Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (3) 1987, S. 241–249

Zur Modellierung stochastischer Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen

H.-J. GIRLICH

Prof. H. Beckert zum 65. Geburtstag gewidmet

Es werden Randwertaufgaben unter Berücksichtigung zufälliger Einflußfaktoren wie Meßfehler, zufällige Störungen und hydrodynamische Instabilitäten mittels Methoden der stochastischen Analysis behandelt. Besonderes Augenmerk wird dem Dirichletproblem bei Unsicherheit geschenkt, wobei angestrebt wurde, mit möglichst einfachen Voraussetzungen über die Abhängigkeitsstruktur der verwendeten Zufallsfelder auszukommen.

В качестве примеров, которые требуют методы стохастического анализа, расматриваются погрешности измерения, белый шум и гидродинамическая неустойчивость в связи с краевыми задачами. В главной части работы применяется концепция слабо коррелированных случайных полей к стохастической задаче Дирихле при упрощающих предположениях о зависимости случайных величин.

Measuring errors, random noise, and hydrodynamic instabilities in connection with boundary value problems will be considered as examples which leed to stochastic analysis. In the main part of this paper the concept of the weakly correlated random field is applied on Dirichlet's problem under uncertainties using simplifying dependence assumptions.

1. Einleitung. Die vorliegende Note wurde durch drei Dissertationen angeregt, die partielle Differentialgleichungen mit stochastischen Einflußgrößen zum Gegenstand haben und aus dem *Leipziger Mathematischen Seminar* hervorgegangen sind. Mit ihr soll vor allem H. BECKERT gedankt werden, der Arbeiten zur stochastischen Analysis inspiriert und gefördert hat. Es werden Grundprobleme der Behandlung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen bei Unsicherheit erörtert und einige Lösungsansätze vorgeschlagen. Der Modellierungsaspekt steht dabei im Vordergrund. Auf motivierende physikalische Interpretation wird nicht verzichtet. Hauptsächlich werden lineare Differentialgleichungen betrachtet. Die einfache Lösungstheorie erlaubt hier einfache stochastische Modelle zu verwenden. Die Problematik nichtlinearer Randwertaufgaben bedingt eine kompliziertere Stochastik, die im letzten Abschnitt allerdings nur angedeutet werden kann.

2. Das klassische Dirichletproblem. Es bezeichne D ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand ∂D im euklidischen Raum R^d der Dimension d. Auf D sei eine lineare elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung

$$L[u] := -\sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + au = g \tag{1}$$

definiert, wobei für jedes $x \in \overline{D} := D \cup \partial D$ die Matrix $\left(a_{ik}(x)\right)$ symmetrisch und positiv definit ist. Unter einer Lösung des Dirichletproblems zur Gleichung (1) und vorgegebener stetigen Randfunktion f auf ∂D verstehen wir eine in D reguläre Lösung von (1) mit der Eigenschaft

$$\lim_{x\to x'} u(x) = f(x'), \quad x' \in \partial D. \tag{2}$$

Sind die Koeffizienten a_{ik} und a in D hölderstetig differenzierbar und gilt weiterhin $a(x) \geqq 0$, so existiert die Greensche Funktion G der Gleichung $L[u] = 0$ zum Gebiet D und besitzt für jedes feste $x \in D$ in jedem $y \in \partial D$ eine stetige Konormalenableitung $\partial G(x, y)/\partial n_y$. Die für hölderstetiges g eindeutig bestimmte Lösung des Dirichletproblems (1), (2) läßt sich damit bekanntlich darstellen durch

$$u(x) = \int_{\partial D} f(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n_{x'}} dx' + \int_{D} g(y)\, G(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Für die Poissonsche Differentialgleichung $-\Delta u = g$ und den Einheitskreis $D = \mathcal{K}_1^2(0) := \{x \in \mathrm{R}^2 \mid |x| < 1\}$ — wir verwenden hierbei die euklidische Norm — sind die obigen Bedingungen erfüllt, und es folgt

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{Re} \left(\frac{z^* + x^*}{z^* - x^*} \right) d\alpha + \int_{|y^*|<1} g(y) \ln \frac{|1 - x^* \overline{y^*}|}{|x^* - y^*|} dy \right), \tag{4}$$

wobei $x^* = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$, $y^* = y_1 + iy_2$ und $z^* = e^{i\alpha}$ gesetzt wurde. Für den Poissonkern

$$p(r, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + x^*}{1 - x^*} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}$$

gilt die für uns nützliche Beziehung

$$\int_0^{2\pi} p(r, \varphi - \alpha)\, p(s, \psi - \alpha)\, d\alpha = p(rs, \varphi - \psi). \tag{5}$$

Zwei Spezialfälle mögen noch physikalisch interpretiert werden.

Beispiel 1: Es sei

$$-\Delta u(x) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{K}_1^2(0) \quad \text{und} \quad f(x') = 0 \quad \text{für} \quad x' \in \partial \mathcal{K}_1^2(0). \tag{6}$$

Zu vorgegebener Kraftdichte g gibt u gemäß (4) die stationäre Transversalschwingung einer am Rand eingespannten kreisförmigen Membran an.

Beispiel 2: Es sei

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{K}_1^2(0). \tag{7}$$

Zu vorgegebener Randtemperatur f liefert u gemäß (4) die stationäre Temperaturverteilung auf einer kreisförmigen Metallplatte.

Die Frage nach der Stabilität der Lösung eines (eindeutig lösbaren) Dirichletproblems erfordert, die Änderung von u in Abhängigkeit von der Abänderung der Randfunktion f zu untersuchen. Der Variationsbereich der Randfunktionen werde durch einen metrischen Raum $\mathcal{F}$ von Funktion auf ∂D beschrieben. Vermöge (3) wird $\mathcal{F}$ eine Gesamtheit $\mathcal{U}$ von Funktionen auf D erzeugen, die in einen geeigneten metrischen Raum eingebettet werden kann. Hieran schließen unmittelbar Approximationsprobleme an, von denen wir eines im nächsten Abschnitt behandeln. Werden quantitative Aussagen benötigt, sind $\mathcal{F}$ weitere Strukturen aufzuprägen. Mit einer passenden Halbordnung läßt sich z. B. Intervallarithmetik betreiben (siehe K.-U. JAHN [7]). Mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf (den Borelschen Teilmengen von) $\mathcal{F}$ kann etwa der Meßprozeß zur Gewinnung der Randwerte modelliert werden. Von Abschnitt 4 an werden wir uns mit derartigen Wahrscheinlichkeitsstrukturen befassen.

3. Ein Approximationssatz. H. BECKERT stellte in [1] eine zum Dirichletproblem inverse Aufgabe, die in der Terminologie von Beispiel 2 wie folgt formuliert werden kann: Zu vorgegebener Temperaturverteilung u_0 auf einer Kurve $\Gamma \subseteqq D$ wird nach einer Randtemperaturverteilung f gefragt, deren zugehöriges u gemäß (4) dem vorgegebenen u_0 auf Γ möglichst nahe kommt. Dieses Problem wurde für die Differentialgleichung (1) und ein stetig differenzierbares Flächenstück gelöst, das ganz in D liegt und D nicht zerlegt. Weitere Ergebnisse hierzu erzielte A. Göpfert (vgl. [5]). Wir beschränken uns auf die Angabe eines Spezialfalles des Beckertschen Approximationssatzes. Dazu bezeichne $\mathscr{C}_{2\pi}$ die Menge der 2π-periodischen stetigen Funktion auf $\mathbf{R}$. Zum Dirichletproblem (7), (2) werde zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ folgende Gesamtheit von Randfunktionen eingeführt:

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{f \in \mathscr{C}_{2\pi} \mid f(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon < \alpha < 2\pi\}.$$

Weiterhin sei $\Gamma = \{(r, \varphi) \mid 0 \leqq r < 1, \varphi = 0\}$ und $\mathscr{L}^2(\Gamma)$ bezeichne die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen auf Γ.

Approximationssatz: *Zu jedem $w \in \mathscr{L}^2(\Gamma)$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $f \in \mathcal{F}_\varepsilon$, so daß gilt*

$$\int_0^1 \left(w(r) - \int_0^\varepsilon f(\alpha)\, p(r, \alpha)\, d\alpha\right)^2 dr < \varepsilon.$$

Der in [1] geführte Beweis beruht auf dem Zerlegungssatz von Riesz und der eindeutigen Lösbarkeit des Dirichletproblems. An dem Ergebnis ist besonders bemerkenswert, daß schon auf einem sehr kleinen Randstück vorgenommene Änderungen des Nullniveaus ausreichen, um gewünschte Werte auf einer im Innern des Einheitskreises gelegenen Kurve Γ beliebig genau anzunähern.

4. Zufallsfelder 2. Ordnung. Bevor wir im nächsten Abschnitt speziell auf einer Gesamtheit von Randfunktionen eine Wahrscheinlichkeitsstruktur einführen, stellen wir einige allgemeine Eigenschaften von Zufallsfeldern 2. Ordnung zusammen. Diese basieren auf Ergebnissen, die z. B. bei I. Gihman und A. Skorohod [3] hergeleitet werden. Es seien $\mathcal{X}$ ein vollständiger separabler metrischer Raum, $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von $\mathcal{X}$ und μ ein endliches Maß auf $\mathfrak{X}$. Für jedes $x \in \mathcal{X}$ sei $\mathrm{z}(x)$ eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{A}, P]$ mit endlichen 2. Momentene das heißt, mit dem *Erwartungswert*

$$m(x) := \mathsf{E}\mathrm{z}(x) := \int_\Omega \mathrm{z}(x, \omega)\, P(d\omega)$$

und der *Korrelationsfunktion* B gemäß

$$B(x, y) := E\big(\mathrm{z}(x) - m(x)\big)\big(\mathrm{z}(y) - m(y)\big) \quad \text{für } x, y \in \mathcal{X}.$$

Integrationssatz: *Es sei H eine reellwertige Funktion auf $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, und es gelte $H(x, \cdot) \in \mathscr{L}^2(\mathcal{X})$ für jedes $x \in \mathcal{X}$. Weiterhin sei B im Punkt (x, x) für μ — fast alle x stetig und es gelte*

$$\int_{\mathcal{X}} B(x, x)\, \mu(dx) < \infty. \tag{8}$$

Dann existiert eine separable und meßbare Modifikation des Zufallsfeldes $\mathrm{z} = \{\mathrm{z}(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$, so daß das Integral

$$\mathrm{v}(x) := \int_{\mathcal{X}} \mathrm{z}(y)\, H(x, y)\, \mu(dy) \in L^2(\Omega) \tag{9}$$

definiert und endlich ist mit Wahrscheinlichkeit 1 *für jede Realisierung von* $\mathfrak{z}$, *und es gilt nach dem Satz von Fubini*

$$\mathsf{E}\mathfrak{v}(x) = \int_{\mathscr{X}} m(y)\, H(x, y)\, \mu(dy) =: M(x), \tag{10}$$

$$\mathsf{E}\big(\mathfrak{v}(x) - M(x)\big)\big(\mathfrak{v}(y) - M(y)\big) = K(x, y)$$

$$:= \int_{\mathscr{X}} \int_{\mathscr{X}} H(x, x')\, B(x', y')\, H(y, y')\, \mu(dx')\, \mu(dy'). \tag{11}$$

Als ein Beispiel für ein Zufallsfeld 2. Ordnung kann ein *Gaußsches Feld* dienen. Dazu gibt man sich eine beliebige Funktion m auf $\mathscr{X}$ sowie eine positiv definite Funktion B auf $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ vor und legt die charakteristische Funktion von n Feldgrößen — an den Stellen $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{X}$ — durch den Ausdruck

$$\chi(s_1, \ldots, s_n) = \exp\left(-0.5 \sum_{j,k=1}^{n} B(x_j, x_k)\, s_j s_k + i \sum_{k=1}^{n} m(x_k)\, s_k\right)$$

fest. Damit sind endlich viele Feldgrößen stets normalverteilt.

5. Das stochastische Dirichletproblem. Das Dirichletproblem (1), (2) werde dahingehend modifiziert, daß die vorzugebende Randfunktion nur durch ihre Zugehörigkeit zu einer Gesamtheit $\mathscr{F}$ von Randfunktionen charakterisiert ist. $\mathscr{F}$ sei parametrisiert, d. h. es existiere eine Menge Ω, so daß $\mathscr{F} = \{f(\cdot, \omega) : \partial D \to \mathsf{R}^1 \mid \omega \in \Omega\}$ gilt. Als mathematisches Modell einer Messung an der Stelle $x \in \partial D$ werde eine Zufallsgröße $\mathfrak{f}(x) = f(x, \cdot)$ gewählt, als Modell des gesamten Meßvorganges auf dem Rand ∂D eine Zufallsfunktion auf $[\Omega, \mathfrak{A}, P]$: $\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}(x) : \Omega \to \mathsf{R}^1 \mid x \in \partial D\}$. In Anlehnung an die Gaußsche Fehlertheorie sei $\mathfrak{f}$ ein Gaußsches Feld mit der Erwartung m und der Korrelationsfunktion B.

Unter den Voraussetzungen von Abschnitt 2 an das Gebiet $D \subsetneqq \mathsf{R}^d$ gilt für die Greensche Funktion zu (1) für $d = 2$ und $d = 3$ die Inklusion $\partial G(x, \cdot)/\partial n \in L^2(\partial D)$ für $x \in D$. Fordern wir noch $\int_{\partial D} B(x, x)\, dx < \infty$, so können wir nach dem Integrationssatz über die Integraltransformation

$$\int_{\partial D} \mathfrak{f}(x')\, \frac{\partial G(x, x')}{\partial n_{x'}}\, dx' =: \mathfrak{u}(x) \tag{12}$$

ein zufälliges Lösungsfeld $\mathfrak{u}$ auf $[\Omega, \mathfrak{A}, P]$ erklären, das wir nach [4] als *Lösung des stochastischen Dirichletproblems*

$$L[\mathfrak{u}] = 0, \quad \lim_{x \to x'} \mathfrak{u}(x) = \mathfrak{f}(x'), \quad x' \in \partial D\ P\text{-fast sicher} \tag{13}$$

bezeichnen. Interpretieren wir $m(x') = \mathsf{E}\mathfrak{f}(x') =: \bar{f}(x')$ als gemittelten Randwert und $B(x', x')$ als Streuung um diesen Wert an der Stelle $x' \in \partial D$, so liefern uns die Gleichungen (10) und (11) die Streuung $K(x, x)$ um die gemittelte Lösung $\bar{u}(x) = M(x)$ an der Stelle $x \in D$.

Wir wollen dieses Modell der Fehlerfortpflanzung am stochastischen Dirichletproblem für die Laplacesche Differentialgleichung und den Einheitskreis in der Ebene erproben. Dabei werde eine Schar stationärer Gaußscher Randprozesse betrachtet mit verschwindender Erwartung und Korrelationsfunktion

$$B_\varepsilon(\tau) = 0.5\varepsilon + \varepsilon(1 - 0.5\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^{k-1} \cos k\tau. \tag{14}$$

Der Scharparameter $\varepsilon \in (0, 1)$ ist ein Maß für die Stärke der Korrelation zweier Randpunkte. Lassen wir ε gegen Null streben, so nimmt der Grad der Abhängigkeit monoton ab, bis an der Grenze stochastische Unabhängigkeit — ein sogenanntes *weißes Rauschen* — erreicht wird. Unter Berücksichtigung der Eigenschaft (5) des Poissonkerns erhalten wir aus (11) und (14) für die Streuung an der Stelle $x \triangleq (r, \varphi)$ zu festem ε

$$\mathsf{D}_\varepsilon^2 u(x) = \int_0^{2\pi} \frac{B_\varepsilon(\tau)\,(1 - r^4)\,d\tau}{1 - 2r\cos\tau + r^4} = \frac{0.5\varepsilon(1 + r^2)}{1 - r^2(1 - \varepsilon)}.$$

Die Streuung fällt demnach vom Niveau 1 auf der Kreisperipherie monoton in r auf das Niveau 0.5ε im Kreismittelpunkt. Liegt am Rand ein weißes Rauschen, so ergibt sich formal

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathsf{D}_\varepsilon^2 u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } r = 1 \\ 0 & \text{für } 0 \leqq r < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Demnach heben sich unkorrelierte Randstörungen in Hinblick auf die Lösung von (13) im Falle von (7) und (14) im Mittel gegenseitig auf.

Allerdings ist dieser Schluß aus (15) problematisch, da für ein weißes Rauschen die Korrelationsfunktion B_0 für jedes (x, x) unstetig und damit der Integrationssatz nicht mehr anwendbar ist. Analoge Schwierigkeiten haben wir bei stochastischen Schwingungsproblemen — wie etwa der Schwingung eines Zeltdaches bei schloßendem Hagelschlag. Die zufällig auf die eingespannte Membran treffenden Hagelkörner bewirken eine auslenkende Kraft, die durch ein weißes Rauschen $\mathfrak{y}$ modelliert werden kann. Für jedes Punktepaar $x, y \in D$ bilden die Kräfte $\mathfrak{g}(x)$ und $\mathfrak{g}(y)$ unabhängige Zufallsgrößen. Die Realisierungen des zufälligen Feldes $\mathfrak{g}$ sind fast überall unstetig, so daß ein Integral in der Art von (9) nicht erklärt werden kann. Auch hier liegt es nahe, die Korrelationsfunktion B_0 eines weißen Rauschens durch stetige Korrelationsfunktionen B_ε zu approximieren. W. Purkert und J. vom Scheidt führen in [12] dazu das Konzept schwach korrelierter Felder ein. Wir werden im nächsten Abschnitt mit einem etwas einfacheren Modellansatz auskommen.

6. ε-korrelierte Felder. Ein Zufallsfeld 2. Ordnung $\mathfrak{z} = \{\mathfrak{z}(x) \mid x \in \mathsf{R}^d\}$ heißt *ε-korreliert*, falls dessen Korrelationsfunktion stetig ist und für alle Punktepaare verschwindet, die einen euklidischen Abstand größer als ε besitzen. Für die Korrelationsfunktion B_ε gilt demnach

$$B_\varepsilon(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad |x - y| > \varepsilon \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathsf{R}^d. \tag{16}$$

Als Lösung des stochastischen Dirichletproblems

$$L[\mathfrak{u}] = \mathfrak{g}, \quad \lim_{x \to x'} \mathfrak{u}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x' \in \partial D \ P\text{-fast sicher} \tag{17}$$

bei ε-korreliertem Zufallsfeld $\mathfrak{g}$ auf $D \subseteqq \mathsf{R}^d$ mit Korrelationsfunktion B_ε bezeichnen wir das Feld $\mathfrak{u}$ gemäß

$$\mathfrak{u}(x) := \int_D \mathfrak{g}(x')\,G(x, x')\,dx', \quad x \in D. \tag{18}$$

Nach dem Integrationssatz ist (18) erklärt und es gilt nach (11)

$$K_\varepsilon(x, y) = \int_D \left[\int_{D \cap \mathcal{K}_\varepsilon^d(y')} G(x, x')\,B_\varepsilon(x', y')\,dx'\right] G(y, y')\,dy'. \tag{19}$$

Wir betrachten nun eine Schar ε-korrelierter Felder. Darunter verstehen wir eine Schar von W-Maßen, die durch die Gesamtheit $\mathscr{B} = \{B_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ von Korrelationsfunktionen zu fester mathematischer Erwartung m beschrieben werden. Ist die Gesamtheit $\mathscr{B}$ gleichmäßig beschränkt, gibt es also ein $c_0 \in \mathsf{R}$ mit

$$B_\varepsilon(x, x) < c_0 \quad \text{für alle} \quad x \in D \quad \text{und} \quad \varepsilon > 0, \tag{20}$$

so führt der Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ bei K_ε gemäß (19) wie unter (15) zu verschwindenden 2. Momenten. Allerdings erlaubt uns die Eigenschaft (16), die Konvergenzgeschwindigkeit von $K_\varepsilon \to 0$ zu explizieren. Dazu verwenden wir den in [15] geprägten Begriff der *Intensität I des Feldes* $\mathbf{g}$ *bez.* $\mathcal{B}$

$$I(x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathcal{K}_\varepsilon^d(0)} B_\varepsilon(x, x + z)\, dz, \quad x \in D. \tag{21}$$

Bekanntlich gilt $\mu_d(\mathcal{K}_\varepsilon^d(0)) = \varepsilon^d \mu_d(\mathcal{K}_1^d(0))$ mit dem Lebesgue-Maß μ_d im R^d, so daß die Intensität unter der Bedingung (20) endlich ist. Aus (19) folgt dann für ein $G(x, \cdot) \in \mathcal{L}^2(D)$ über den Satz von Fubini

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^d} K_\varepsilon(x, y) = \int_D G(x, y')\, G(y, y')\, I(y')\, dy' =: K(x, y). \tag{22}$$

Das positiv definite K_ε erzeugt also mit dem nichtnegativen I über (22) ein positiv definites K, das als Korrelationsfunktion eines Feldes z auf D mit verschwindender mathematischer Erwartung aufgefaßt werden kann. Für die Lösung des stochastischen Dirichletproblems (17) mit der ε-korrelierten Randfunktion $\mathbf{g}$ erhalten wir damit die Näherung

$$\mathbf{u}(x) \approx \bar{u}(x) + \sqrt{\varepsilon^d}\, \mathbf{z}(x), \tag{23}$$

wobei $\bar{u}$ die *gemittelte Lösung* bezeichnet, das heißt, die Lösung des entsprechenden klassischen Dirichletproblems mit der gemittelten rechten Seite $\bar{g} = \mathsf{E}\mathbf{g}$. Diese wird gestört durch einen Term, dessen stochastischer Anteil ein Zufallsfeld 2. Ordnung mit verschwindender mathematischer Erwartung und Korrelationsfunktion K ist.

7. Schwach abhängige Felder. Die Näherung (23) bedarf einer mathematischen Präzisierung. Insbesondere sind wir an Bedingungen interessiert, die einen zentralen Grenzwertsatz zur Folge haben, so daß das Zufallsfeld z ein Gaußsches Feld ergibt. Ein Zufallsfeld $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}(x) \mid x \in \mathsf{R}^d\}$ heißt *ε-abhängig*, falls $\mathbf{z}(x)$, $\mathbf{z}(y)$ unabhängig sind für alle $x, y \in \mathsf{R}^d$ mit $|x - y| > \varepsilon$. Eine Folge von Zufallsfeldern $(\mathbf{z}_n)$ heißt *schwach abhängig*, falls ein $c > 0$ existiert, so daß für jedes $\varepsilon > c/n$ das Feld $\mathbf{z}_n$ ε-abhängig ist.

Grenzverteilungssatz: *Es sei* $(\mathbf{g}_n)$ *eine schwach abhängige Folge von Zufallsfeldern auf* R^d *mit gleichmäßig beschränkten* 4. *Momenten, mit gleichen mathematischen Erwartungen* m *und stetigen Korrelationsfunktionen. Weiterhin sei* G *die Greensche Funktion des Dirichletproblems* (1), (2) *mit* $d = 2$ *bzw.* $d = 3$. *Dann konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen des Feldes* $\mathbf{v}_n$ *mit*

$$\mathbf{v}_n(x) := \sqrt{n^d}\left(u_n(x) - \bar{u}(x)\right) = \sqrt{n^d} \int_D \left(\mathbf{g}_n(y) - m(y)\right) G(x, y)\, dy$$

schwach gegen die endlichdimensionalen Verteilungen eines Gaußschen Feldes $\mathbf{z}$ *mit verschwindender Erwartung und Korrelationsfunktion* K *gemäß* (22).

B. Meusel [10] bewies einen derartigen Grenzverteilungssatz für schwach korrelierte Felder. Solche Felder besitzen endliche Momente beliebig hoher Ordnung und erfordern den für unsere Zwecke unhandlichen Begriff der maximal ε-benachbarten Menge (vgl. [10, 15]). F. Liese [9] gab einen allgemeineren Grenzverteilungssatz an, der auf dem Erfülltsein einer Mischungsbedingung basiert. Wie man sich leicht überzeugt, ist diese wegen der schwachen Abhängigkeit der Folge erfüllt. Damit ist obiger Satz eine einfache Folgerung des Lieseschen Satzes.

Die Wirkung eines schwach abhängigen Feldes auf die Streuung der Lösung des stochastischen Dirichletproblems ergibt sich damit zu

$$\mathsf{D}_\varepsilon^2\mathbf{u}(x) \approx \varepsilon^d \int_D G^2(x, y)\, I(y)\, dy. \tag{24}$$

8. Näherungsverfahren. Spezielle Randwertaufgaben können durch Entwicklung nach Eigenfunktionen auch numerisch behandelt werden. Dabei wird vom Randwertproblem (1), (2) zum Eigenwertproblem

$$L[u] = \lambda u, \; u(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial D \tag{25}$$

übergegangen. Für den Laplaceschen Differentialoperator und den Einheitskreis lassen sich die Eigenfunktionen explizit angeben und damit die Streuung der Lösung des stochastischen Dirichletproblems (17) nach (24) approximieren. Bei einem homogenen ε-korrelierten Feld mit $B_\varepsilon(x, y) = B_\varepsilon(x - y)$ ergibt sich im Beispiel 1 (vgl. [10, 11])

$$\mathsf{D}_t{}^2 u(x) \approx 2\varepsilon^2\pi^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} J_k{}^2({}^i\lambda\,|x|)_k\left({}^i\lambda_k{}^4 J'^2({}^i\lambda_k)\right),$$

wobei ${}^i\lambda_k$ die der Größe nach i-te positive Nullstelle der k-ten Besselfunktion J_k und N eine hinreichend große natürliche Zahl ist.

Bei komplizierteren Gebieten wird man Entwicklungsmethoden bevorzugen, die von einfacheren Funktionensystemen ausgehen, oder aber Differenzenverfahren benutzen. In [4] werden ein stochastisches Randwertproblem auf ein stochastisches Differenzenrandwertproblem zurückgeführt und Näherungen für die ersten beiden Momente der Lösung des stochastischen Dirichletproblems gewonnen.

9. Turbulenz. Die Einfachheit der bisher betrachteten Modelle basierte auf der Linearität der Differentialoperatoren und der Gültigkeit eines Unitätssatzes für die Lösung eines zugehörigen Randwertproblems. Diese Eigenschaften können im allgemeinen nicht unterstellt werden. Das zeigt bereits das folgende Beispiel der turbulenten Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Kanal unendlicher Tiefe: Das Geschwindigkeitsfeld u mit $u(x, t) = \left(\overset{1}{u}(x, t), \overset{2}{u}(x, t), \overset{3}{u}(x, t)\right)$ und das skalare Druckfeld p einer — wie auch immer gearteten — Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit der Zähigkeit ν ändern sich unter dem Wirken einer äußeren Kraft g entsprechend den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen

$$L[u, p] := \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{3} \overset{i}{u} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = g, \tag{26}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{27}$$

im Kanalgebiet $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathsf{R}^3 \mid |x_1| < 1\}$, wobei die für (26) möglichen Anfangsgeschwindigkeiten zusammengefaßt werden sollen in der Menge

$$\mathcal{H} = \{u_0 : \overline{D} \to \mathsf{R}^3 \mid (1 + |x|^2)^{-3/2}\, u_0 \in \left(\mathcal{L}^2(D)\right)^3,$$

$$\operatorname{div} u_0(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in D \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_0(x') = 0 \quad \text{für} \quad x' \in \partial D\}.$$

Die zufälligen Schwankungen der Geschwindigkeit und des Druckes in einem festen Punkt des Kanals lassen sich dabei nicht durch eine individuelle Lösung von (26) zu einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit $u_0 \in \mathcal{H}$ erklären. Stattdessen sind statistische Eigenschaften der „typischen" Phasenbewegung zu untersuchen. Dazu ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer Gesamtheit individueller Lösungen über (26) aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Anfangsgeschwindigkeiten $\mathcal{H}$ zu konstruieren (vgl. [6]).

Existenzsatz: *Es seien g eine nur von x_1 abhängige äußere Kraft und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{H}$, das in x_2- und x_3-Richtung translationsinvariant ist. Auf* *einem geeigneten Funktionenraum $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H})$ existiert dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß P, das auf den individuellen Lösungen von (2) konzentriert ist, dessen Einschränkung auf den Zeitpunkt $t = 0$ mit μ übereinstimmt und das gegenüber beliebigen zu den Kanalwänden parallelen Translationen invariant ist.*

B. KRAUSE [8] bewies diesen Satz im Anschluß an [16] durch Ausschöpfung von D durch endliche Teilgebiete $D_l = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1 < 1, |x_2| < l, |x_3| < l\}$ und mittels dazu gebildeter Näherungsmaße P_l. Die schwache Kompaktheit dieser Folge von Maßen liefert der Satz von Prochorov unter Verwendung von Apriori-Abschätzungen für die Galerkin-Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen.

Die hier gestreifte statistische Turbulenztheorie gründet sich auf ein Konzept, das E. HOPF 1940 in Leipzig entworfen hat (vgl. [6: S. 88]). Eine moderne Darstellung der Hopfschen Theorie bringt die Monographie von M. I. VIŠIK und A. V. FURSIKOV, deren deutsche Fassung [16] von H. Beckert herausgegeben wurde. Der weitere Ausbau der statistischen Theorie für die Navier-Stokes-Gleichungen wird die von D. RUELLE und F. TAKENS vorgeschlagene Konzeption einbeziehen müssen, deren Einsatz der Theorie topologischer dynamischer Systeme die Entstehung der Turbulenz adäquat modelliert (vgl. [13]).

LITERATUR

[1] BECKERT, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. **139** (1960), 255–264.

[2] BIEHOUNEK, J., KRAUSE, B., und B. RUMMLER: Umrisse der modernen statistischen Turbulenztheorie. Techn. Mechanik **4** (1983), 65–71.

[3] GIHMAN, I. I., and A. V. SKOROHOD: The Theory of Stochastic Processes I. Berlin: Springer-Verlag 1980.

[4] GIRLICH, H.-J.: Der Einfluß von Meßfehlern auf die Genauigkeit der Lösung von Randwertproblemen. Wiss. Z. Univ. Leipzig, Math-Nat. R. **16** (1967), 623–631.

[5] GÖPFERT, A.: Über L_2-Approximationssätze — eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. **31** (1965), 1–24.

[6] HOPF, E.: Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952), 87–123.

[7] JAHN, K.-U.: Intervall-Mathematik über halbgeordneten Banach-Räumen. Math.-Kongreß der DDR 1981, Vortragsauszüge 2, 31–32.

[8] KRAUSE, B.: Translationshomogene statistische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen im Kanal. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1984 (s. a.: Z. Anal. Anw. **3** (1987), 257–279).

[9] LIESE, F.: A limit theorem for sequences of weakly dependent random fields. In: Problems of Stochastic Analysis in Applications. (Ed.: J. VOM SCHEIDT). Wiss. Beitr. Ing.-Hochschule Zwickau **9** (1983), 290–305.

[10] MEUSEL, B.: Grenzverteilungsaussagen über die Lösungen stochastischer Rand- und Rand-Anfangswertprobleme partieller Differentialgleichungen mit schwach korrelierten Feldern. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1982.

[11] MEUSEL, B., and J. VOM SCHEIDT: Boundary-value problems of random differential equations with weakly correlated random functions. In: Problems of Stochastic Analysis in Applications (Ed.: J. VOM SCHEIDT). Wiss. Beitr. Ing.-Hochschule Zwickau **9** (1983), 118–133.

[12] PURKERT, W., und J. VOM SCHEIDT: Schwach korrelierte Prozesse und ihre Anwendungen. Sitzungsber. Akad. Wiss. DDR **23 N** (1980), 5–48.

[13] RICHTMYER, R. D. (Ed.): Principles of Advanced Mathematical Physics II. New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag 1981.

[14] VOM SCHEIDT, J. (Ed.): Problems of Stochastic Analysis in Applications. Wiss. Beitr. Ing.-Hochschule Zwickau **9** (1983), 1–337.

[15] vom Scheidt, J., and W. Purkert: Random Eigenvalue Problems. Berlin: Akademie-Verlag 1983.
[16] Višik, M. I., und A. V. Fursikov: Mathematische Probleme der statistischen Hydromechanik. Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G. 1986.

Manuskripteingang: 19. 04. 1985

VERFASSER:

Prof. Dr. Hans-Joachim Girlich
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig