Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (3) 1987, S. 225–233

Über Gleichungen vom gemischt-zusammengesetzten Typ

A. MÜLLER-RETTKOWSKI

Es werden Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung vom gemischt-zusammengesetzten Typ untersucht. Im ersten Teil werden lineare, im zweiten Teil nichtlineare Gleichungen behandelt.

Изучаются краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка смешанно—сложного типа. Первая часть посвящена линейным, вторая часть нелинейным уравнениям.

Boundary value problems for partial differential equations of the third order of mixed-composite type are studied. In the first part linear equations are investigated, in the second part nonlinear equations.

1. Problemformulierung. Ergebnisse. Bezeichnungen

Die Gleichungen werden in einem einfach-zusammenhängenden beschränkten Gebiete $D \subseteqq \mathbf{R}^2(x, y)$ betrachtet, das mit der x-Achse den nichtleeren Durchschnitt $\{(x, 0): 0 < x < 1\} = (A, B)$ mit $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ hat. Es sind $a \in C^1(\overline{D})$, $c \in C^0(\overline{D})$ und eine Funktion $k = k(y)$ gegeben, die in $[y_0, y_1]$ stückweise stetig ist und $k(y) \gtreqless 0$ für $y \gtreqless 0$ erfüllt, wobei $y_0 = \min\{y : (x, y) \in \overline{D}\}$ und $y_1 = \max\{y : (x, y) \in \overline{D}\}$ bedeuten sowie $y_0 < 0$ und $y_1 > 0$ sind. Wir bezeichnen stets durch $n = (n_1, n_2)$ die äußere Einheitsnormale für D auf dem Rande ∂D von D. Dieser Rand ist für $y > 0$ eine stückweise glatte Kurve Γ_0, die B mit A verbindet. Für $y < 0$ setzt sich ∂D zusammen aus der Kurve Γ_-, die Charakteristik für den Operator $T = k(y)\,\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ durch A, mit negativer Steigung ist, und aus einer für T nicht-charakteristischen stückweise glatten Kurve Γ_1 durch B, die Γ_- in C schneidet. Es wird noch vorausgesetzt, daß $kn_1^2 + n_2^2 > 0$ und $n_1 \geqq 0$ auf Γ_1 erfüllt sind. Die Charakteristik Γ_-, die Charakteristik mit positiver Steigung durch B und das Intervall (A, B) der x-Achse bestimmen ein charakteristisches Dreieck: die Bedingung an Γ_1 besagt, daß Γ_1 innerhalb dieses Dreiecks verläuft. Wir haben somit $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_- \cup \Gamma_1$. Wir zerlegen Γ_0 in $\Gamma_0^- = \{(x, y) \in \Gamma_0 : n_1 \leqq 0\}$ und $\Gamma_0^+ = \{(x, y) \in \Gamma_0 : n_1 > 0\}$ und Γ_1 in $\delta_1 = \{(x, y) \in \Gamma_1 : n_1 > 0\}$ und $\delta_2 = \{(x, y) \in \Gamma_1 : n_1 = 0\}$.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden Bedingungen für die Funktionen a und c angegeben, die für das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} &Lu := \frac{\partial}{\partial x}(Tu + au_x) + cu = f(x, y) \ in\ D \\ &u = 0\ auf\ \partial D\ und\ u_n = 0\ auf\ \Gamma_0^- \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

und für das zugehörige adjungierte Problem die Existenz halbstarker und 1-verallgemeinerter Lösungen zu beweisen gestatten (Sätze 1–3; für die hier verwendeten Lösungsbegriffe vergleiche man [13]; u_n bezeichnet die Ableitung von u in Richtung von n). Im zweiten Teil wird gezeigt, daß das nichtlineare Problem

$$\left.\begin{array}{l} Pu := Lu - u\,|u|^{\varrho} = f(x, y, u) \text{ in } D \ (\varrho \geqq -1/2, \text{konst.}) \\ u = 0 \text{ auf } \partial D \text{ und } u_n = 0 \text{ auf } \Gamma_0^- \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Lösungen in $\mathring{W}_2^1(D)$ in einem verallgemeinerten Sinne besitzt (Satz 4).

Randwertprobleme für Gleichungen vom gemischt-zusammengesetzten Typ auch von höherer als dritter Ordnung und auch in höheren Dimensionen wurden häufig in der Literatur behandelt (man vergleiche etwa [2–4, 7, 8, 12, 14, 15]). Meist werden die Ergebnisse durch Umformen der Probleme in äquivalente Integralgleichungen erhalten. In [8, 14, 15] wird auch die hier benutzte Energie-Integralmethode angewandt. In [8, 14] werden ähnliche Probleme wie hier untersucht, doch setzen die Existenzaussagen dort voraus, daß Γ_1 mit der durch B gehenden Plus-Charakteristik $\left(kn_1^2 + n_2^2 = 0 \text{ und } n_2 = -\sqrt{-k}\, n_1\right)$ zusammenfällt. Bewiesen wird dort die Existenz schwacher Lösungen für das zu dem Ausgangsproblem adjungierte Problem. Die Bedingungen an die den Funktionen a und c entsprechenden Koeffizienten in [8] sind einschränkender als hier. In der Arbeit [15] wird ein nichtlineares Problem für eine andere Gleichung vom gemischt-zusammengesetzten Typ in einem Rechtecksgebiet behandelt. Hinsichtlich der Anwendungen von Gleichungen vom zusammengesetzten Typ bei der Behandlung ebener stationärer Strömungen einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit oder eines idealen elektrisch leitenden Gases um ein dünnes Profil in einem homogenen Magnetfeld oder hinsichtlich des Auftretens derartiger Gleichungen als Grenzfälle elliptischer Probleme wird verwiesen auf die Bemerkungen in [5] und insbesondere auf [1: Kapitel V, § 5 und Kapitel VIII, § 3, Abschnitt 3].

Die Sobolew-Räume der bis zur l-ten ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Ableitung einschließlich in D quadratintegrablen Funktionen werden mit $W_2^l(D)$ bezeichnet, das zugehörige Skalarprodukt mit $(\cdot, \cdot)_l$ und die Norm mit $\|\cdot\|_l$. Es ist $W_2^0(D) = L_2(D)$, $\mathring{W}_2^1(D)$ der Abschluß von $C_0^\infty(D)$ in der Norm $\|\cdot\|_1$ und $W_2^{-1}(D)$ der Dualraum zu $\mathring{W}_2^1(D)$. (Man vergleiche [11].) Wir vereinbaren, daß positive Konstanten, die höchstens vom Gebiet D oder dem Operator L abhängen, fortlaufend mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnet werden.

I. Das lineare Problem

2. Das adjungierte Problem

Der Operator L^+ ist durch $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ für alle $u, v \in C_0^\infty(D)$ definiert. Es ergibt sich $L^+v = -\partial(Tv - av_x)/\partial x + cv$. Man überzeugt sich durch Anwenden des Gaußschen Integralsatzes von

$$\begin{aligned}(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0 &+ \int_{\partial D} v(Tu + au_x)\, n_1 ds - \int_{\partial D} uav_x n_1 ds \\ &+ \int_{\partial D} \left(ud_n(v_x) - v_x d_n u\right) ds \quad \text{für} \quad u, v \in C^3(D) \cap C^2(\overline{D}),\end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $d_n w = kw_x n_1 + w_y n_2$ auf ∂D die Konormalenableitung von w (bezogen auf T) bezeichnet. Wir definieren die Funktionenmengen

$$D(L) = \{u \in C^3(D) \cap C^2(\overline{D}) : u = 0 \text{ auf } \partial D,\ u_n = 0 \text{ auf } \Gamma_0^-\},$$

$$D(L^+) = \{v \in C^3(D) \cap C^2(\overline{D}) : (Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0,\ u \in D(L)\}.$$

Unter Verwendung von (2.1) prüft man

$$D(L^+) = \{v \in C^3(D) \cap C^2(\overline{D}) : v = 0 \text{ auf } \partial D,\ v_x = 0 \text{ auf } \Gamma_0^+ \cup \delta_1\}$$

nach. Das zu (1.1) adjungierte Randwertproblem lautet somit:

Zu einer in D definierten vorgegebenen Funktion g ist

$$v \in D(L^+) \quad \textit{gesucht mit} \quad L^+ v = g \textit{ in } D. \tag{2.2}$$

Wir definieren die Hilbert-Räume $(W_2^3(D, bd), (\cdot,\cdot)_3)$ und $(W_2^3(D, bd^+), (\cdot,\cdot)_3)$ als Abschluß von $D(L)$ bzw. $D(L^+)$ in der Norm von $W_2^3(D)$. Die Operatoren $L : D(L) \subset W_2^3(D, bd) \to L_2(D)$ und $L^+ : D(L^+) \subset W_2^3(D, bd^+) \to L_2(D)$, lassen sich abschließen zu $\mathfrak{L} : W_2^3(D, bd) \to L_2(D)$ und $\mathfrak{L}^+ : W_2^3(D, bd^+) \to L_2(D)$. Es gilt $(\mathfrak{L}u, v)_0 = (u, \mathfrak{L}^+ v)_0$ für $u \in W_2^3(D, bd)$ und $v \in W_2^3(D, bd^+)$. L und L^+ sowie $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^+$ sind zueinander formal adjungierte Operatoren im Sinne von [9: S. 7f.].

3. Apriori-Abschätzungen

Wir ordnen L den folgenden symmetrischen (im Sinne von Friedrichs, siehe [9: S.19]) linearen Ausdruck von sechs Differentialoperatoren erster Ordnung zu:

$$K\underline{u} = A_1 \frac{\partial}{\partial x} \underline{u} + C\underline{u}$$

mit

$$\underline{u} = (u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad u \in C^3(D) \cap C^2(\overline{D})$$

und den matrixwertigen Funktionen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma a & 0 & \gamma k & 0 & \gamma \\ \gamma a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & & \cdot \\ \gamma k & 0 & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & & & \cdot \\ \gamma & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} \gamma c & \gamma a_x - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & \cdot \\ 0 & -\gamma k & 0 & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & & \cdot \\ 0 & -\gamma & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind α und γ in $\overline{D}$ definierte, für alle weiteren Umformungen genügend glatte Funktionen, die später geeignet festgelegt werden. Mit $2\tilde{\varkappa}(x, y) := C + C^{\mathrm{T}} - (A_1)_x$ und $\tilde{B}(x, y)_{|\partial D} = A_1 n_1$ erhält man

$$2 \int_D \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot K\underline{u}\, dx\, dy = \int_D \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot 2\tilde{\varkappa}(x, y)\, \underline{u}\, dx\, dy + \int_{\partial D} \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{B}(x, y)\, \underline{u}\, ds \tag{3.1}$$

(man vergleiche [9]). Im ersten Integral rechts tritt der Ausdruck

$$I = \int_D (-2\gamma_x k u u_{xx} - 2\gamma_x u u_{yy} - 2\gamma k u_x u_{xx} - 2\gamma u_x u_{yy})\, dx\, dy$$

auf, der durch partielle Integration umgeformt wird zu

$$I = \int_D [-u^2 T(\gamma_x) + 3\gamma_x k u_x^2 + 2\gamma_y u_x u_y + \gamma_x u_y^2]\, dx\, dy$$
$$+ \int_{\partial D} [u^2 d_n(\gamma_x) - \gamma(u_x^2 k - u_y^2)\, n_1 - 2\gamma_x u d_n u - 2\gamma u_x u_y n_2]\, ds.$$

Wird dies in (3.1) eingebracht, so erhält man

$$2 \int_D \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot K\underline{u}\, dx\, dy = \int_D (u, u_x, u_y) \cdot 2\varkappa(x, y)\, (u, u_x, u_y)^{\mathrm{T}}\, dx\, dy$$
$$+ \int_{\partial D} \big[u^2\big(\alpha n_1 + d_n(\gamma_x)\big) + 2u(\gamma a u_x n_1 - \gamma_x d_n u + \gamma T u n_1)\big]\, ds$$
$$+ \int_{\partial D} (-\gamma)\, (u_x, u_y)\, B(x, y)\, (u_x, u_y)^{\mathrm{T}}\, ds =: I_1(D) + I_2(\partial D) + I_3(\partial D). \tag{3.2}$$

Hierbei sind

$$2\varkappa(x, y) = \begin{pmatrix} 2\gamma c - \alpha_x - T(\gamma_x) & -\gamma_x a - \alpha & 0 \\ -\gamma_x a - \alpha & -2\gamma a + 3\gamma_x k & \gamma_y \\ 0 & \gamma_y & \gamma_x \end{pmatrix} \text{ und } B(x, y) = \begin{pmatrix} kn_1 & n_2 \\ n_2 & -n_1 \end{pmatrix}.$$

Wir kommen jetzt zum Hauptsatz des Teils I.

Satz 1: *Sind die Voraussetzungen*

(i) $a \in C^1(\bar{D})$ *mit* $\min\{a(x, y) : (x, y) \in \bar{D}\} = a_0 > 0$

(ii) $c \in C^0(\bar{D})$ *mit* $c(x, y) \leqq 0$ *für* $(x, y) \in \bar{D}$

erfüllt, so gibt es ein $\lambda > 0$ *derart, daß mit* $\gamma(x, y) := x - \lambda$, $(x, y) \in \bar{D}$, *gilt*

$$(Lu, \gamma u)_0 \geqq c_1 \|u\|_1^2 \quad \textit{für alle} \quad u \in D(L). \tag{3.3}$$

Die Voraussetzungen (i) und (ii) können zu „stückweise" stetig differenzierbar bzw. „stückweise" stetig abgeschwächt werden.

Beweis: Es sei $u \in D(L)$. Dann hat man insbesondere $u = 0$ auf ∂D, also $I_2(\partial D) = 0$. Weiter folgt aus $u = 0$ auf ∂D, daß dort $u_x = u_n n_1$ und $u_y = u_n n_2$ gelten. Verwendet man das, so kann man schreiben

$$I_3(\partial D) = \int_{\partial D} (-\gamma)\, n_1 u_n^2 (kn_1^2 + n_2^2)\, ds.$$

Für $u \in D(L)$ gilt $u_n = 0$ auf Γ_0^-, und da Γ_- eine Charakteristik für T ist, folgt $I_3(\Gamma_0^- \cup \Gamma_-) = 0$ unabhängig von γ. Wir wählen $\lambda > 1$ so groß, daß $\gamma(x, y) = x - \lambda < 0$ in $\bar{D}$ gilt. Dann folgt $I_3(\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1) \geqq 0$. Insgesamt haben wir dann bis hierher $I_2(\partial D) + I_3(\partial D) \geqq 0$ für $u \in D(L)$ erhalten. Das bedeutet mit (3.2)

$$2 \int_D \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot K\underline{u}\, dx\, dy \geqq \int_D (u, u_x, u_y) \cdot 2\varkappa(x, y)\, (u, u_x, u_y)^{\mathrm{T}}\, dx\, dy \tag{3.4}$$

für $u \in D(L)$. Wir legen α durch $\alpha(x, y) = -x$, $(x, y) \in \bar{D}$, fest und berechnen

$$2\varkappa(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - \lambda)\, c + 1 & x - a & 0 \\ x - a & 3k + 2a(\lambda - x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach den Voraussetzungen kann λ so groß gewählt werden, daß $\varkappa(x, y)$ in $\bar{D}$ positiv definit ist. Wegen $\int_D \underline{u}^{\mathrm{T}} \cdot K\underline{u}\, dx\, dy = (Lu, \gamma u)_0$ für $u \in C^3(D) \cap C^2(\bar{D})$ folgt jetzt mit (3.4) die Behauptung ∎

Satz 2: *Unter den Voraussetzungen aus Satz* 1 *gilt mit geeignetem* $\lambda > 0$ *und* $\beta(x, y) = -x - \lambda$ *die Abschätzung*

$$(L^+ v, \beta v)_0 \geqq c_2 \|v\|_1^2 \quad \textit{für alle} \quad v \in D(L^+). \tag{3.5}$$

Beweis: Wir gehen analog vor wie ab Beginn dieses dritten Abschnitts. Mit $\underline{v} = (v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})^{\mathrm{T}}$, $v \in C^3(D) \cap C^2(\bar{D})$, wird $L^+ v$ der Differentialausdruck erster Ordnung $\hat{K}\underline{v} = \hat{A}_1\, \partial\underline{v}/\partial x + \hat{C}\underline{v}$ zugeordnet mit

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \delta & \beta a & 0 & -\beta k & 0 & -\beta \\ \beta a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\beta k & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & & & \cdot \\ -\beta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{C} = \begin{pmatrix} \beta c & \beta a_x - \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta a & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \beta k & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \beta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

wobei β und δ in $\overline{D}$ definierte und genügend oft differenzierbare Funktionen sind, über die später verfügt wird. Geht man so vor wie im Anschluß an die Definition von K, so erhält man entsprechend (3.2)

$$
\begin{aligned}
2\int_D \underline{v}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{K}\underline{v}\,dx\,dy = \int_D (v, v_x, v_y) \cdot 2\hat{k}(x,y)\,(v, v_x, v_y)^{\mathrm{T}}\,dx\,dy \\
+ \int_{\partial D} \left[v^2\big(\delta n_1 - d_n(\beta_x)\big) + 2v(\beta a v_x n_1 + \beta_x d_n v - \beta T v n_1)\right] ds \\
+ \int_{\partial D} \beta(v_x, v_y)\,\hat{B}(x,y)\,(v_x, v_y)^{\mathrm{T}}\,ds =: \hat{I}_1(D) + \hat{I}_2(\partial D) \\
+ \hat{I}_3(\partial D),
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

wobei

$$
2\hat{k}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\beta c - \delta_x + T(\beta_x) & -\beta_x a - \delta & 0 \\ -\beta_x a - \delta & -2\beta a - 3\beta_x k & -\beta_y \\ 0 & -\beta_y & -\beta_x \end{pmatrix} \text{ und } \hat{B}(x,y) = \begin{pmatrix} k n_1 & n_2 \\ n_2 & -n_1 \end{pmatrix},
$$

bedeuten. Für $v \in D(L^+)$ gilt $v = 0$ auf ∂D; deshalb erhält man wie im Beweis zu Satz 1

$$
\hat{I}_2(\partial D) = 0 \quad \text{und} \quad \hat{I}_3(\partial D) = \int_{\partial D} \beta n_1 v_n^2 (k n_1^2 + n_2^2)\,ds.
$$

Aus $v \in D(L^+)$ folgt $v_n = 0$ auf $\Gamma_0^+ \cup \delta_1$, da dort $v = v_x = 0$ gilt. Auf δ_2 ist nach Definition $n_1 = 0$, und da Γ_- für T eine Charakteristik ist, hat man $kn_1^2 + n_2^2 = 0$ auf Γ_-. Es gilt also $\hat{I}_3(\Gamma_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_0^+) = 0$ unabhängig von β, so daß $\hat{I}_3(\partial D) \geqq 0$ wird, falls nur $\beta \leqq 0$ auf Γ_0^- erfüllt ist. Dies gilt mit der Funktion $\beta = -x - \lambda$, wenn $\lambda > 0$ geeignet gewählt wird. Es folgt damit aus (3.6) die (zu (3.4) analoge) Abschätzung

$$
2\int_D \underline{v}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{K}\underline{v}\,dx\,dy \geqq \int_D (v, v_x, v_y)\,2\hat{k}(x,y)\,(v, v_x, v_y)^{\mathrm{T}}\,dx\,dy \tag{3.7}
$$

für $v \in D(L^+)$. Wir legen δ durch $\delta(x,y) = -x$, $(x,y) \in \overline{D}$, fest und berechnen

$$
2\hat{k}(x,y) = \begin{pmatrix} -2c(x+\lambda) + 1 & a + x & 0 \\ a + x & 2a(x+\lambda) + 3k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Durch Wahl von $\lambda > 0$ genügend groß wird $2\hat{k}(x,y)$ in $\overline{D}$ positiv definit, so daß, wenn man $\int_D \underline{v}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{K}\underline{v}\,dx\,dy = (L^+v, \beta v)_0$ für $v \in C^3(D) \cap C^2(D)$ beachtet, sich aus (3.7) die Behauptung ergibt ∎

4. Existenzaussagen

Für die in diesem Abschnitt verwendeten Lösungsbegriffe vergleiche man den Übersichtsartikel [13] und die dort angegebene Literatur.

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen aus Satz 1 besitzt das Problem* (1.1)

(i) *zu jedem* $f \in L_2(D)$ *eine halbstarke Lösung;*
(ii) *zu jedem* $f \in W_2^{-1}(D)$ *eine 1-verallgemeinerte Lösung, d.h. eine Funktion* $u \in W_2^1(D)$, *für die* $(u, \mathfrak{L}^+v)_0 = (f, v)_0$ *für alle* $v \in W_2^3(D, bd^+)$ *gilt.*

Beweis: (i): Nach [13: Satz 4/S. 231] sind die Ungleichungen $\|Lu\|_0 \geqq c_3 \|u\|_0$ $(u \in D(L))$ und $\|L^+v\|_0 \geqq c_4 \|v\|_0$ $(v \in D(L^+))$ nachzuweisen. Diese folgen sofort aus den Abschätzungen (3.3) und (3.5), wenn man die Schwarzsche Ungleichung anwendet und $\|\cdot\|_0 \leqq \|\cdot\|_1$ beachtet.

(ii): Nach [13: Satz 9/S. 244] ist die Ungleichung $\|\mathfrak{L}^+v\|_{-1} \geqq c_5 \|v\|_1$ $(v \in W_2{}^3(D, bd^+))$ nachzuweisen. Diese folgt unmittelbar aus der Abschätzung (3.5) ∎

Es gelten $L = L^{++}$ und $D(L) = D(L^{++})$, so daß das zu (2.2) adjungierte Problem wieder das Ausgangsproblem (1.1) ist. Damit gilt ein Satz 3 entsprechender Satz für (2.2).

II. Das nichtlineare Problem

5. Definition des verwendeten Lösungsbegriffes

Wir untersuchen das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} &Pu := Lu - u\,|u|^\varrho = f(x, y, u) \quad in \quad D \;(\varrho \geqq -1/2, \text{ konst}). \\ &u = 0 \quad auf\ \partial D\ und \quad u_n = 0\ auf\ \Gamma_0{}^-. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Wie f von u abhängt, wird später festgelegt. Im folgenden ist stets $\gamma(x, y) = x - \lambda$, $(x, y) \in \overline{D}$, die Funktion γ aus Satz 1. Beachtet man, daß in Satz 1 $\max\{\gamma(x, y) : (x, y) \in \overline{D}\} < 0$ gilt, so folgt mit (3.3) für $u \in D(L)$

$$(Pu, \gamma u)_0 \geqq (Lu, \gamma u)_0 \geqq c_1 \|u\|_1{}^2 \quad \text{und} \quad \|Pu\|_0 \geqq c_6 \|u\|_1. \tag{5.2}$$

Nach einem Einbettungssatz von Sobolew [11: Théorème 3.7/p. 72] ist $W_2{}^1(D)$ stetig in $L_q(D)$ eingebettet für $q \in [1, \infty)$ beliebig. Hieraus folgt zunächst, da $W_2{}^3(D)$ stetig eingebettet ist in $W_2{}^1(D)$, daß Pu für $u \in W_2{}^3(D)$ definiert ist und die Ungleichungen (5.2) auf $W_2{}^3(D, bd)$ fortgesetzt werden können. Man erhält weiter

$$(u\,|u|^\varrho, v)_0 \leqq \|u\|^{\varrho+1}_{L_{2\varrho+2}} \|v\|_0 \leqq c_7 \|u\|_1{}^{\varrho+1} \|v\|_0$$

für $u \in W_2{}^1(D)$ und $v \in L_2(D)$. Damit ist der Ausdruck

$$B(u, v) = \big(ku_x, (\gamma v)_{xx}\big)_0 + \big(u_y, (\gamma v)_{xy}\big)_0 - \big(au_x, (\gamma v)_x\big)_0 + (cu, \gamma v)_0 - (u\,|u|^\varrho, \gamma v)_0$$

für $u \in W_2{}^1(D)$ und $v \in \mathring{W}_2{}^2(D)$ wohldefiniert. Es ist $B(u, \cdot)$ linear, und es gilt

$$|B(u, v)| \leqq c_8(\|u\|_1) \|v\|_2 \quad \text{für} \quad u \in W_2{}^1(D) \quad \text{und} \quad v \in W_2{}^2(D). \tag{5.3}$$

Man bestätigt mit partieller Integration die Beziehung

$$(Pu, \gamma v)_0 - \int_{\partial D} \gamma v(Tu + au_x)\, n_1\, ds + \int_{\partial D} (\gamma v)_x\, d_n u\, ds = B(u, v) \tag{5.4}$$

für $u \in W_2{}^3(D)$ und $v \in W_2{}^2(D)$. Neben den in Abschnitt 2 eingeführten Funktionenmengen $D(L)$ und $D(L^+)$ und Hilbert-Räumen $W_2{}^3(D, bd)$ und $W_2{}^3(D, bd^+)$ definieren wir noch die Hilberträume

$$W_2{}^2(D, bd) = \overline{D(L)}^{\|\cdot\|_2}, \quad W_2{}^2(D, bd^+) = \overline{D(L^+)}^{\|\cdot\|_2},$$
$$W_2{}^2(D, \widetilde{bd}) = \overline{D(L) \cap D(L^+)}^{\|\cdot\|_2}.$$

Wir notieren die folgenden stetigen Einbettungen:

$$W_2{}^2(D, bd) \hookrightarrow \mathring{W}_2{}^1(D) \cap W_2{}^2(D), \qquad W_2{}^2(D, bd^+) \hookrightarrow \mathring{W}_2{}^1(D) \cap W_2{}^2(D),$$
$$W_2{}^2(D, \widetilde{bd}) \hookrightarrow W_2{}^2(D, bd); \qquad W_2{}^2(D, \widetilde{bd}) \hookrightarrow W_2{}^2(D, bd^+).$$

Aus (5.4) erhält man jetzt

$$(Pu, \gamma v)_0 = B(u, v) \quad \text{für} \quad u \in W_2^3(D, bd) \quad \text{und} \quad v \in W_2^2(D, bd^+). \tag{5.5}$$

Von $f = f(x, y, z)$ setzen wir voraus:

(V) (i) $f = f(x, y, z)$ ist in $\bar{D} \times \mathbf{R}$ definiert und bezüglich z stetig.
(ii) $\left\|f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot))\right\|_0 \leqq c_9 + c_{10} \|u\|_1^{1/2}$ für $u \in \mathring{W}_2^1(D)$.

Die Forderung (ii), d. h. die Existenz von $\| f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)) \|_0$ beinhaltet auch die Voraussetzung, daß $f(x, y, z)$ in (x, y) meßbar sein soll. (V) bedeutet also: f erfüllt die Carathéodory-Bedingungen und besitzt ein gewisses Wachstumsverhalten in der dritten Variablen.

Definition 1: Die Funktion $u \in \mathring{W}_2^1(D)$ heißt *verallgemeinerte schwache Lösung* des Problems (5.1), wenn gilt

$$B(u, v) = \big(\gamma f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)), v\big)_0 \quad \text{für alle} \quad v \in W_2^2(D, \widetilde{bd}). \tag{5.6}$$

1. Ist u verallgemeinerte schwache Lösung des Problems (5.1) und gilt $u \in C^3(\bar{D})$, so hat man $Pu = f(x, y, u)$ f. ü. in D und $u = 0$ auf ∂D wegen $u \in \mathring{W}_2^1(D)$. 2. Wegen (5.3) und der Definition von $W_2^2(D, \widetilde{bd})$ genügt es, die Gleichheit in (5.6) für alle $v \in D(L) \cap D(L^+)$ zu fordern.

6. Existenz verallgemeinerter schwacher Lösungen

$\big(W_2^2(D, \widetilde{bd}), (\cdot, \cdot)_2\big)$ ist ein separabler Banach-Raum, in dem $D(L) \cap D(L^+)$ dicht liegt. Es gibt damit eine Funktionenfolge $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ mit folgenden *Eigenschaften*:

(E) 1. $\{\varphi_j\} \subset D(L) \cap D(L^+)$;
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ ist linear unabhängig für jedes $m \in \mathbf{N}$;
3. die endlichen Linearkombinationen der φ_j liegen dicht in $W_2^2(D, \widetilde{bd})$;
4. $(\varphi_i, \varphi_j)_1 = \delta_{ij}$ für $i, j \in \mathbf{N}$.

Diese Funktionenfolge (Basis in $W_2^2(D, \widetilde{bd})$) wird im Beweis des folgenden Satzes zur Konstruktion von Näherungslösungen der Gleichung (5.6) verwendet.

Satz 4: *Unter den Voraussetzungen aus Satz* 1 *an die Funktionen a und c und den Voraussetzungen* (V) *an die Funktion f besitzt das Problem* (5.1) *eine verallgemeinerte schwache Lösung.*

Beweis: Zur Vorgehensweise vergleiche man die Arbeit [10].

1. *Schritt:* Für $r \in \mathbf{N}$ beliebig wird zunächst gezeigt, daß es Zahlen $c_{1r}, \ldots, c_{rr}$ derart gibt, daß für $u_r = c_{1r}\varphi_1 + \cdots + c_{rr}\varphi_r$ die Gleichungen

$$B(u_r, \varphi_n) = \big(\gamma f(\cdot, \cdot, u_r(\cdot, \cdot)), \varphi_n\big)_0 \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, r \tag{6.1}$$

gelten. Dazu führen wir die folgenden Spaltenvektoren ein:

$$\begin{aligned} &\zeta = (c_{ir})_{1 \leq i \leq r}, \quad \varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}, \quad \eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq r} \\ &\text{mit} \quad \eta_i = B(\zeta^T \cdot \varphi, \varphi_i) - \big(\gamma f(\cdot, \cdot, \zeta^T \cdot \varphi), \varphi_i\big)_0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Man beachte $u_r = \zeta^T \cdot \varphi$ und $\|u_r\|_1 = |\zeta|$ wegen (E)/4. Durch (6.2) wird eine Abbildung $J : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$, $J(\zeta) = \eta$, definiert. Nach Voraussetzung an f ist diese stetig. Es ist zu zeigen, daß J eine Nullstelle besitzt. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz ist das gegeben, wenn wir zeigen können, daß es eine positive Zahl τ mit der Eigenschaft gibt, daß für alle ζ mit $|\zeta| = \tau$ gilt $\zeta^T \cdot J\zeta \geqq 0$ [6: Lemma 4.3/S. 53]. Ausgehend von (6.2) wird dies durch einfache Abschätzungen nachgewiesen, wenn man (5.2), (5.5) sowie (V)/(ii) verwendet und $\|u_r\|_1 = |\zeta|$ beachtet.

2. *Schritt:* Ist u_r eine im 1. Schritt definierte Lösung von (6.1), so folgt aus (6.1), $B(u_r, \varphi_n) = (Pu_r, \gamma\varphi_n)_0$, (5.2) und (V)/(ii)

$$c_{11} \|u_r\|_1 \leqq c_9 + c_{10} \|u_r\|_1^{1/2} \leqq c_q + \frac{1}{2\varepsilon} c_{10}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \|u_r\|_1$$

mit einem $\varepsilon > 0$. Wählt man $\varepsilon < 2c_{11}$, so ergibt sich mit von r unabhängigen Konstanten

$$\|u_r\|_1 \leqq c_{12}' \quad \text{und} \quad \|f(\cdot, \cdot, u_r(\cdot, \cdot))\|_0 \leqq c_{13}. \tag{6.3}$$

3. *Schritt*: In (6.1) wird jetzt der Grenzübergang $r \to \infty$ durchgeführt (es werden häufig Teilfolgen ausgewählt — wir vereinbaren, diese wie die jeweilige Ausgangsfolge und schwache Konvergenz mit $\rightharpoonup$ zu bezeichnen). Es ist $\{u_r\} \subset \mathring{W}_2^1(D)$. Dies ist ein reflexiver Hilbert-Raum, so daß aus (6.3) die Existenz einer Teilfolge $\{u_r\}$ (von $\{u_r\}$) und eines Elementes $u \in \mathring{W}_2^1(D)$ mit $u_r \rightharpoonup u$ in $W_2^1(D)$ folgt. Nach einem Einbettungssatz von Sobolew [11: Consequence 6.2/p. 107] ist $\mathring{W}_2^1(D)$ kompakt eingebettet in $L_q(D)$ für beliebiges $q \geqq 1$. Es ist dann (man beachte $\varrho \geqq -1/2$) insbesondere $u_r \to u$ in $L_{2\varrho+2}(D)$ und auch in $L_2(D)$. Ferner folgt $(u_r)_x \rightharpoonup u_x$ und $(u_r)_y \rightharpoonup u_y$ in $L_2(D)$, so daß zunächst für alle $v \in D(L) \cap D(L^+)$

$$\begin{aligned} &B(u_r, v) + (u_r |u_r|^\varrho, \gamma v)_0 \\ &\to (ku_x, (\gamma v)_{xx})_0 + (u_y, (\gamma v)_{xy})_0 - (au_x, (\gamma v)_x)_0 + (cu, \gamma v)_0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

für $r \to \infty$ bewiesen ist. Aus $u_r \to u$ in $L_{2\varrho+2}(D)$ folgt $(u_r |u_r|^\varrho, \gamma v)_0 \to (u |u|^\varrho, \gamma v)_0$ für $v \in D(L) \cap D(L^+)$, insgesamt also mit (6.4) schließlich

$$B(u_r, v) \to B(u, v) \quad \text{für} \quad v \in D(L) \cap D(L^+). \tag{6.5}$$

Wegen $u_r \to u$ in $L_2(D)$ und (V)/(i) gilt für eine Teilfolge $\{u_r\}$

$$f(x, y, u_r(x, y)) \to f(x, y, u(x, y)) \quad \text{für f. a.} \quad (x, y) \in D,$$

mit $u \in \mathring{W}_2^1(D)$ und (V)/(ii) hat man $f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)) \in L_2(D)$ und nach (6.3) gilt $\|f(\cdot, \cdot, u_r(\cdot, \cdot))\|_0 \leqq c_{13}$ unabhängig von r. Deshalb folgt nach [6: Lemma 1.3] für alle $j \in \mathbf{N}$

$$(f(\cdot, \cdot, u_r(\cdot, \cdot)), \varphi_j)_0 \to (f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)), \varphi_j)_0 \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Aus $B(u_r, \varphi_j) = (\gamma f(\cdot, \cdot, u_r(\cdot, \cdot)), \varphi_j)_0$ für $j = 1, 2, \ldots, r$ erhält man dann mit (6.5) $B(u, \varphi_j) = (\gamma f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)), \varphi_j)_0$ für alle j und hiermit (man beachte (E) und (5.3)) $B(u, v) = (\gamma f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot)), v)_0$ für alle $v \in D(L) \cap D(L^+)$ bzw. $v \in W_2^2(D, \widetilde{bd})$ ∎

1. Ausgehend von Satz 2 kann ein zu Satz 4 analoger Satz für das Problem

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{P}v := L^+v - v\,|v|^\varrho = g(x, y, v) \textit{ in } D \\ &v = 0 \textit{ auf } \partial D \textit{ und } v_x = 0 \textit{ auf } \Gamma_0^+ \cup \delta_1 \end{aligned}\right\}$$

formuliert und bewiesen werden. 2. Hängt f nicht von u ab, so kann Satz 4 wie folgt erweitert werden: Zu $f \in W_2^{-1}(D)$ existiert ein $u \in \mathring{W}_2^1(D)$ mit $B(u, v) = (\gamma f, v)_0$ für alle $v \in W_2^2(D, \widetilde{bd})$.

LITERATUR

[1] BABITSCH, W. M., u. a.: Lineare Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag 1967.

[2] BAIMENOV, B.: Boundary value problems for equations of mixed-composite type. Diff. Equ. 17 (1981), 8–11. Transl. from Дифф. ур-ия 17 (1981), 13–17.

[3] BASAROV, D., and M. M. MEREDOVA: A boundary value problem for a third order mixed-composite equation. Diff. Equ. 15 (1979), 238—239. Transl. from Дифф. ур-ия 15 (1979), 343—344.
[4] DZHURAEV, T. D., and M. MAMAZHANOV: Correctness of the formulation of boundary value-problems for a class of third order parabolic-hyperbolic equations. Diff. Equ. 19 (1983), 31—42. Transl. from Дифф. ур-ия 19 (1983), 37—50.
[5] JENTSCH, W.: Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für eine Klasse von linearen partiellen Differentialgleichungen 3. Ordnung vom gemischt-zusammengesetzten Typ. Dissertation D 83. Berlin (West): Technische Universität 1975.
[6] LIONS, J. L.: Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris: Dunod 1969.
[7] MEREDOV, M.: On a boundary value problem for a class of mixed equations of higher order. Sov. Math. Dokl. 14 (1973), 70—73. Transl. from Докл. Акад. Наук СССР 208 (1973).
[8] MEREDOV, M.: A multidimensional equation of mixed-composite type. Diff. Equ. 17 (1981), 726—729. Transl. from Дифф. ур-ия 17 (1981), 1122—1127.
[9] MÜLLER, A. H.: Über schwache und starke Lösungen bei linearen Systemen von partiellen Differentialgleichungen. Dissertation D 83. Berlin (West): Technische Universität 1977.
[10] MÜLLER-RETTKOWSKI, A.: Ein Randwertproblem für eine nichtlineare Gleichung gemischten Typs im $\mathbf{R}^3$. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 413—423.
[11] NEČAS, J.: Les methodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris: Masson 1967.
[12] SALAHITDINOV, M. S.: Some correct problems for the equation $y^m u_{xxx} + u_{xyy} = 0$. Sov. Math. 4 (1963), 710—713. Transl. from Докл. Акад. Наук СССР 150 (1963), 492—495.
[13] SCHNEIDER, M.: Funktionalanalytische Methoden zur Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen vom gemischten Typ. Überblicke Mathematik 7 (1974), 219 bis 265.
[14] VRAGOV, V. N.: An equation of mixed-composite type. Diff. Equ. 9 (1973), 132—134. Transl. from Дифф. ур-ия 9 (1973), 169—171.
[15] ZUEVA, R. A.: Solvability of a boundary value problem for a third order quasilinear equation of mixed-composite type. Diff. Equ. 15 (1978), 37—41. Transl. from Дифф. ур-ия 15 (1979), 54—60.

Manuskripteingang: 08. 04. 1985

VERFASSER:

Dr. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI
Mathematisches Institut I der Universität
D-7500 Karlsruhe 1 Englerstr. 2, PF 6380