \mid \xi_1 \times Q \mid \xi_2$ der Stone-Raum für Z. Andererseits gilt

$$Q \mid \xi_1 \times Q \mid \xi_2 = \{z_1 \cap z_2 : z_1 \in \xi_1, z_2 \in \xi_2\} = Q \mid (\xi_1 \vee \xi_2) = Q \mid \nu = Q.$$

Daraus folgt, daß die Algebra Z isomorph zur Algebra X und folglich Z vollständig ist. Dann folgt aus Theorem 1, daß die Darstellung $Z = X_{\xi_1} \times X_{\xi_2}$ als Boolesches Produkt unmöglich ist. Das zeigt, daß die Zerlegungen ξ_1, ξ_2 mit den entsprechenden Eigenschaften nicht existieren können ∎

In der Formulierung des Theorems 2 kann man das Wort „extremal" durch „quasi-extremal" ersetzen. Theorem 2 kann auch auf beliebig viele meßbare Zerlegungen verallgemeinert werden: Es kann keine Familie meßbarer Zerlegungen ξ_t $(t \in T)$ existieren, so daß $\bigvee \{\xi_t : t \in T\} = \nu$ und das System der Algebren $X_{\xi_t} (t \in T)$ unabhängig ist. Theorem 2 ist ein Grund, weshalb das Boolesche Produkt nicht immer geeignet ist, Boolesche Algebren mit Maßen zu betrachten. Wir kommen auf diese Problematik noch einmal zurück und werden im § 3 ein anderes Produkt betrachten, bei dem dieser Effekt nicht auftritt.

§ 2. Automorphismen auf Booleschen Produkten

In diesem Paragraphen untersuchen wir Fortsetzungs- und ergodische Eigenschaften von Automorphismen auf Booleschen Produkten.

Theorem 3: *Es sei $X = \prod \{X_t : t \in T\}$ und für jedes $t \in T$ ein Automorphismus $A_t \in \operatorname{Aut}(X_t)$ gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Automorphismus $A \in \operatorname{Aut}(X)$, der gemeinsame Fortsetzung aller A_t $(t \in T)$ ist.*

Beweis: Es ist bequem, in die topologische Sprache überzuwechseln. Dann gilt $Q = \prod \{Q_t : t \in T\}$ mit $Q_t = Q_t(X_t)$ und A_t wirkt als Homöomorphismus auf Q_t. Der gesuchte Homöomorphismus A des Kompaktums Q ist durch die Projektionen A_t eindeutig festgelegt: Wenn $q = \{q_t\}_{t \in T}$ ein Punkt im Produktraum Q ist, so sei $Aq = \{A_t q_t\}_{t \in T}$. Aus der Topologie her ist wohlbekannt, daß das so definierte A ein Homöomorphismus von Q ist ∎

Wenn für jede Algebra X_t eine Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_t \subset \operatorname{Aut}(X_t)$ gegeben ist, dann kann man auf jede Familie $\{A_t\}_{t \in T}$, $A_t \in \mathfrak{A}_t$, das Theorem 3 anwenden und man erhält eine wohlbestimmte Automorphismengruppe $\mathfrak{A} \subset \operatorname{Aut}(X)$, indem für zwei Elemente $A, B \in \mathfrak{A}$ Produkt und inverses Element komponentenweise angesetzt werden:

$$AB = \{A_t B_t\}_{t \in T} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \{A_t^{-1}\}_{t \in T}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{A}$ wird *volles direktes Produkt* der Gruppen $\mathfrak{A}_t$ $(t \in T)$ genannt.

Definition (vgl. [2: Kap. I, § 7]): Eine Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ einer Booleschen Algebra X heißt

(i) *schwach ergodisch*, wenn aus der Gleichung $Ax = x$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ folgt, daß entweder $x = 0$ oder $x = 1$ ist,

(ii) *ergodisch*, wenn für jedes von Null verschiedene Element $x \in X$ gilt, daß $\bigvee \{Ax : x \in \mathfrak{A}\} = 1$ ist,

(iii) *stark ergodisch*, wenn für jedes von Null verschiedene Element $x \in X$ endlich viele Automorphismen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ existieren, so daß $\bigvee \{A_i x : i = 1, 2, \ldots, n\} = 1$ ist.

Eine stark ergodische Automorphismengruppe ist stets ergodisch, und eine ergodische ist stets schwach ergodisch. Die umgekehrten Implikationen gelten im allgemeinen nicht. In einer vollständigen Booleschen Algebra sind die Begriffe „schwach ergodisch" und „ergodisch" gleichwertig.

Lemma 1: *Eine Automorphismengruppe $\mathfrak{A} \subset \operatorname{Aut}(X)$ ist genau dann ergodisch, wenn zu beliebigen zwei von Null verschiedenen Elementen $x, y \in X$ ein Automorphismus $A \in \mathfrak{A}$ existiert, so daß $Ax \wedge y > 0$ ist.*

Der Beweis dieses Lemmas folgt leicht aus [2: Lemma 10/Kap. I, § 4] ∎

Zwischen den Automorphismen einer Booleschen Algebra X und den Homöomorphismen des Stone-Raumes Q dieser Algebra besteht eine eineindeutige Korrespondenz. Wir bezeichnen deshalb einen Automorphismus und den entsprechenden Homöomorphismus mit ein und demselben Symbol. Das hatten wir bereits im Beweis des Theorems 3 benützt.

Lemma 2: *Eine Automorphismengruppe $\mathfrak{A} \subset \operatorname{Aut}(X)$ ist stark ergodisch dann und nur dann, wenn für jeden Punkt $q \in Q$ die Trajektorie $\mathfrak{A}(q)$ dicht in Q liegt.*

Beweis: Angenommen, für jeden Punkt $q \in Q$ liegt die Trajektorie $\mathfrak{A}(q) = \{Aq\}_{A \in \mathfrak{A}}$ dicht in Q. Betrachten wir eine beliebige gleichzeitig abgeschlossene und offene Teilmenge $x \subset Q$, $x \neq \emptyset$, so gilt $\mathfrak{A}(q) \cap x \neq \emptyset$. Falls aber $A_1 x \cup A_2 x \cup \cdots \cup A_n x \subsetneqq Q$ ist für alle endlichen Mengen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, dann findet sich ein Punkt $q_0 \in Q$ derart, daß $q_0 \notin A_1 x \cup A_2 x \cup \cdots \cup A_n x$ für alle $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ist. Folglich gilt $q_0 \notin Ax$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}(q_0) \cap x = \emptyset$, was unmöglich ist.

Umgekehrt, wenn $\mathfrak{A}$ als stark ergodische Gruppe wirkt, dann existieren für jede gleichzeitig abgeschlossene und offene Teilmenge $x \subset Q$, $x \neq \emptyset$, solche Automorphismen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, daß $A_1 x \cup A_2 x \cup \cdots \cup A_n x = Q$ ist. Folglich gilt für ein gewisses $i = 1, 2, \ldots, n$ die Relation $\mathfrak{A}(q) \cap A_i x \neq \emptyset$. Da aber die Trajektorie eine bezüglich $\mathfrak{A}$ invariante Menge ist, gilt auch $\mathfrak{A}(q) \cap x \neq \emptyset$ ∎

Theorem 4: *Wenn für jedes $t \in T$ die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_t \subset \operatorname{Aut}(X_t)$ ergodisch ist, dann ist deren volles direktes Produkt $\mathfrak{A} \subset \operatorname{Aut}(X)$ ebenfalls ergodisch.*

Beweis: Wir nehmen zwei von Null verschiedene beliebige Elemente $x, y \in X$ und zeigen, daß ein Automorphismus $A \in \mathfrak{A}$ existiert, so daß $Ax \wedge y > 0$ ist. Die Elemente x, y können wir in der Form

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{und} \quad y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

schreiben. Für das Bestehen der Ungleichung

$$Ax \wedge y = (Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_n) \wedge (y_1 + y_2 + \cdots + y_m) > 0$$

ist hinreichend, daß $Ax_1 \wedge y_1 > 0$ gilt. Deshalb können wir gleich $x = x_1$, $y = y_1$ setzen und die Elemente x, y haben die Form

$$x = x_{t_1} \wedge x_{t_2} \wedge \cdots \wedge x_{t_n} \quad \text{und} \quad y = y_{t_1'} \wedge y_{t_2'} \wedge \cdots \wedge y_{t_m'},$$

wobei $x_{t_i} \in X_{t_i}$ und $y_{t_j'} \in X_{t_j'}$ ist und außerdem alle t_i und alle t_j' paarweise verschieden sind. Jedoch können einige der t_i mit einigen der t_j' zusammenfallen. Wir setzen gleich $t_1 = t_1', t_2 = t_2', \ldots, t_r = t_r'$, andernfalls ändern wir die Bezeichnung. Aber $r = 0$ ist nicht ausgeschlossen. Die restlichen Indizes

$$t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_n, \qquad t'_{r+1}, t'_{r+2}, \ldots, t_m'$$

sind paarweise verschieden. Wir setzen

$$T_1 = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}, \qquad T_2 = \{t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_n\}, \qquad T_3 = \{t'_{r+1}, t'_{r+2}, \ldots, t_m'\}$$

und $X_i = \prod \{X_t : t \in T_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Dann gilt

$$u := x_{t_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{t_n} \in X_2 \quad \text{und} \quad v := y_{t'_{r+1}} \wedge \cdots \wedge y_{t_m'} \in X_3.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Unteralgebren haben wir $u \wedge v \neq 0$. Nach Voraussetzung ist jede Gruppe $\mathfrak{A}_t$ ergodisch, also existiert für jedes $i = 1, 2, \ldots, r$ ein Automorphismus A_{t_i}, so daß $z_i := A_{t_i} x_{t_i} \wedge y_{t_i} > 0$ und $z_i \in X_{t_i}$ gilt. Wiederum wegen der Unabhängigkeit gilt ferner $z := z_1 \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_r \neq 0$. Außerdem ist klar, daß $z \in X_1$ ist. Wenn wir noch einmal die Unabhängigkeit benutzen, so erhalten wir $z \wedge u \wedge v \neq 0$.

Auf Grund von Theorem 1 können wir den Automorphismus

$$B = \{B_t\}_{t \in T} \quad \text{mit} \quad B_{t_i} = A_{t_i} \quad (i = 1, \ldots, r) \quad \text{und} \quad B_t = E_t \quad (t \neq t_i)$$

betrachten (E_t ist die Eins der Gruppe $\mathfrak{A}_t$) und erhalten

$$\begin{aligned} z \wedge u \wedge v &= \bigwedge_{i=1}^{r} (A_{t_i} x_{t_i} \wedge y_{t_i}) \wedge \bigwedge_{i=r+1}^{n} x_{t_i} \wedge \bigwedge_{i=r+1}^{m} y_{t_i'} \\ &= (B_{t_1} x_{t_1} \wedge B_{t_2} x_{t_2} \wedge \cdots \wedge B_{t_n} x_{t_n}) \wedge (y_{t_1'} \wedge y_{t_2'} \wedge \cdots \wedge y_{t_m'}) \\ &= Bx \wedge y > 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Theorem 5: *Wenn für jedes $t \in T$ die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_t \subset \mathrm{Aut}\,(X_t)$ stark ergodisch ist, dann ist ihr volles direktes Produkt $\mathfrak{A} \subset \mathrm{Aut}\,(X)$ ebenfalls stark ergodisch.*

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen Punkt $q \in Q$ und überzeugen uns davon, daß die Trajektorie $\mathfrak{A}(q)$ dicht in Q liegt. Die Trajektorie $\mathfrak{A}(q)$ ist aber nichts anderes als das Produkt $\mathfrak{A}(q) = \prod \{\mathfrak{A}_t(q_t) : t \in T\}$ der Trajektorien $\mathfrak{A}_t(q_t)$, $t \in T$. Da nach Voraussetzung jede Gruppe stark ergodisch ist, ist jede dieser Trajektorien $\mathfrak{A}_t(q_t)$ dicht in Q_t, $t \in T$. Aus der Topologie ist bekannt, daß dann auch ihr Produkt $\mathfrak{A}(q)$ dicht in Q liegt $\blacksquare$

Beispiel: Es sei α eine beliebige Kardinalzahl und $\mathfrak{F}_\alpha$ die freie Boolesche Algebra mit α freien Erzeugenden (vgl. [1]). Die Automorphismengruppe Aut $(\mathfrak{F}_\alpha)$ ist stark ergodisch. Der Stone-Raum der Booleschen Algebra $\mathfrak{F}_\alpha$ ist nämlich das verallgemeinerte Cantorsche Diskontinuum $\mathfrak{D}^\alpha$ vom Gewicht α, und die Gruppe Aut $(\mathfrak{F}_\alpha)$ kann mit dem vollen direkten Produkt der Transformationsgruppe $\mathfrak{A}_t$ $(t \in T$, card $T = \alpha)$ der Zweipunktmenge $\{0, 1\}$ identifiziert werden. Wir vermerken noch, daß die Gruppe Aut $(\mathfrak{F}_\alpha)$ abelsch und kompakt ist.

§ 3. Produkte zweiter Art

Wir hatten bereits erwähnt, daß das Boolesche Produkt für die Theorie der Booleschen Algebren mit Maßen nicht immer geeignet ist. Deshalb wurde in [2: Kap. VII, § 1] ein modifiziertes Produkt eingeführt, welches wir hier Produkt zweiter Art nennen wollen.

Definition: Es sei X eine beliebige vollständige Boolesche Algebra und $\{X_t\}_{t\in T}$ eine Schar von Unteralgebren von X. Wir sagen, daß X *Produkt zweiter Art* dieser Schar ist, wenn

(i) das System der Unteralgebren X_t ($t \in T$) unabhängig ist und
(ii) die regulär eingebettete Unteralgebra von X, welche von der Vereinigung $\bigcup \{X_t : t \in T\}$ erzeugt wird, mit X zusammenfällt.

Wir erinnern daran, daß eine Unteralgebra X_1 der vollständigen Booleschen Algebra X *regulär eingebettet* genannt wird, wenn für jede nichtleere Teilmenge $E \subset X_1$ die in der Algebra X berechnete obere Grenze zu X_1 gehört (vgl. [2: Kap. III, § 1]). Dies ist zu unterscheiden von einer *regulären Unteralgebra* $X_0 \subset X$, was bedeutet, daß die in X_0 berechnete obere Grenze stets mit der in X berechneten oberen Grenze zusammenfällt (vgl. [1]). Schließlich gibt es *reguläre Boolesche Algebren*. Das sind vollständige Boolesche Algebren von abzählbarem Typ, in denen das Diagonalprinzip gilt (vgl. [2: Kap. VI, § 4]).

Problem: Es sei für jedes $t \in T$ ein Automorphismus $A_t \in \mathrm{Aut}\,(X_t)$ gegeben. Wann existiert eine gemeinsame Fortsetzung A dieser Automorphismen auf das Produkt zweiter Art der Schar $\{X_t\}_{t\in T}$?

Theorem 6: *Die reguläre Boolesche Algebra X sei Produkt zweiter Art der Schar $\{X_t\}_{t\in T}$ und $A_t \in \mathrm{Aut}\,(X_t)$, $t \in T$. Wenn das Boolesche Produkt $\prod \{X_t : t \in T\} =: X_0$ eine reguläre Unteralgebra von X ist, dann existiert eine gemeinsame Fortsetzung A aller Automorphismen A_t, $t \in T$.*

Beweis: Nach Theorem 3 existiert ein eindeutig bestimmter Automorphismus $A_0 \in \mathrm{Aut}\,(X_0)$, der die Automorphismen A_t fortsetzt. Wir haben zu zeigen, daß man diesen Automorphismus A_0 zu einen Automorphismus A der gesamten Algebra X fortsetzen kann. Dafür ist hinreichend, A_0 und A_0^{-1} zu stetigen Homomorphismen der Algebra X fortzusetzen. Auf Grund der Fortsetzungskriterien in [2: Kap. IV, § 3 und Kap. VI, § 5] ist in unserem Fall hinreichend, daß gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \quad x = \bigvee_{i=1}^{\infty} x_i, \qquad x, x_i \in X_0 \\ \text{impliziert} \\ \quad A_0 x = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_0 x_i \quad \text{und} \quad A_0^{-1} x = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_0^{-1} x_i . \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß das Supremum in X berechnet wird. Für Suprema in X_0 ist die Beziehung (1) erfüllt, da A_0 ein Automorphismus ist. Weil X_0 eine reguläre Unteralgebra ist, gilt (1) auch für Suprema in X ∎

LITERATUR

[1] SIKORSKI, R.: Boolean Algebras. Berlin: Springer-Verlag 1964.
[2] Владимиров, Д. А.: Булевы алгебры. Москва: Изд-во Наука 1969 (dt. Übers.: VLADIMIROV, D. A.: Boolesche Algebren. Berlin: Akademie-Verlag 1972).
[3] Владимиров, Д. А., и П. Зенф: Разбиения вполне несвязных бикомпактов. Z. Anal. Anw. 2 (1983), 281–286.
[4] WADA, J.: Stonian spaces and the second conjugate spaces of AM spaces. Osaka Math. J. 9 (1957), 195–200.

Manuskripteingang: 21. 12. 1984; in revidierter Fassung 22. 08. 1985

VERFASSER:

Dr. PETER SENF
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz

Д-р Денис Артемьевич Владимиров
Математико-механический факультет Ленинградского Государственного Университета им. А. А. Жданова
СССР-Ленинград, Университетская наб. 7/9