Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (3) 1987, S. 209–223

Globale Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen für ein Gleichungssystem, das den Ladungstransport in einem Halbleiter beschreibt

J. Heinrich

Es wird die globale Existenz starker Lösungen für ein Differentialgleichungssystem gezeigt, das in der Halbleitertechnik eine wichtige Rolle spielt und für das bisher nur die Existenz schwacher Lösungen bekannt war. Der Nachweis erfolgt unter Ausnutzung verschiedener Einbettungssätze sowie des Banachschen Fixpunktsatzes zunächst für ein "kleines" Zeitintervall und wird dann auf ein beliebiges Zeitintervall übertragen. Schließlich werden weitere Glattheitseigenschaften der Lösung unter geeigneten Voraussetzungen bezüglich der Anfangs- und Randwerte diskutiert.

Доказывается глобальное существование сильных решений для системы дифференциальных уравнений, играющей важную роль в технике полупроводников и для которой до сих пор было известно лишь существование слабых решений. Доказательство проводится сначала для „малого" интервала времени на основе теорем вложения и теоремы Банаха о неподвижной точке и потом распространяется на любой интервал времени. Наконец доказываются дополнительные свойства гладкости решения при соответствующих предположениях о начальных и краевых условиях.

Global existence of strong solutions is shown for a system of differential equations describing carrier transport in semiconductors which up to now has only been known to have weak solutions. At first the proof of existence is carried out for a "small" interval of the time-axis with the help of several imbedding theorems and Banach's fixed point theorem and then is extended to an arbitrary interval. At last further smoothness properties of the solution are discussed under spezial conditions for initial and boundary values.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit einem Differentialgleichungssystem, das die innere Elektronik von Halbleiterbauelementen beschreibt. Auf den physikalischen Hintergrund der im ersten Abschnitt formulierten Aufgabenstellung sowie auf die physikalische Bedeutung der vorkommenden Größen gehen wir bewußt nicht ein, da dazu in der einschlägigen Literatur umfangreiche Ausführungen zu finden sind. Wir verweisen auf [2: Abschnitte 1 und 7.5] sowie auf die zitierte Literatur.

Trotz der großen praktischen Bedeutung der Aufgabenstellung hat eine intensive mathematische Untersuchung des hier zur Diskussion stehenden Differentialgleichungssystems erst in jüngster Zeit eingesetzt. Erste Ergebnisse stammen von Mock [7, 8], der die Existenz lokaler Lösungen unter sehr starken Voraussetzungen an die auftretenden Nichtlinearitäten zeigte. Nassif und Malla [9] behandelten eine verwandte Aufgabenstellung. Einen Weg, die für Gleichungen der hier betrachteten Art erheblich schwierigere Frage nach der Existenz globaler Lösungen zu beantworten, zeigte Gajewski [3] auf. Mit Hilfe einer recht komplizierten, der Aufgabe angepaßten Ljapunow-Funktion konnte er, ausgehend von der zuvor gezeigten lokalen Lösbarkeit, die globale Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen (u, n, p) nachweisen (d. h. die Funktionen n und p liegen im Raum $L_2((0, T); W^{1,2}(G)) \cap W^{1,2}((0, T); W^{-1,2}(G))$).

Unter stärkeren Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten als in [3], die in den praktisch interessierenden Fällen aber als erfüllt angesehen werden können, zeigen wir in dieser Arbeit die globale Existenz starker Lösungen, d. h. n und p liegen in dem z. B. auch in [5] verwendeten und für parabolische Gleichungen mit divergenzfreiem Hauptteil „natürlichen" Raum $W_2^{2,1}(Q_T)$. Wir lösen die Aufgabe zunächst unter recht starken Voraussetzungen an die Rekombinationsrate R. Mit Hilfe des dafür erzielten Ergebnisses sowie einer in [3] bewiesenen Aussage schwächen wir dann die Voraussetzungen an R so ab, daß die im praktischen Fall besonders interessierende Shockley/Read-Form für R (vgl. etwa [2: S. 13]) erfaßt wird. Die dazu von Gajewski [3] durchgeführte Überlegung wird als bekannt vorausgesetzt. Unser Existenznachweis erfolgt zunächst für ein „kleines" Zeitintervall, dessen Länge in bestimmter Weise von den vorgegebenen Anfangs- und Randwerten abhängt. Mit Hilfe der von Gajewski [3] gezeigten Existenz globaler schwacher Lösungen gewinnen wir daraus die Existenz globaler starker Lösungen. Der Existenzbeweis (für „kleines" Zeitintervall) benutzt in wesentlichem Maße den Banachschen Fixpunktsatz und kann daher im weitesten Sinne als konstruktiv angesehen werden. Die sich aus dieser, für den Aufgabentyp durchaus naheliegenden Herangehensweise ableitende sukzessive Approximation entspricht weitgehend dem in [2: S. 144 f.] beschriebenen Schema. Die Frage, inwieweit dieses Verfahren zur praktischen (d. h. numerischen) Bestimmung der Lösung brauchbar ist, wird in dieser Arbeit nicht berührt und muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Wir haben uns jedoch bemüht, die in den Abschätzungen auftretenden Konstanten möglichst genau anzugeben, da dies für eine praktische Anwendung des aus dem Banachschen Fixpunktsatz resultierenden Iterationsverfahrens, etwa für die Festlegung der Intervallänge, wichtig ist.
Um die Arbeit auch für den Nichtfachmann leicht verständlich zu machen, haben wir die verwendeten Einbettungssätze und Existenzaussagen für lineare elliptische und parabolische Gleichungen im zweiten Abschnitt zusammengestellt.

Da wir mit der vorliegenden Arbeit vor allem einen Beitrag zur mathematischen Untersuchung einer ganz konkreten, aus der Physik stammenden Aufgabe leisten wollen, haben wir nicht die allgemeinste Situation betrachtet, die mit der verwendeten Technik noch behandelt werden kann. So ist es z. B. ohne größere Schwierigkeiten möglich, $-\Delta u$ und $\partial q/\partial t - \alpha\, \Delta q$ ($q \in \{n, p\}$) durch allgemeinere Differentialausdrücke zu ersetzen und für u allgemeinere Randbedingungen zu stellen. Dagegen ist für die benutzte Beweistechnik wesentlich, daß Dirichlet-Randbedingungen für n und p vorliegen.

1. Aufgabenstellung

Sei $G \subseteq \mathbf{R}^r$ die Abschließung eines beschränkten Gebietes. Wir setzen $r \leqq 3$ und $\partial G \in C^2$ voraus. Wir benutzen die Bezeichnungen $Q_T = G \times [0, T]$ und $S_T = (\partial G) \times [0, T]$. Seien $C(G)$, $L_p(G)$, $W^{m,p}(G)$ und $L_p(Q_T)$ die wie üblich definierten Räume mit den Normen $\|\cdot\|_{C,G}$, $\|\cdot\|_{p,G}$, $\|\cdot\|_G^{m,p}$ und $\|\cdot\|_{p,Q_T}$. Ist X ein Banach-Raum, so sei X^* der zugehörige duale Raum. Mit $W_p^{2,1}(Q_T)$ bezeichnen wir den Raum aller meßbaren Funktionen $n: Q_T \to \mathbf{R}$, die die verallgemeinerten Ableitungen $\partial n/\partial t$, $\partial n/\partial x_i$ und $\partial^2 n/\partial x_i\, \partial x_j$ ($1 \leqq i, j \leqq r$) besitzen und für die

$$\|n\|_{p,Q_T}^{2,1} := \max_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 n}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\|_{p,Q_T} + \max_i \left\|\frac{\partial n}{\partial x_i}\right\|_{p,Q_T} + \|n\|_{p,Q_T} + \left\|\frac{\partial n}{\partial t}\right\|_{p,Q_T} < \infty$$

gilt (s. auch [6: S. 14]). Mit $|\cdot|$ bezeichnen wir die Euklidische Norm im $\mathbf{R}^k$. Es sei stets $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbf{R}^r$, $x = (x_1, \ldots, x_r) \in G$ und $t \in [0, T]$. Ist $y \in \mathbf{R}$, so sei $y^+ = \max\{0, y\}$ und $y^- = \min\{0, y\}$.

Wir formulieren nun die betrachtete Aufgabe:

(LH) Gesucht sind Funktionen $u \in L_\infty\big((0,T);\, W^{2,2}(G)\big)$ sowie $n, p \in W_2^{2,1}(Q_T)$, so daß gilt:

(LH1) Für f.a. $t \in (0, T)$ ist $-\Delta u = \alpha_1(N + p - n)$.

(LH2) $\dfrac{\partial}{\partial t} n - \alpha_2 \Delta n = \operatorname{div}\big(\mu_n(\nabla u, x)\, n\, \nabla u\big) - R(n, p)$.

(LH3) $\dfrac{\partial}{\partial t} p - \alpha_3\, \Delta p = \operatorname{div}\big(\mu_p(\nabla u, x)\, p\, \nabla u\big) - R(n, p)$.

(LH4) $u|_{S_T} = u_0|_{S_T}$.

(LH5) $n|_{G \cup S_T} = n_0|_{G \cup S_T}$ und $p|_{G \cup S_T} = p_0|_{G \cup S_T}$.

Wir nehmen dabei die Existenz einer Konstanten $c_1 > 0$ und einer Funktion $g \in L_4(G)$ an, so daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(V1) Für $\mu \in \{\mu_n, \mu_p\}$ und $1 \leqq i, j \leqq r$ besitze s_i gemäß $s_i(\xi, x) := \xi_i \mu(\xi, x)$ die verallgemeinerte Ableitung $\partial s_i / \partial \xi_j =: \beta_{ij}$. Für alle i besitze μ die verallgemeinerte Ableitung $\partial \mu / \partial x_i$. Dabei gelte für alle $x \in G$ und $\xi, \psi \in \mathbf{R}^r$:

(V11) $|\beta_{ij}(\xi, x)| \leqq c_1$,

(V12) $|\beta_{ij}(\xi, x) - \beta_{ij}(\psi, x)| \leqq c_1\, |\xi - \psi|$,

(V13) $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mu(\xi, x) - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mu(\psi, x)\right| \leqq c_1\, |\xi - \psi|$,

(V14) $|\mu(\xi, x)| \leqq c_1$,

(V15) $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mu(\xi, x)\right| \leqq g(x)$.

(V2) Für alle $n, p, n_1, p_1 \in \mathbf{R}$ seien folgende Ungleichungen erfüllt:

(V21) $|R(n, p)| \leqq c_1(|n| + |p| + 1)$,

(V22) $|R(n, p) - R(n, p_1)| \leqq c_1\, |p - p_1|$,

(V23) $|R(n, p) - R(n_1, p)| \leqq c_1\, |n - n_1|$.

(V3) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ und $N \in L_6(G)$.

(V4) $u_0 \in L_\infty\big((0, T);\, W^{2,6}(G)\big)$ und $n_0, p_0 \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Die Voraussetzung (V2) werden wir weiter unten durch folgende ersetzen:

(V2') Die Funktion $R^+(n, p) := R(n^+, p^+)$ erfülle (V2). Weiter sei $R(n^+, p^+)\, n^- \geqq 0$ und $R(n^+, p^+)\, p^- \geqq 0$ für alle $n, p \in \mathbf{R}$.

Um mit (V2') arbeiten zu können, wird es sich als nötig erweisen, an Stelle von (V4) die Voraussetzung

(V4') $u_0 \in L_\infty\big((0, T);\, W^{2,6}(G)\big)$ und $0 \leqq n_0, p_0 \in W_2^{2,1}(Q_T)$

zu fordern. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden wir unter noch etwas stärkeren Voraussetzungen an u_0, n_0, p_0 und N auch stärkere als die oben formulierten Glattheitseigenschaften der Lösung nachweisen.

Bemerkung 1: Es läßt sich ohne Schwierigkeit nachrechnen, daß für die im praktischen Fall auftretende Funktion $\mu(\xi, x) = f(x)\,(1 + |\xi|^2)^{-1/2}$ die Voraussetzung (V1) erfüllt ist, wenn $f \in W^{1,\infty}(G)$ gilt.

2. Einige Vorbemerkungen

Wir stellen in diesem Abschnitt die verwendeten Existenz- und Einbettungsaussagen sowie einige einfache Abschätzungen zusammen. Wir weisen darauf hin, daß verschiedene der hier angegebenen Aussagen an die Voraussetzung $r \leqq 3$ gebunden sind und für größeres r im allgemeinen nicht gültig sind.

Bemerkung 2: a) Sei $1 < p < \infty$ und $f \in L_p(G)$. Dann gibt es genau ein $u \in W_0^{1,p}(G) \cap W^{2,p}(G)$ mit $-\Delta u = f$. Dabei gilt $\|u\|_G^{2,p} \leqq c_2 \|f\|_{p,G}$ mit einer Konstanten $c_2 > 0$. Ist $f \in W^{1,p}(G)$, so ist $u \in W^{3,p}(G)$ und es gilt $\|u\|_G^{3,p} \leqq c_2 \|f\|_G^{1,p}$. (Vgl. [10: Th. 9.14].)

b) Ist $f \in (W_0^{1,q}(G))^* =: W^{-1,p}(G)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so gibt es genau ein $u \in W_0^{1,p}(G)$ mit $-\Delta u = f$, d. h. mit

$$\int_G \nabla u \,\nabla v \,dx = f(v) \quad \text{für jedes } v \in W_0^{1,q}(G).$$

Dabei gilt $\|u\|_G^{1,p} \leqq c_2 \|f\|_G^{-1,p}$. (Vgl. [10: Th. 4.6].)

Bemerkung 3: a) Sei $f \in L_p(Q_T)$ $(1 < p < \infty)$ und $\alpha \in \{\alpha_2, \alpha_3\}$. Dann gibt es genau ein $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ mit $\partial u/\partial t - \alpha \Delta u = f$ und $u|_{G \cup S_T} = 0$. Dabei ist $\|u\|_{p,Q_T}^{2,1} \leqq c_2 \|f\|_{p,Q_T}$ mit von T unabhängigem c_2. (Vgl. [6: Kap. IV/Th. 9.1].) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $c_2 \geqq 1$ voraus.

b) Ist $f \in L_p((0, T); W^{-1,p}(G))$, so gibt es genau ein

$$u \in W^{1,p}((0, T); W^{-1,p}(G)) \cap L_p((0, T); W^{1,p}(G))$$

mit $u|_{G \cup S_T} = 0$ und $\partial u/\partial t - \alpha \Delta u = f$.

Bemerkung 4 (Die folgenden Einbettungsaussagen findet man z. B. in [1: Kap. V]): a) Es gilt $W^{1,2}(G) \subseteqq L_6(G)$ mit $\|u\|_{6,G} \leqq c_3 \|u\|_G^{1,2}$. (Wir benutzen auch die schwächere Beziehung $\|u\|_{4,G} \leqq c_3 \|u\|_G^{1,2}$.)

b) Es gilt $W^{2,2}(G) \subseteqq C(G)$ mit $\|u\|_{C,G} \leqq c_3 \|u\|_G^{2,2}$ und $W^{1,10/3}(G) \subseteqq C(G)$ mit $\|u\|_{C,G} \leqq c_3 \|u\|_G^{1,10/3}$.

Bemerkung 5 (Die folgenden Aussagen sind Spezialfälle von [6: Kap. II/Lemma 3.3]): a) Sei $1 < p < \infty$ und $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$. Dann ist $\partial u/\partial x_i \in L_q(Q_T)$ für jedes $q \leqq 5p(5-p)^{-1}$ und es gilt $\|\partial u/\partial x_i\|_{q,Q_T} \leqq c_3 \|u\|_{p,Q_T}^{2,1}$ mit einer von T unabhängigen Konstanten c_3. (Ist $p \geqq 5$, so kann $q = +\infty$ gewählt werden.)

b) Aus $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ folgt $u \in L_q(Q_T)$ für jedes $q \leqq 5p(5-2p)^{-1}$.

Lemma 1: *Sei $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u|_G = 0$. Dann ist* $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{2,G} \leqq T^{1/2} \|u\|_{2,Q_T}^{2,1}$.

Beweis: Für fixiertes t schätzen wir ab:

$$\|u(\cdot, t)\|_{2,G} = \int_G \left| \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, d\tau \right|^2 dx \leqq \int_G \left(\int_0^t \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 d\tau \right) \left(\int_0^t d\tau \right) dx$$

$$\leqq t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{2,Q_t}^2 \leqq T(\|u\|_{2,Q_T}^{2,1})^2 \quad \blacksquare$$

Lemma 2: *Sei $\Omega \subseteqq \mathbf{R}^r$ beschränkt und $G \subseteqq \Omega$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F\colon W_2^{2,1}(G \times (0, T)) \to W_2^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\operatorname{supp} Fu \subseteqq \Omega \times (0, T)$,
2. $\|Fu\|_{2,\Omega \times (0,T)}^{2,1} \leqq c\, \|u\|_{2,G \times (0,T)}^{2,1}$.

Dabei ist c von T unabhängig.

Beweis: Nach [1: Abschnitt IV.3] existiert ein starker 2-Fortsetzungsoperator $E: W^{2,2}(G) \to W^{2,2}(\Omega)$, d. h. E ist linear und es gelten die Ungleichungen

$$\|Eu\|_\Omega^{2,2} \leqq c\,\|u\|_G^{2,2},\ \|Eu\|_\Omega^{1,2} \leqq c\,\|u\|_G^{1,2},\ \|Eu\|_{2,\Omega} \leqq c\,\|u\|_{2,G}.$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi|_G \equiv 1$ und $E_1: W^{2,2}(G) \to W^{2,2}(\Omega)$ gemäß $E_1u := \varphi Eu$. Dann ist E_1 ein starker 2-Fortsetzungsoperator mit $\operatorname{supp} E_1u \subseteqq \Omega$. Für $u \in W_2^{2,1}\big(G \times (0,T)\big)$ sei

$$Fu \in W_2^{2,1}\big(\Omega \times (0,T)\big) \text{ gemäß } (Fu)\,(x,t) := \big(E_1u(\cdot,t)\big)\,(x).$$

Es folgt

$$\left\|\frac{\partial Fu}{\partial t}\right\|_{2,\Omega} \leqq c\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{2,G}, \text{ also } \|Fu\|_{2,\Omega\times(0,T)}^{2,1} \leqq c\,\|u\|_{2,G\times(0,T)}^{2,1} \quad \blacksquare$$

Lemma 3: *Es gibt ein $c_4 > 0$, so daß für alle $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ gilt*

$$\left(\int_0^T \big(\|u(\cdot,t)\|_G^{1,2}\big)^4\,dt\right)^{1/4} \leqq c_4(T^{1/4}+1)\left(\|u\|_{2,Q_T}^{2,1} + \sup_{0\leqq t\leqq T}\|u(\cdot,t)\|_{2,G}\right).$$

Beweis: a) Sei E_1 wie im Beweis von Lemma 2 erklärt. Zunächst ist

$$\left(\int_0^T \big(\|u(\cdot,t)\|_G^{1,2}\big)^4\,dt\right)^{1/4} \leqq \left(\int_0^T \big(\|E_1u\|_\Omega^{1,2}\big)^4\,dt\right)^{1/4}.$$

Wir schätzen ab:

$$\left(\int_0^T \big(\|E_1u\|_{2,\Omega}\big)^4\,dt\right)^{1/4} \leqq T^{1/4}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|E_1u\|_{2,\Omega} \leqq T^{1/4}\,c\sup_{0\leqq t\leqq T}\|u\|_{2,G}.$$

b) Für $v \in W_2^{2,1}\big(\Omega\times(0,T)\big)$ mit $v|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$ ist

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dx\right)^2dt &= \int_0^T\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right)v\,dx\right)^2dt\\ &\leqq \int_0^T\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right)^2dx\right)\left(\int_\Omega v^2\,dx\right)dt\\ &\leqq \Big(\sup_{0\leqq t\leqq T}\|v\|_{2,\Omega}\Big)^2\big(\|v\|_{2,\Omega\times(0,T)}^{2,1}\big)^2\\ &\leqq c\left(\|v\|_{2,G\times(0,T)}^{2,1} + \sup_{0\leqq t\leqq T}\|v\|_{2,G}\right)^4.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial E_1u}{\partial x_i}\right)^2dx\right)^2dt &\leqq c\left(\|Fu\|_{2,\Omega\times(0,T)}^{2,1} + \sup_{0\leqq t\leqq T}\|E_1u\|_{2,\Omega}\right)^4\\ &\leqq c\left(\|u\|_{2,G\times(0,T)}^{2,1} + \sup_{0\leqq t\leqq T}\|u\|_{2,G}\right)^4 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 4: *Es gibt ein $c_4 > 0$, so daß für alle $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ mit $u|_{S_T} = 0$ gilt*

$$\left(\int_0^T \big(\|u(\cdot,t)\|_{C,G}\big)^2\,dt\right)^{1/2} \leqq c_4T^{1/5}\,\|u\|_{2,Q_T}^{2,1}.$$

Beweis: Nach Bemerkung 4b) ist

$$\int_0^T \left(\|u(\cdot,t)\|_{C,G}\right)^2 dt \leqq c_3^2 \int_0^T \left(\|u(\cdot,t)\|_G^{\hat{1},10/3}\right)^2 dt.$$

Weiter ist $\|u\|_{10/3,G} \leqq c \max \{\|\partial u/\partial x_i\|_{10/3,G} : i = 1, \ldots, r\}$. Mit Bemerkung 5 schätzen wir nun ab:

$$\int_0^T \left(\int_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{10/3} dx\right)^{6/10} dt \leqq \left(\int_0^T \int_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{10/3} dx\, dt\right)^{6/10} \left(\int_0^T dt\right)^{4/10}$$

$$\leqq \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{10/3,Q_T}\right)^2 \left((\text{mes } G)\ T\right)^{2/5}$$

$$\leqq c_3^2 (\|u\|_{2,Q_T}^{2,1})^2 \left((\text{mes } G)\ T\right)^{2/5} \ \blacksquare$$

3. Lokale Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen

Wir beschäftigen uns zunächst mit einigen vorbereitenden Abschätzungen.

Lemma 5: *Sei* $l \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $l|_{S_T} = 0$, $u \in L_\infty\big((0,T);\ W^{2,2}(G)\big)$ *und* μ *erfülle* (V1). *Dann ist* $\operatorname{div}\big(\mu(\nabla u, x)\, l\, \nabla u\big) \in L_2(Q_T)$ *mit*

$$\|\operatorname{div}(\mu(\nabla u, x)\, l\, \nabla u)\|_{2,Q_T} \leqq \gamma_1 T^{1/5} \Big(\sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|_G^{2,2}\Big) \|l\|_{2,Q_T}^{2,1}.$$

Dabei ist $\gamma_1 = \big(r c_1 c_3^2 (\text{mes } G)^{1/30} + c_1 c_4 r^2 + r c_3 c_4 \|g\|_{4,G}\big)$.

Beweis: Zunächst ist

$$\left\|\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu l \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,Q_T} \leqq \sum_i \left(c_1 \left\|\left(\frac{\partial l}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,Q_T} + c_1 \sum_j \left\| l \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\|_{2,Q_T} + \left\| l \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,Q_T}\right).$$

Wir werden nun weiter einzeln wie folgt abschätzen.

a) Mit Bemerkung 5a) und Bemerkung 4a) erhalten wir

$$\left\|\left(\frac{\partial l}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,Q_T} \leqq \left\|\frac{\partial l}{\partial x_i}\right\|_{10/3,Q_T} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{6,Q_T} \|1\|_{30,Q_T}$$

$$\leqq c_3 \|l\|_{2,Q_T}^{2,1} \left(\int_0^T \int_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^6 dx\, dt\right)^{1/6} \left((\text{mes } G)\ T\right)^{1/30}$$

$$\leqq c_3 \|l\|_{2,Q_T}^{2,1} \Big(c_3 T^{1/6} \sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|_G^{2,2}\Big) T^{1/30} (\text{mes } G)^{1/30}.$$

b) Aus Lemma 4 erhalten wir

$$\left\| l \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\|_{2,Q_T} = \left(\int_0^T \int_G \left| l \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\right|^2 dx\, dt\right)^{1/2} \leqq \left(\int_0^T \left(\|l(\cdot,t)\|_{C,G} \|u\|_G^{2,2}\right)^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq c_4 T^{1/5} \Big(\sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_G^{2,2}\Big) \|l\|_{2,Q_T}^{2,1}.$$

c) Mit Bemerkung 4b) und Lemma 4 erhalten wir

$$\left\| l \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,Q_T} = \left(\int_0^T \int_G \left| l \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|^2 dx\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq \left(\int_0^T \left(\|l(\cdot, t)\|_{C,G}\, \|g\|_{4,G} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u(\cdot, t)\right\|_{4,G}\right)^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq c_3 \|g\|_{4,G} \left(\int_0^T (\|l(\cdot, t)\|_{C,G} \|u(\cdot, t)\|_G^{2,2})^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$\leqq c_4 c_3 \|g\|_{4,G}\, T^{1/5} \left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u(\cdot, t)\|_G^{2,2}\right) \|l\|_{2,Q_T}^{2,1} \quad \blacksquare$$

Lemma 6: *Seien $l, u_1 \in W^{2,2}(G)$, $u_2 \in W^{2,6}(G)$ und μ erfülle* (V1). *Dann gilt*

$$\left\|\operatorname{div}\left(\mu(\nabla u_1, x)\, l\, \nabla u_1\right) - \operatorname{div}\left(\mu(\nabla u_2, x)\, l\, \nabla u_2\right)\right\|_{2,G}$$
$$\leqq c_5(\|l\|_G^{2,2} + \|l\|_G^{1,2}\, \|u_2\|_G^{2,6} + \|l\|_G^{2,2}\, \|u_2\|_G^{2,2})\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2}.$$

Dabei ist $c_5 = \max\{c_1 c_3 r^2 + r c_3 \|g\|_{4,G} + r^3 c_1 c_3^2,\ r^2 c_3^2 c_1,\ r c_3^3 c_1\}$.

Beweis: a) Zunächst ist

$$\left\|\operatorname{div}\left((\mu(\nabla u_1, x)\, l\, \nabla u_1) - \mu(\nabla u_2, x)\, l\, \nabla u_2\right)\right\|_{2,G}$$

$$= \left\|\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(l\left(\mu(\nabla u_1, x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right)\right\|_{2,G}$$

$$\leqq \left\|\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} l\right)\left(\mu(\nabla u_1, x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G}$$

$$+ \left\| l \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu(\nabla u_1, x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G}.$$

b) Den 2. Summanden aus a) schätzen wir wie folgt ab:

$$\left\| l \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu(\nabla u_1, x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G}$$

$$\leqq \sum_i \left\| l \left(\sum_j \beta_{ij}(\nabla u_1, x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\, \partial x_j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mu(\nabla u_1, x)\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_j \beta_{ij}(\nabla u_2, x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\, \partial x_j} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mu(\nabla u_2, x)\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G}$$

$$\leqq \sum_i \left(\sum_j \left(\left\| l\beta_{ij}(\nabla u_1, x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}(u_1 - u_2)\right)\right\|_{2,G}\right.\right.$$

$$\left. + \left\| l(\beta_{ij}(\nabla u_1, x) - \beta_{ij}(\nabla u_2, x))\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\|_{2,G}\right)$$

$$\left. + \left\| l\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mu(\nabla u_1, x)\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G} + \left\| l(\mu(\nabla u_1, x) - \mu(\nabla u_2, x))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right\|_{2,G}\right)$$

$$\leqq r\big(r(\|l\|_{C,G}\, c_1 \,\|u_1 - u_2\|_G^{2,2} + c_3 c_1 \,\|l\|_{6,G}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2}\, \|u_2\|_G^{2,6})$$
$$+ c_3 \,\|l\|_{C,G}\, \|g\|_{4,G}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2} + c_3^2 c_1 \,\|l\|_{C,G}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2}\, \|u_2\|_G^{2,2}\big)$$
$$\leqq (c_1 r^2 c_3 + r c_3 \,\|g\|_{4,G})\, \|l\|_G^{2,2}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2}$$
$$+ r^2 c_3^2 c_1 \,\|l\|_G^{1,2}\, \|u_2\|_G^{2,6}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2} + r c_3^3 c_1 \,\|l\|_G^{2,2}\, \|u_1 - u_2\|_G^{2,2}\, \|u_2\|_G^{2,2}.$$

c) Für den 1. Summanden aus a) erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\left\|\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} l\right) \left(\mu(\nabla u_1, x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x) \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)\right\|_{2,G}$$
$$\leqq \sum_i \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} l\right\|_{4,G} \left\|\mu(\nabla u_1, x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \mu(\nabla u_2, x) \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right\|_{4,G}$$
$$\leqq r c_3 \,\|l\|_G^{2,2}\, (r^2 c_1 c_3 \,\|u_1 - u_2\|_G^{2,2}).$$

Man beachte, daß bei den eben angegebenen Abschätzungen die Aussagen aus Bemerkung 4 mehrfach benutzt wurden ∎

Lemma 7: *Seien $n, p, n_1, p_1 \in L_2(G)$ und die Funktion R erfülle* (V2). *Dann gelten die folgenden Abschätzungen:*

1. $\|R(n, p)\|_{2,G} \leqq c_1\big(\|n\|_{2,G} + \|p\|_{2,G} + (\operatorname{mes} G)^{1/2}\big)$,
2. $\|R(n, p) - R(n_1, p_1)\|_{2,G} \leqq c_1(\|n - n_1\|_{2,G} + \|p - p_1\|_{2,G})$.

Beweis: Beide Ungleichungen ergeben sich unmittelbar aus den Voraussetzungen ∎

Wir führen nun diejenigen Räume und Operatoren ein, mit deren Hilfe wir die Existenz lokaler Lösungen zeigen werden. Für den Rest dieses Abschnittes setzen wir durchgängig die Gültigkeit von (V1)—(V4) voraus.

Definition 1: Sei $X = W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^{2,1}(Q_T)$ mit

$$\|(n, p)\|_X = \|n\|_{2,Q_T}^{2,1} + \|p\|_{2,Q_T}^{2,1} + \sup_{0\leq t\leq T} \|n(\cdot, t)\|_{2,G} + \sup_{0\leq t\leq T} \|p(\cdot, t)\|_{2,G}.$$

Weiter sei $Q\colon X \to L_2\big((0, T);\ W_0^{1,2}(G) \cap W^{2,2}(G)\big)$ die durch $-\Delta\big(Q(n, p)\big) = \alpha_1(p - n)$ bestimmte Abbildung (vgl. Bem. 2a)) und $u_1 \in L_\infty\big((0, T);\ W^{2,6}(G)\big)$ mit $-\Delta u_1 = \alpha_1 N$ und $u_1|_{S_T} = u_0|_{S_T}$.

Definition 2: Sei $S\colon X \to X$ gemäß $S(w_1, w_2) = \big(S_1(w_1, w_2), S_2(w_1, w_2)\big)$ die durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(S_1(w_1, w_2)\big) - \alpha_2 \Delta\big(S_1(w_1, w_2)\big)$$
$$= \operatorname{div}\big(\mu_n(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1))\, w_1 \nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big) + R(w_1, w_2),$$
$$S(w_1, w_2)|_{G \cup S_T} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(S_2(w_1, w_2)\big) - \alpha_3 \Delta\big(S_2(w_1, w_2)\big)$$
$$= \operatorname{div}\big(\mu_p(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1))\, w_2 \nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big) + R(w_1, w_2),$$
$$S_2(w_1, w_2)|_{G \cup S_T} = 0$$

bestimmte Abbildung (man beachte, daß nach Lemma 5 und Bem. 3a) tatsächlich $S(X) \subseteq X$ gilt). Ferner sei

$$n_1 \in W_2^{2,1}(Q_T) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial t} n_1 - \alpha_2 \Delta n_1 = 0 \quad \text{und} \quad n_1|_{G \cup S_T} = n_0|_{G \cup S_T}$$

sowie

$$p_1 \in W_2^{2,1}(Q_T) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial t} p_1 - \alpha_3 \Delta p_1 = 0 \quad \text{und} \quad p_1|_{G \cup S_T} = p_0|_{G \cup S_T}.$$

Die Existenz der Funktionen n_1 und p_1 sowie die Gültigkeit der Ungleichung $\|(n_1, p_1)\|_X \leqq (1 + T^{1/2})(2 + \alpha_4 r) c_2 \|(n_0, p_0)\|_X$ mit $\alpha_4 = \max\{\alpha_2, \alpha_3\}$ kann mit Hilfe eines einfachen Homogenisierungsprinzips (s. etwa [11: S. 26f.]) leicht aus Bemerkung 3a) und Lemma 1 gewonnen werden.

Bemerkung 6: Man überlegt sich sehr leicht, daß (u, n, p) genau dann Lösung von (LH) ist, wenn $P(n, p) := S(n, p) + (n_1, p_1) = (n, p)$ und $u = Q(n, p) + u_1$ gilt.

In den beiden folgenden Lemmata weisen wir die für den Nachweis der lokalen Existenz und Eindeutigkeit entscheidenden Eigenschaften der oben eingeführten Abbildung S nach.

Lemma 8: *Sei $T \leqq 1$ und $(w_1, w_2) \in X$. Dann gilt*

$$\|S(w_1, w_2)\|_X \leqq \gamma_2 T^{1/5}\big(\|(w_1, w_2)\|_X^2 + d_1 \|(w_1, w_2)\|_X + d_2\big).$$

Dabei ist $\gamma_2 = 2c_2^2 \max\{\gamma_1 \max\{1, \alpha_1\}, c_1\}$, *ferner* $d_1 = 2 + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1(\cdot, t)\|_G^{2,2}$ *und* $d_2 = 2(\text{mes } G)^{1/2}$.

Beweis: Mit Hilfe der Ungleichungen aus den Bemerkungen 2a) und 3a) sowie den Lemmata 4, 5 und 7 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \leqq t \leqq T} \|S_1(w_1, w_2)\|_{2.G} + \|S_1(w_1, w_2)\|_{2.Q_T}^{2.1} \leqq 2 \|S_1(w_1, w_2)\|_{2.Q_T}^{2.1} \\
&\leqq 2c_2 \big\|\operatorname{div}\big(\mu_n(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1))\, w_1 \nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big)\big\|_{2.Q_T} + \|R(w_1, w_2)\|_{2.Q_T} \\
&\leqq 2c_2 \Bigg(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \|Q(w_1, w_2)\|_G^{2,2} + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|w_1\|_{2.Q_T}^{2.1} \\
&\quad + c_1 \bigg(\int_0^T \big(\|w_1\|_{2.G} + \|w_2\|_{2.G} + (\text{mes } G)^{1/2}\big)^2 \, dt\bigg)^{1/2}\Bigg) \\
&\leqq 2c_2^2 \Bigg(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\alpha_1 \sup_{0 \leqq t \leqq T} (\|w_1\|_{2.G} + \|w_2\|_{2.G}) + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|w_1\|_{2.Q_T}^{2.1} \\
&\quad + c_1 \bigg(\int_0^T \big(\|w_1\|_{2.G} + \|w_2\|_{2.G} + (\text{mes } G)^{1/2}\big)^2 \, dt\bigg)^{1/2}\Bigg) \\
&\leqq 2c_2^2 \Big(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\alpha_1 \|(w_1, w_2)\|_X + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|w_1\|_{2.Q_T}^{2.1} \\
&\quad + c_1 T^{1/2} \big(\|(w_1, w_2)\|_X + (\text{mes } G)^{1/2}\big)\Big) \\
&\leqq \gamma_2 T^{1/5} \Big(\Big(\|(w_1, w_2)\|_X + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|w_1\|_{2.Q_T}^{2.1} + \|(w_1, w_2)\|_X + (\text{mes } G)^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

Mit der analogen Abschätzung für $S_2(w_1, w_2)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|S(w_1, w_2)\|_X \leqq \gamma_2 T^{1/5} \Big(&\Big(\|(w_1, w_2)\|_X + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \big(\|w_1\|_{2.Q_T}^{2.1} + \|w_2\|_{2.Q_T}^{2.1}\big) \\
&+ 2 \|(w_1, w_2)\|_X + 2(\text{mes } G)^{1/2}\Big)
\end{aligned}$$

$$\leqq \gamma_2 T^{1/5} \Big(\|(w_1, w_2)\|_X{}^2 + \big(2 + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G{}^{2,2}\big) \|(w_1, w_2)\|_X$$
$$+ 2(\operatorname{mes} G)^{1/2} \Big) \blacksquare$$

Lemma 9: *Sei $T \leqq 1$ und (w_1, w_2), $(v_1, v_2) \in X$ mit $\|(w_1, w_2)\|_X \leqq d$, $\|(v_1, v_2)\|_X \leqq d$, $w_1|_{G \cup S_T} = v_1|_{G \cup S_T} = n_1|_{G \cup S_T}$ und $w_2|_{G \cup S_T} = v_2|_{G \cup S_T} = p_1|_{G \cup S_T}$. Dann gilt*

$$\|S(w_1, w_2) - S(v_1, v_2)\|_X \leqq \big(\gamma_3 T^{1/2} d^2 + \gamma_4 T^{1/5}(d + 1)\big) \; \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X.$$

Dabei ist

$$\gamma_3 = c_2{}^2 4 c_5 (\alpha_1 c_2{}^2 \, 8 c_3 c_4{}^2 + \alpha_1 c_2{}^2)$$

und

$$\gamma_4 = 4 c_2{}^2 \max \Big\{ \gamma_1 \alpha_1 + \alpha_1 c_2{}^2 c_3 c_5 \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G{}^{2,6} + c_5 \alpha_1 c_2{}^2 \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G{}^{2,2},$$
$$\gamma_1 \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G{}^{2,2} + c_5 c_2 \alpha_1 + c_1 \Big\}.$$

Beweis: Mit Hilfe der in den Bemerkungen 2a) und 3a) sowie in den Lemmata 1, 3, 5—7 enthaltenen Ungleichungen erhalten wir erst einmal

$$\|S(w_1, w_2) - S(v_1, v_2)\|_X$$
$$= \|S_1(w_1, w_2) - S_1(v_1, v_2)\|_{2.Q_T}^{2.1} + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|S_1(w_1, w_2) - S_1(v_1, v_2)\|_{2.G}$$
$$+ \|S_2(w_1, w_2) - S_2(v_1, v_2)\|_{2.Q_T}^{2.1} + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|S_2(w_1, w_2) - S_2(v_1, v_2)\|_{2.G}.$$

In dieser Gleichheit kann die erste Zeile rechts wie folgt abgeschätzt werden:

$$\|S_1(w_1, w_2) - S_1(v_1, v_2)\|_{2.Q_T}^{2.1} + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|S_1(w_1, w_2) - S_1(v_1, v_2)\|_{2.G}$$
$$\leqq 2 \, \|S_1(w_1, w_2) - S_1(v_1, v_2)\|_{2.Q_T}^{2.1}$$
$$\leqq 2 c_2 \Big(\Big\| \operatorname{div} \big(\mu_n\big(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big) \, w_1 \nabla\big(Q(w_1, w_2) + u_1\big)\big)$$
$$- \operatorname{div} \big(\mu_n\big(\nabla(Q(v_1, v_2) + u_1)\big) \, v_1 \nabla\big(Q(v_1, v_2) + u_1\big)\big) \Big\|_{2.Q_T}$$
$$+ \|R(w_1, w_2) - R(v_1, v_2)\|_{2.Q_T} \Big)$$
$$\leqq 2 c_2 \Big(\Big\| \operatorname{div} \big(\mu_n\big(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big) \, w_1 \nabla\big(Q(w_1, w_2) + u_1\big)\big)$$
$$- \operatorname{div} \big(\mu_n\big(\nabla(Q(w_1, w_2) + u_1)\big) \, v_1 \nabla\big(Q(w_1, w_2) + u_1\big)\big) \Big\|_{2.Q_T}$$
$$+ \Big\| \operatorname{div} \big(\mu_n\big(Q(\nabla(w_1, w_2) + u_1)\big) \, v_1 \nabla\big(Q(w_1, w_2) + u_1\big)\big)$$
$$- \operatorname{div} \big(\mu_n\big(Q(\nabla(v_1, v_2) + u_1)\big) \, v_1 \nabla\big(Q(v_1, v_2) + u_1\big)\big) \Big\|_{2.Q_T}$$
$$+ \|R(w_1, w_2) - R(v_1, v_2)\|_{2.Q_T} \Big)$$
$$\leqq 2 c_2 \Big(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \|Q(w_1, w_2)\|_G{}^{2,2} + \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|u_1\|_G{}^{2,2} \Big) \|w_1 - v_1\|_{2.Q_T}^{2.1}$$
$$+ \Big(\int_0^T c_5{}^2 \big(\|v_1\|_G{}^{2,2} \, \|Q(w_1, w_2) - Q(v_1, v_2)\|_G{}^{2,2}$$
$$+ \|v_1\|_G{}^{1,2} \, \|Q(v_1, v_2) + u_1\|_G{}^{2,6} \, \|Q(w_1, w_2) - Q(v_1, v_2)\|_G{}^{2,2}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \|v_1\|_G^{2,2} \|Q(w_1, w_2) - Q(v_1, v_2)\|_G^{2,2} \|Q(v_1, v_2) + u_1\|_G^{2,2})^2\, dt\Big)^{1/2} \\
&+ c_1 \left(\int_0^T (\|w_1 - v_1\|_{2,G} + \|w_2 - v_2\|_{2,G})^2\, dt\right)^{1/2} \\
\leqq{}& 2c_2^2 \Big(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\alpha_1 \sup_{0\leqq t\leqq T} (\|w_1\|_{2,G} + \|w_2\|_{2,G}) + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|w_1 - v_1\|_{2,Q_T}^{2,1} \\
&+ c_5 \Big\{c_2\alpha_1 \Big(\int_0^T \Big(\|v_1\|_G^{2,2} \Big(\sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_1 - v_1\|_{2,G} + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_2 - v_2\|_{2,G}\Big)\Big)^2 dt\Big)^{1/2} \\
&+ \alpha_1 c_2^2 c_3 \Big(\int_0^T \Big(\|v_1\|_G^{1,2} (\|v_1\|_G^{1,2} + \|v_2\|_G^{1,2} + \|u_1\|_G^{2,6}) \\
&\times \Big(\sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_1 - v_1\|_{2,G} + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_2 - v_2\|_{2,G}\Big)\Big)^2 dt\Big)^{1/2} \\
&+ \alpha_1 c_2^2 \Big(\int_0^T \Big(\|v_1\|_G^{2,2} \Big(\sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_1 - v_1\|_{2,G} + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|w_2 - v_2\|_{2,G}\Big) \\
&\times (\|v_1\|_{2,G} + \|v_2\|_{2,G} + \|u_1\|_G^{2,2})\Big)^2 dt\Big)^{1/2}\Big\} \\
&+ c_1 \Big(\int_0^T (\|w_1 - v_1\|_{2,G} + \|w_2 - v_2\|_{2,G})^2\, dt\Big)^{1/2}\Big) \\
\leqq{}& 2c_2^2 \Big(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\alpha_1 \|(w_1, w_2)\|_X + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X \\
&+ c_5 \Big\{c_2\alpha_1 \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X\, T^{1/2} \Big(\int_0^T (\|v_1\|_G^{1,2})^2\, dt\Big)^{1/2} \\
&+ \alpha_1 c_2^2 c_3 \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X\, T^{1/2} \Big(\Big(\int_0^T (\|v_1\|_G^{1,2})^4\, dt\Big)^{1/2} \\
&+ \Big(\int_0^T (\|v_1\|_G^{1,2} \|v_2\|_G^{1,2})^2\, dt\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^T (\|v_1\|_G^{1,2} \|u_1\|_G^{2,6})^2\, dt\Big)^{1/2}\Big) \\
&+ \alpha_1 c_2^2 \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X\, T^{1/2} \\
&\times \Big(\|(v_1, v_2)\|_X + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \Big(\int_0^T (\|v_1\|_G^{2,2})^2\, dt\Big)^{1/2}\Big\} \\
&+ c_1 T^{1/2} \|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X\Big) \\
\leqq{}& 2c_2^2 \Big(\gamma_1 T^{1/5} \Big(\alpha_1 d + \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) \\
&+ c_5 \Big\{c_2\alpha_1 T^{1/2} + \alpha_1 c_2^2 c_3 T^{1/2} \Big(c_4^2 8 d^2 + d \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,6}\Big) \\
&+ \alpha_1 c_2^2 T^{1/2} \Big(d^2 + d \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u_1\|_G^{2,2}\Big) + c_1 T^{1/2}\Big) \|(w_1, w_2) - (v_1 - v_2)\|_X\Big\}.
\end{aligned}
$$

Mit der analogen Abschätzung für $S_2(w_1, w_2) - S_2(v_1, v_2)$ folgt die Behauptung ∎

Mit Hilfe der bisher getroffenen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die lokale Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen nachzuweisen. Sei die Aufgabe (LH) für ein Zeitintervall $(0, T)$ gestellt, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T \geqq 1$ voraussetzen wollen. Wir setzen $d_0 = \|(n_0, p_0)\|_X$. Dabei sei X der in Definition 1 eingeführte Raum für $T = 1$.

Satz 1: *Seien* (V1) *bis* (V4) *erfüllt. Dann besitzt* (LH) *eine eindeutige Lösung* $(u, n, p) \in L_\infty\big((0, T_0); W^{2/2}(G)\big) \times X$ *im Zeitintervall* $(0, T_0)$ *mit* $T_0 = \min\{1, cd_0^{-5}\}$. *Dabei ist*

$$c = \min\Big\{\big(8c_2\gamma_2(2 + \alpha_4 r)(1 + d_1 + d_2)\big)^{-5}, (4\gamma_3)^{-2}\big(4c_2(2 + \alpha_4 r)\big)^{-5}, \big(8c_2\gamma_4(2 + \alpha_4 r)\big)^{-5}\Big\}.$$

Beweis: Sei $d = \max\{4c_2(2 + \alpha_4 r)\, d_0, 1\}$. Dann ist $d \geqq 2\,\|(n_1, p_1)\|_X$ (vgl. dazu auch die Erläuterung nach Def. 2), wobei X der in Definition 1 eingeführte Raum für $T = 1$ ist. Wir wählen nun $T_0 > 0$ so klein, daß

$$\gamma_2 T_0^{1/5}(d^2 + d_1 d + d_2) \leqq \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad \gamma_3 T_0^{1/2} d^2 + \gamma_4 T_0^{1/5}(d + 1) \leqq \frac{1}{2}$$

gilt. Man rechnet leicht nach, daß dies für das im Satz angegebene T_0 der Fall ist. Alle folgenden Überlegungen spielen sich nun in dem für das Zeitintervall $(0, T_0)$ definierten Raum X ab. Wir betrachten

$$M = \{(w_1, w_2) \in X \mid \|(w_1, w_2)\|_X \leqq d,\ w_1 - n_1|_{G \cup S_T} = 0;\ w_2 - p_1|_{G \cup S_T} = 0\}.$$

Wegen Lemma 8 gilt $\|P(w_1, w_2)\|_X \leqq \|S(w_1, w_2)\|_X + \|(n_1, p_1)\|_X \leqq d$ für $(w_1, w_2) \in M$, also $P(M) \subseteqq M$. Aus Lemma 9 und der vorigen Wahl von X_0 folgt $\|P(w_1, w_2) - P(v_1, v_2)\|_X \leqq 2^{-1}\,\|(w_1, w_2) - (v_1, v_2)\|_X$ für $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in M$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt P damit in M genau einen Fixpunkt (n, p). Nach Bemerkung 6 ist (u, n, p) mit $u = Q(n, p) + u_1$ Lösung von (LH) im betrachteten Zeitintervall. Die Eindeutigkeit der Lösung (die obigen Überlegungen reichen dafür nicht aus, da P ja noch einen Fixpunkt außerhalb von M haben könnte) läßt sich wie folgt zeigen: Angenommen, es gibt zwei Lösungen, die sich in jeder Umgebung des Nullpunktes unterscheiden. Durch Wahl eines hinreichend kleinen Zeitintervalls erreicht man, daß beide Lösungen in einer Menge liegen, in der P eine Kontraktion ist. Dies widerlegt die Annahme. Aus der lokalen Eindeutigkeit folgt leicht die Eindeutigkeit in beliebigem Zeitintervall ∎

Bemerkung 7: Die Aussage von Satz 1 bleibt gültig, wenn (V2) und (V4) durch (V2') und (V4') ersetzt werden. In diesem Fall gilt zusätzlich $n \geqq 0$ und $p \geqq 0$. Aus Satz 1 ergibt sich zunächst, daß die Aufgabe mit der Funktion R^+ eine eindeutige Lösung $(u, n, p) \in L_\infty\big((0, T); W^{2/2}(G)\big) \times X$ besitzt. Nach [3] besitzt die Aufgabe mit der Funktion R^+ eine eindeutige schwache Lösung $(\tilde u, \tilde n, \tilde p)$, für die $\tilde n \geqq 0$ und $\tilde p \geqq 0$ gilt. Es folgt $(n, p) = (\tilde n, \tilde p)$ und damit auch $u = \tilde u$. Wegen $n \geqq 0$ und $p \geqq 0$ ist $R^+(n, p) = R(n, p)$, d. h. (u, n, p) ist Lösung der Aufgabe mit der Funktion R[1]).

4. Globale Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen

Wir stützen uns beim Beweis des folgenden Satzes wesentlich auf die Ergebnisse des vorangehenden Abschnittes sowie auf die in [3] bewiesene Existenz globaler schwacher Lösungen.

Satz 2: *Seien* (V1), (V2'), (V3) *und* (V4') *erfüllt. Dann besitzt* (LH) *für beliebiges* $T > 0$ *eine eindeutige Lösung* $(u, n, p) \in L_\infty\big((0, T); W^{2,2}(G)\big) \times X$. *Für diese gilt* $n \geqq 0$ *und* $p \geqq 0$.

---

[1]) In [3] wird nur der Fall

$$R(n, p) = (np - c)(r_1 + r_2 n + r_3 p)^{-1} \quad (r_i > 0, c \geqq 0)$$

betrachtet. An Hand der in [3: Lemma 4.1] durchgeführten Überlegung ist jedoch leicht zu sehen, daß für die dort bewiesene lokale Existenzaussage, die für den Nachweis der Positivität unserer Lösung genügt, die hier angegebenen Voraussetzungen an R hinreichend sind.

Beweis: Zunächst schreiben wir u in der Form $u = u_2 + u_3$ mit

$$-\Delta u_2 = \alpha_1(p - n),\ u_2|_{S_T} = u_0|_{S_T} \quad \text{und} \quad -\Delta u_3 = \alpha_1 N,\ u_3|_{S_T} = 0.$$

a) Nach [3] besitzt (LH) (unter schwächeren als den hier angegebenen Voraussetzungen) eine globale Lösung (u, n, p) mit

$$(n, p) \in L_2\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big) \cap W^{1,2}\big((0, T);\ W^{-1,2}(G)\big).$$

Mit Bemerkung 2 folgt daraus $\partial u_2/\partial x_i \in W_2^{2,1}(Q_T)$ für jedes i. Aus Bemerkung 5 erhalten wir $\partial u_2/\partial x_i \in L_{10}(Q_T)$ und $n, p \in L_{10/3}(Q_T)$. Weiter ist (vgl. wieder Bem. 2 und 4) $\partial u_3/\partial x_i \in L_\infty\big((0, T);\ W^{1,6}(G)\big) \subseteqq L_\infty(Q_T)$. Nun können wir abschätzen:

$$\left\|\mu_n n \frac{\partial}{\partial x_i} u\right\|_{5/2, Q_T} \leqq c_1 \|n\|_{10/3, Q_T} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} u\right\|_{10, Q_T},$$

d. h. $\operatorname{div}(\mu_n n \nabla u) \in L_{5/2}\big((0, T);\ W^{-1,5/2}(G)\big)$. Weiter ist $n, p \in L_\infty\big((0, T);\ L_2(G)\big)$ (das ist eine elementare Eigenschaft des Raumes $L_2\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big) \cap W^{1,2}\big((0, T);\ W^{-1,2}(G)\big)$) und damit auch $R(n, p) \in L_\infty\big((0, T);\ L_2(G)\big) \subseteqq L_{5/2}\big((0, T);\ W^{-1,5/2}(G)\big)$. Nun schreiben wir n in der Form $n = n_1 + n_2$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t} n_2 + \alpha_2 \Delta n_2 = \operatorname{div}(\mu_n n \nabla u) + R(n, p) \quad \text{und} \quad n_2|_{G \cup S_T} = 0$$

und n_1 wie in Definition 2. Für p betrachten wir die analoge Zerlegung. Nach Bemerkung 3b) ist

$$n_2 \in L_{5/2}\big((0, T);\ W^{1,5/2}(G)\big) \cap W^{1,5/2}\big((0, T);\ W^{-1,5/2}(G)\big).$$

Analog erhalten wir, daß p_2 in diesem Raum liegt. Nun zerlegen wir u_2 in $u_2 = u_{21} + u_{22}$ mit

$$-\Delta u_{21} = \alpha_1(n_1 - p_1), \quad u_{21}|_{S_T} = u_0|_{S_T} \quad \text{und} \quad -\Delta u_{22} = \alpha_1(n_2 - p_2),$$
$$u_{22}|_{S_T} = 0.$$

Jetzt können wir die eben durchgeführten Überlegungen wiederholen, wobei wir diesmal die gerade gezeigten Eigenschaften von n und p als Ausgangspunkt nehmen. Zunächst ist $\partial u_{22}/\partial x_i \in W_{5/2}^{2,1}(Q_T)$, es folgt $\partial u_{22}/\partial x_i \in L_\infty(Q_T)$ und $n_2, p_2 \in L_5(Q_T)$. Wegen

$$n_1, p_1 \in W_2^{2,1}(Q_T) \subseteqq L_\infty\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big) \subseteqq L_\infty\big((0, T);\ L_6(G)\big)$$

und $u_0 \in L_\infty\big((0, T);\ W^{2,6}(G)\big)$ ist $u_{21} \in L_\infty\big((0, T);\ W^{2,6}(G)\big)$, also $\partial u_{21}/\partial x_i \in L_\infty\big((0, T);\ W^{1,6}(G)\big) \in L_\infty(Q_T)$ (vgl. Bem. 2a) und 3a)). Mit Hilfe der schon vorhin gezeigten Beziehung $\partial u_3/\partial x_i \in L_\infty(Q_T)$ und $n_1 \in L_5(Q_T)$ (vgl. Bem. 5b)) folgt

$$\mu_n n \frac{\partial}{\partial x_i} u \in L_5(Q_T), \text{ d. h. } \operatorname{div}(\mu_n n \nabla u) \in L_5\big((0, T);\ W^{-1,5}(G)\big).$$

Da auch $R(n, p) \in L_5\big((0, T);\ W^{-1,5}(G)\big)$ gilt (s. oben), folgt aus Bemerkung 3b) $n_2 \in L_5\big((0, T);\ W^{1,5}(G)\big) \cap W^{1,5}\big((0, T);\ W^{-1,5}(G)\big)$, analog für p_2. Insbesondere haben wir $n_2, p_2 \in L_5\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big)$. Wegen $n_1, p_1 \in L_\infty\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big)$ (das ist eine elementare Eigenschaft des Raumes $W_2^{2,1}(Q_T)$) erhalten wir $n, p \in L_5\big((0, T);\ W^{1,2}(G)\big)$.

Natürlich hätten wir die Überlegung der eben vorgeführten Art noch fortsetzen können. Wir kommen dabei für n und p aber nicht über den Raum $L_q\big((0, T);\ W^{1,q}(G)\big) \cap W^{1,q}\big((0, T);\ W^{-1,q}(G)\big)$ für beliebig großes $q < \infty$ hinaus. Selbst dafür würden schon im nächsten Schritt stärkere Voraussetzungen an n_0 und p_0 nötig sein. Insbesondere erhalten wir auf diese Weise nicht die Existenz der zweiten Ortsableitungen.

b) Nehmen wir nun an, daß die Aufgabe für das Zeitintervall $(0, T)$ gestellt ist und in diesem keine Lösung in $L_\infty\big((0, T); W^{2,2}(G)\big) \times X$ besitzt. Sei

$$T_1 = \sup \{T_2 > 0 \mid \text{(LH) hat eine Lösung in } L_\infty\big((0, T_2); W^{2,2}(G)\big) \times X\}.$$

Nach Bemerkung 7 ist zunächst $T_1 > 0$. Es folgt weiter, daß im Intervall $(0, T_1)$ keine $L_\infty\big((0, T_1); W^{2,2}(G)\big) \times X$-Lösung existiert. Andernfalls müßte wegen Satz 1 auch in einem Intervall $(0, T_1 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ eine solche Lösung existieren. Man beachte dabei, daß die Lösbarkeit im Intervall $(0, T_1)$ die Gültigkeit aller Voraussetzungen für ein in T_1 beginnendes weiteres (hinreichend kleines) Intervall sichert. Wir betrachten t mit $T_1 - 1 < t < T_1$. Wegen $n \in W_2^{2,1}(Q_T)$ ist $n(t) \in W^{1,2}(G)$ (das ist eine elementare Eigenschaft des Raumes $W_2^{2,1}(Q_T)$). Sei $g \in W_0^{1,2}(G)$ gemäß $g := n(t) - n_0(t)$. Nun gibt es eine Fortsetzung $n_g \in W_2^{2,1}\big(G \times (t, t+1)\big)$ mit $n_g(t) = g$ und $n_g|_{S_T} = 0$ sowie $\|n_g\|^{2,1}_{G\times(t,t+1)} \leqq \bar{c}\, \|g\|_G^{1,2}$ (dies ist als Spezialfall in [6: Kap. IV/Th. 9.1] enthalten). Sei nun $\bar{n}_0 \in W_2^{2,1}\big(G \times (t, \min\{T, t+1\})\big)$ gemäß $\bar{n}_0 := n_g + n_0$. Auf analoge Weise konstruieren wir Funktionen p_g und $\bar{p}_0$. Aus Lemma 1 folgt

$$\begin{aligned}
\|(\bar{n}_0, \bar{p}_0)\|_X &\leqq \|(n_g, p_g)\|_X + \|(n_0, p_0)\|_X \\
&\leqq 2\bar{c}\big(\|n(t) - n_0(t)\|_G^{1,2} + \|p(t) - p_0(t)\|_G^{1,2}\big) + \|(n_0, p_0)\|_X \\
&\leqq 2\bar{c}\big(\|n(t)\|_G^{1,2} + \|p(t)\|_G^{1,2}\big) + \delta
\end{aligned}$$

mit

$$\delta = 2\bar{c} \sup_{0 \leqq \tau \leqq T} \big(\|n_0(\tau)\|_G^{1,2} + \|p_0(\tau)\|_G^{1,2}\big) + \|(n_0, p_0)\|_X.$$

Dabei beachten wir, daß $\sup\limits_{0 \leqq \tau \leqq T} \|n_0(\tau)\|_G^{1,2} < \infty$ wegen $n_0 \in W_2^{2,1}(Q_T)$ gilt. Analog für p_0. Da laut Annahme keine $L_\infty\big((0, T_1); W^{2,2}(G)\big) \times X$-Lösung existiert, muß nach Satz 1 und Bemerkung 7 $\|(\bar{n}_0, \bar{p}_0)\|_X^5 > c(T_1 - t)^{-1}$ gelten. Es folgt

$$\big(2\bar{c}(\|n(t)\|_G^{1,2} + \|p(t)\|_G^{1,2}) + \delta\big)^5 > c(T_1 - t)^{-1}.$$

Damit wäre die Funktion $\alpha(t) := \big(\|n(t)\|_G^{1,2} + \|p(t)\|_G^{1,2}\big)^5$ im Intervall $(T_1 - 1, T_1)$ nicht integrierbar. Dies steht im Widerspruch zu dem in a) gezeigten Sachverhalt ∎

5. Verbesserte Regularität unter stärkeren Forderungen an die Anfangs- und Randwerte

Wir wollen in diesem Abschnitt noch diskutieren, wie weit sich die Glattheit der Lösungen auf der Grundlage der bisherigen Aussagen dieser Arbeit verbessern lassen, wenn wir stärkere Voraussetzungen bezüglich der Anfangs- und Randwerte machen.

Satz 3: *Seien* (V1), (V2′), (V3) *und* (V4′) *erfüllt. Zusätzlich sei* $u_0 \in L_\infty\big((0, T); W^{2,q}(G)\big)$, $N \in L_q(G)$ *und* $n_0, p_0 \in W_q^{2,1}(Q_T)$ *für jedes* $q < \infty$. *An Stelle von* (V15) *gelte* $|\partial\mu(\xi, x)/\partial x_i| \leqq c_1$. *Dann liegt die Lösung* (u, n, p) *der Aufgabe* (LH) *im Raum* $L_\infty\big((0, T); W^{2,q}(G)\big) \times W_q^{2,1}(Q_T) \times W_q^{2,1}(Q_T)$ *für jedes* $q < \infty$.

Beweis: a) Aus $n, p \in W_2^{2,1}(Q_T)$ folgt nach Bemerkung 5 zunächst $n, p \in L_{10}(Q_T)$ und $\partial n/\partial x_i, \partial p/\partial x_i \in L_{10/3}(Q_T)$. Mit Bemerkung 2a) erhalten wir $\partial u/\partial x_i, \partial^2 u/\partial x_i\, \partial x_j \in L_{10}(Q_T)$. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 5 können wir nun abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_n\, n\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{5/2,Q_T} \leqq \sum_i \Bigg(c_1 \left\|\left(\frac{\partial n}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{5/2,Q_T} + c_1 \sum_j \left\|n\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\|_{5/2,Q_T} \\
+ \left\|n\left(\frac{\partial \mu_n}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{5/2,Q_T}\Bigg).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\left\|\left(\frac{\partial n}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{5/2,Q_T} \leqq \left\|\frac{\partial n}{\partial x_i}\right\|_{10/3,Q_T} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{10,Q_T}$$

und

$$\left\|n\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j}\right\|_{5/2,Q_T} \leqq \tilde{c}\left\|n\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j}\right\|_{5,Q_T} \leqq \tilde{c}\,\|n\|_{10,Q_T}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j}\right\|_{10,Q_T}$$

sowie

$$\left\|n\left(\frac{\partial \mu_n}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\|_{5/2,Q_T} \leqq c_1\tilde{c}\,\|n\|_{10,Q_T}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{10,Q_T}$$

mit einer geeigneten Konstanten $\tilde{c} > 0$. Da offensichtlich auch $R(n, p) \in L_{5/2}(Q_T)$ gilt, folgt aus Bemerkung 3a) $n \in W^{2,1}_{5/2}(Q_T)$, analog für p.

b) Ausgehend von den jetzt nachgewiesenen stärkeren Eigenschaften der Funktionen n und p lassen sich die im Punkt a) durchgeführten Überlegungen wiederholen. Ohne daß wir dies hier im Einzelnen ausführen wollen, erhalten wir im nächsten Schritt $n, p \in W_q^{2,1}(Q_T)$ für jedes $q < 5$ und in einem weiteren Schritt $n, p \in W_q^{2,1}(Q_T)$ für jedes $q < \infty$ ∎

Bemerkung 8: Aus $n, p \in W_q^{2,1}(Q_T)$ für jedes $q < \infty$ folgt insbesondere (vgl. wieder Bem. 5) $n, p \in L_\infty(Q_T)$ und auch $\partial n/\partial x_i, \partial p/\partial x_i \in L_\infty(Q_T)$. Von Gajewski und Gröger [4] wurde unter etwas anderen Voraussetzungen die Beschränktheit von n und p durch eine von T unabhängige Konstante gezeigt.

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. New York—San Francisco—London: Academic Press 1975.

[2] Elschner, H., Möschwitzer, A., und R. Reibiger: Rechnergestützte Analyse in der Elektronik. Berlin: Verlag Technik 1977.

[3] Gajewski, H.: On existence, uniqueness and asymptotic behavior of the basic equations for carrier transport in semiconductors. Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) (erscheint).

[4] Gajewski, H., and K. Gröger: On the basic equations for carrier transport in semiconductors. J. Math. Anal. Appl. (erscheint).

[5] Ладыженская, О. А.: Краевые задачи математической физики. Москва: Изд-во Наука 1973.

[6] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1967.

[7] Mock, M. S.: On equations describing steady-state carrier distributions in semiconductor devices. Comm. Pure Appl. Math. 25 (1975), 781—792.

[8] Mock, M. S.: An initial value problem from semiconductor device theory. SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 597—612.

[9] Nassif, N., und K. Malla: Etude de l'existence de la solution d'une inegalite quasi variationelle appainant dans la theorie des semi-conducteurs. C. R. Acad. Sc. Paris (Serie I) 294 (1982), 119—122.

[10] Simader, C. G.: On Dirichlet's boundary value problem. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1972.

[11] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. II: Monotone Operatoren. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977.

Manuskripteingang: 19. 03. 1985

VERFASSER:

Dr. Jörg Heinrich
Sektion Mathematik der Technischen Universität
DDR-8027 Dresden, Mommsenstr. 13

Jetzige Adresse: DDR-7840 Senftenberg, Radojewski-Str. 9