Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (3) 1987, S. 257–279

Translationshomogene statistische Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen in einem dreidimensionalen Kanalgebiet

B. Krause

Es werden die aus einem vorgegebenen translationshomogenen Anfangsmaß hervorgehenden homogenen raum-zeitlichen statistischen Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen in einem dreidimensionalen Kanalgebiet untersucht. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen an den Kanalwänden wird zunächst eine Galerkin-Approximation der individuellen Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen mit Hilfe periodischer Funktionen vorgenommen. Die Konstruktion homogener statistischer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen gelingt dann nach einem Satz von Prochorov durch den Grenzübergang auf der Grundlage geeigneter Apriori-Abschätzungen und einer entsprechenden Approximation des Anfangsmaßes.

Исследуются однородные пространственно временные статистические решения системы Навье-Стокса в трехмерном канале, выходящие из заданной однородной начальной меры. С учётом граничных условий в канале строятся периодические галёркинские аппроксимации индивидуального решения системы Навье-Стокса. На основании некоторых априорных оценок и аппроксимации начальной меры удается построить однородные статистические решения системы Навье-Стокса предельным переходом вследствие теоремы Прохорова.

Homogeneous space-time statistical solutions of the Navier-Stokes equations in a three-dimensional channel are studied which are based on a given homogeneous initial measure. The individual solution of the Navier-Stokes equations is approximated by a periodical Galerkin-ansatz which satisfies the boundary conditions at the walls of the channel. Suitable a priori estimates and an approximation of the initial measure allow the limit process and ensure the existence of homogeneous statistical solutions of the Navier-Stokes equations by Prochorov's theorem.

1. Einleitung

Grundlage für die Beschreibung der Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit in einem Strömungsgebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ sind die Navier-Stokesschen Gleichungen. Für die Erklärung turbulenter Strömungen sind diese Bewegungsgleichungen jedoch noch mit einer geeigneten statistischen Betrachtungsweise zu verbinden, die den offensichtlich zufälligen Charakter der Turbulenz widerspiegelt. Die Theorie der statistischen Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen geht deshalb von einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ aus, das auf der Menge der für die Navier-Stokesschen Gleichungen möglichen Anfangsbedingungen erklärt wird und die Wahrscheinlichkeiten angibt, mit der zum Zeitpunkt $t = 0$ gewisse Geschwindigkeitsfelder $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ im Strömungsgebiet realisiert werden. Die sich aus diesem Anfangsmaß μ entwickelnde Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf den Trajektorien $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ der Navier-Stokesschen Gleichungen wird dann als (raum-zeitliche) statistische Lösung dieser Gleichungen bezeichnet.

Ausgehend von der grundlegenden Arbeit [3] wurden in [1, 9] umfassende Untersuchungen zu statistischen Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen publiziert, die sich zunächst nur auf endliche Strömungsgebiete Ω bezogen. Die Arbeiten [2, 7, 8] und die ausführliche Darstellung in [9] waren dann der Erweiterung dieser Theorie auf unendliche Strömungsgebiete $\Omega = \mathbf{R}^3$ gewidmet, um auch zur Beschreibung der homogenen Turbulenz einen geeigneten statistischen Lösungsbegriff bereitzustellen. Sowohl für das Anfangsmaß μ als auch für die daraus entstehende statistische Lösung P muß dazu die Invarianz bezüglich beliebiger räumlicher Translationen gefordert werden. Solche translationshomogenen Maße lassen sich aber nicht mehr auf dem Raume $(L_2(\Omega))^3$ erklären, sondern erfordern die Einbeziehung von Sobolevräumen mit Gewicht.

Mit der vorliegenden Arbeit wird durch die Berücksichtigung realer Haftbedingungen an den Wänden eines unendlichen Strömungskanals $\Omega = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 : |x^2| < 1\}$ erreicht, daß auch für wichtige technische Strömungsprobleme entsprechende translationshomogene statistische Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen erklärt werden können. Der Existenzbeweis für derartige Lösungen P beruht dabei wie in [9] auf periodischen Galerkin-Näherungen $\mathbf{u}_l(t, \mathbf{x})$ für die (individuellen) Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, auf gewissen Apriori-Abschätzungen für diese Näherungen und auf einem in [9] bewiesenen allgemeinen Einbettungssatz, der nach dem Satz von Prochorov die Konstruktion von P als schwaches Grenzelement der geeignet definierten Approximationsmaße P_l sichert. Die an den Kanalwänden gestellten Randbedingungen erfordern aber im Unterschied zu [9] neben einer Einschränkung der Translationshomogenität auf die zu den Kanalwänden parallelen Verschiebungen auch beweistechnisch an einigen Stellen die Weiterentwicklung der vorhandenen Theorie. Dies betrifft vor allem die Abschätzung der Zeitableitung der Galerkin-Näherungen $\partial \mathbf{u}_l/\partial t$ und die Approximation des Anfangsmaßes μ durch homogene, auf periodischen Funktionen konzentrierte Maße μ_l. Es kann damit die Existenz einer partiell translationshomogenen statistischen Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen gezeigt werden, die im Unterschied zu der in [10] für eine entsprechende Problemstellung gefundenen Lösung nicht nur auf periodischen Funktionen konzentriert ist.

2. Funktionenräume

Für die Untersuchung translationshomogener statistischer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen im Kanalgebiet $\Omega = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 : |x^2| < 1\}$ werden quellenfreie Funktionen benötigt, die an den Kanalwänden $\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : |x^2| = 1\}$ der Haftbedingung genügen. Zunächst werden dabei Räume von im allgemeinen komplexwertigen quellenfreien und periodischen Vektorfeldern $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ auf Ω betrachtet, die auf dem Periodizitätsgebiet $T_l = \{\mathbf{x} \in \Omega : |x^1| < l \text{ und } |x^3| < l\}$ in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodisch sind und auf $\partial\Omega$ verschwinden. Es sei

$$\mathcal{V}(l) = \Big\{\mathbf{v} \in (C^\infty(T_l))^3 : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum \hat{\mathbf{v}}(k_1, k_3; x^2) \exp\big(i(k_1x^1 + k_3x^3)\big)$$
$$\text{mit } \hat{\mathbf{v}}(k_1, k_3; \cdot) \in (C_0^\infty(-1, 1))^3 \text{ und } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\Big\},$$

wobei über alle $k_1, k_3 \in (\pi/l)\,\mathbf{Z}$ summiert wird ($\mathbf{Z}$ bezeichne die Menge der ganzen Zahlen). Ferner sei $\mathbf{H}_l^0 = (L_2(T_l))^3$ und $\mathbf{H}_l^s = (W_2^s(T_l))^3$. Mit $\mathcal{R}^s(l)$ soll dann für $s = 0, 1$ der Abschluß von $\mathcal{V}(l)$ in der Norm des Raumes $\mathbf{H}_l^s$ bezeichnet werden, während $\mathcal{R}^s(l) = \mathbf{H}_l^s \cap \mathcal{R}^1(l)$ für $s = 2, 3, \ldots$ gelten soll. Mit $\|\cdot \mid T_l\|_s$ werde die von $\mathbf{H}_l^s$ auf $\mathcal{R}^s(l)$ induzierte Norm und mit $(\cdot, \cdot)_{T_l}$ das Skalarprodukt in $\mathcal{R}^0(l)$ bezeichnet. Dabei wird bei der Bezeichnung der Räume und Normen der Exponent und der Index 0 oft weggelassen. Der bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_{T_l}$ zu $\mathcal{R}^s(l)$ duale Raum wird mit $\mathcal{R}^{-s}(l)$ bezeichnet. Mit γ_n werde der stetige Operator $\gamma_n : \mathcal{R}(l) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnet, der für $\mathbf{u} \in (C^\infty(T_l))^3$ gemäß $\gamma_n\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ erklärt ist. Hierbei ist $\mathbf{n}$ die äußere Einheitsnormale auf $\Gamma := \partial T_l$. Entsprechend sei $\gamma : W_2^1(T_l) \to H^{1/2}(\Gamma)$ mit $\gamma w = w_{|\Gamma}$ für $w \in C^\infty(\bar{T}_l)$. Der Raum $\mathcal{R}(l)$ läßt sich nun in Analogie zu [6: Theorem 1.4] wie folgt genauer charakterisieren.

Satz 2.1: *Bezeichnet $\mathcal{R}^\perp(l)$ das orthogonale Komplement zu $\mathcal{R}(l)$ im Hilbertraum $\mathbf{H}_l$, so gilt*

$$\mathcal{R}^\perp(l) = \{\operatorname{grad} p : p \in W_2^1(T_l) \quad \text{mit} \quad \gamma p_{|x^j=l} = \gamma p_{|x^j=-l}, \qquad j = 1, 3\}$$

und

$$\mathcal{R}(l) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_l : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \gamma_n \mathbf{u}_{||x^2|=1} = 0, \quad \gamma_n \mathbf{u}_{|x^j=l} = -\gamma_n \mathbf{u}_{|x^j=-l}, \quad j = 1, 3\}.$$

Es wird der positive symmetrische Operator $A_l = -\pi_l \Delta : \mathcal{R}^2(l) \to \mathcal{R}(l)$ betrachtet, wobei π_l den Operator der orthogonalen Projektion von $\mathbf{H}_l$ auf $\mathcal{R}(l)$ und Δ den Laplace-Operator bezeichnet. Analog zu [6: Theorem 2.1 und Satz 2.2] gilt damit

Satz 2.2: *Die Gleichung $A_l \mathbf{u} = \mathfrak{f}$ besitzt für jedes $\mathfrak{f} \in \mathcal{R}(l)$ genau eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^2(l)$. Ist $\mathfrak{f} \in \mathcal{R}^m(l)$ für ein $m = 0, 1, \ldots$, so gilt $\|\mathbf{u} \mid T_l\|_{m+2} \leqq c_m l^2 \|\mathfrak{f} \mid T_l\|_m$ für $l \geqq 1$ mit einer von l unabhängigen Konstanten c_m.*

Nach diesem Satz ist $A_l \mathcal{R}^2(l) = \mathcal{R}(l)$ und somit A_l ein selbstadjungierter, invertierbarer Operator. Wegen der kompakten Einbettung $\mathcal{R}^2(l) \hookrightarrow \mathcal{R}(l)$ ist $A_l^{-1} : \mathcal{R}(l) \to \mathcal{R}(l)$ vollstetig. Die orthonormierten Eigenfunktionen $\mathbf{e}_{l1}, \mathbf{e}_{l2}, \ldots$ von A_l, $\mathbf{e}_{lk} \in (C^\infty(\bar{T}_l))^3$, bilden deshalb ein in $\mathcal{R}(l)$ vollständiges System. Mit $\lambda_{l1}, \lambda_{l2}, \ldots, 0 < \lambda_{l1} \leqq \lambda_{l2} \leqq \ldots$, werden die zugehörigen Eigenwerte bezeichnet. Sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenfunktionen von A_l lassen sich explizit angeben. Im weiteren wird jedoch nur benutzt, daß sich jede dieser Eigenfunktionen in der Form

$$\mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_{lk}(x^2) \exp\left(i(k_1 x^1 + k_3 x^3)\right) \tag{2.1}$$

mit $k_1, k_3 \in (\pi/l)\,\mathbf{Z}$ und Funktionen $\hat{\mathbf{e}}_{lk} \in \left(C_0(-1, 1)\right)^3$ schreiben läßt. Von der Gültigkeit dieser Darstellung überzeugt man sich leicht dadurch, daß man in $A_l \mathbf{e}_{lk} = \lambda_{lk} \mathbf{e}_{lk}$ für $k = 1, 2, \ldots$ jeweils die Fourierentwicklung (bezüglich x^1 und x^3) der Eigenfunktionen einsetzt.

Wegen der Vollständigkeit des Systems $\{\mathbf{e}_{lk}\}_k$ in $\mathcal{R}(l)$ ist für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_l$ die Projektion $\pi_l \mathbf{u} \in \mathcal{R}(l)$ explizit durch

$$\pi_l \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{lk} \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \hat{u}_{lk} = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \tag{2.2}$$

gegeben. Mit den hierin erklärten Entwicklungskoeffizienten $\hat{u}_{lk}$ definieren wir auf $\mathcal{R}(l)$ für $s \in \mathbf{Z}$ die Norm $\|\cdot\|_s$,

$$\|\mathbf{u}\|_s^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{lk}^s \, |\hat{u}_{lk}|^2. \tag{2.3}$$

Auf der Grundlage von Satz 2.2 läßt sich die folgende Normäquivalenz zeigen.

Satz 2.3: *Auf $\mathcal{R}^s(l)$ gilt für $l \geqq 1$ und $s = 0, 1, \ldots$*

$$\|\cdot\|_s \leqq \|\cdot \mid T_l\|_s \leqq C_s l^s \|\cdot\|_s, \tag{2.4}$$

wobei C_s von l unabhängige Konstanten sind. Insbesondere ist $\|\cdot\| = \|\cdot \mid T_l\|$.

Neben den auf Ω erklärten periodischen Funktionen aus den Räumen $\mathcal{R}^s(l)$ werden noch die folgenden gewichteten Sobolevräume benötigt. Es sei

$$\|\mathbf{u}\|_{s,(r)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqq s} \int_{\Omega} (1 + |\mathbf{x}|^2)^r \, |D^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \Big)^{1/2}.$$

Mit $\mathbf{H}^s(r)$ soll dann der Abschluß von $(C_0^\infty(\Omega))^3$ in der Norm $\|\cdot\|_{s,(r)}$ und mit $\mathcal{H}^s(r)$ der Abschluß von $\{\mathbf{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ in der Norm $\|\cdot\|_{s,(r)}$ bezeichnet werden. Analog zu Satz 2.1 läßt sich der Raum $\mathcal{H}^0(r)$ wie folgt charakterisieren:

$$\mathcal{H}^0(r) = \{\mathbf{u} \in (L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega))^3 : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \|\mathbf{u}\|_{0,(r)} < \infty,\ \mathbf{u}_{|\,|x^2|=1} = 0\},$$

so daß wie in [2: Lemma 1.2] durch die Abschätzung der entsprechenden Normen der folgende Satz bewiesen werden kann.

Satz 2.4: *Für $l \geqq 1$ und $r < -1$ ist $\mathcal{R}(l) \hookrightarrow \mathcal{H}^0(r)$ eine stetige Einbettung; auf $\mathcal{R}(l)$ gilt $\|\cdot\|_{0,(r)} \leqq c\,\|\cdot \mid T_l\|$, wobei c eine von r aber nicht von l abhängige Konstante ist.*

3. Galerkin-Näherungen für die Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen im Kanal

Die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit genügt den *Navier-Stokesschen Gleichungen*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu\,\Delta \mathbf{v} + \sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} + \operatorname{grad} p = \mathbf{g} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Die *Dichte des Fluids* ist dabei gleich Eins gesetzt worden, ν steht für die konstante *dynamische Zähigkeit*, p für den *Druck* und $\mathbf{g}$ für eine *äußere Kraft*. Setzt man voraus, daß die *Strömungsgeschwindigkeit* an den Wänden des betrachteten Kanals eine vorgegebene, von x^1 und x^3 unabhängige Funktion ist, die sich zu einer in Ω glatten quellenfreien Funktion $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ fortsetzen läßt, und daß auch $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ von x^1 und x^3 unabhängig ist, so entsteht aus den Navier-Stokesschen Gleichungen für $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ das folgende homogene Rand-Anfangswertproblem in $(0, T) \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\,\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{3} \left(u^j \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^j}\right) + U^j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}\right) + \operatorname{grad} p = \mathbf{f},\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

mit $\mathbf{u}(\cdot, \cdot)_{|(0,T)\times\partial\Omega} = 0$, $\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\cdot)$.

Dabei ist $\mathbf{f} = \mathbf{g} - \partial\mathbf{U}/\partial t + \nu\,\Delta\mathbf{U} - \sum U^j\,\partial\mathbf{U}/\partial x^j$ und $\mathbf{u}_0$ ein vorgegebenes Vektorfeld mit $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$.

Die im vorigen Abschnitt bereitgestellten Funktionenräume $\mathcal{R}^s(l)$ ermöglichen nun die Definition einer schwachen Lösung des Problems (3.1) in der Klasse der auf T_l in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodischen quellenfreien Funktionen.

Definition 3.1: Eine Funktion $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathcal{R}^1(l)) \cap L_\infty(0, T; \mathcal{R}(l))$ mit $\partial\mathbf{u}/\partial t \in L_\infty(0, T; \mathcal{R}^{-s}(l))$, $s \geqq 3$, heißt *schwache Lösung des Problems* (3.1), wenn für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^s(l)$ gilt

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{w}\right)_{T_l} + \nu(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{w})_{T_l} - \sum_{j=1}^{3} \left(u^j\mathbf{u} + u^j\mathbf{U} + U^j\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x^j}\right)_{T_l} = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_{T_l}$$

mit $(\mathbf{u}(0, \cdot), \mathbf{w})_{T_l} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w})_{T_l}$.

Die Anfangsbedingung ist dabei (als Gleichung $\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\cdot)$ in $\mathcal{R}^{-s}(l)$) korrekt gestellt, da die in Definition 3.1 beschriebene Funktionenklasse nach [9: Lemma IV.1.1] stetig in $C(0, T; \mathcal{R}^{-s}(l))$ eingebettet ist.

Für die schwache Lösung soll nun mit Hilfe der Eigenfunktionen des Operators A_l die Galerkin-Näherung gebildet werden. Dies geschieht durch Projektion auf den durch die ersten k_0 Eigenfunktionen $\mathbf{e}_{l1}, \mathbf{e}_{l2}, \ldots, \mathbf{e}_{lk_0}$ aufgespannten Unterraum

$\mathcal{M}(l) \subset \mathcal{R}(l)$. Dabei wird k_0 so gewählt, daß für die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{l1} \leqq \lambda_{l2} \leqq \cdots \leqq \lambda_{lk_0} \leqq l^2$ gilt, während $\lambda_{l(k_0+1)} > l^2$ sein soll. Mit p_l wird der durch

$$p_l \mathrm{u} = \sum_{\lambda_{lk} \leqq l^2} \hat{u}_{lk} \mathrm{e}_{lk} \quad \text{mit} \quad \hat{u}_{lk} = (\mathrm{u}, \mathrm{e}_{lk})_{T_l}$$

erklärte Projektor von $\mathcal{R}(l)$ auf $\mathcal{M}(l)$ bezeichnet.

Definition 3.2: Eine Funktion $\mathrm{u} \in C^1(0, T; \mathcal{M}(l))$ heißt *Galerkin-Näherung für die schwache Lösung des Problems* (3.1) *in* T_l, wenn sie Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} - \nu A_l \mathrm{u} + p_l \pi_l \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u^j \mathrm{u}}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j \mathrm{U}}{\partial x^j} + \frac{\partial U^j \mathrm{u}}{\partial x^j} = p_l \pi_l \mathrm{f}, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{u}(0, \cdot) = \mathrm{v}_0 := p_l \pi_l \mathrm{u}_0 \tag{3.3}$$

ist.

Satz 3.1: *Gilt für die Funktionen* f *und* U *in* (3.2)

$$c_l = \int_0^T \|\mathrm{f}(\tau) \mid T_l\|^2 \, d\tau < \infty \quad und \quad c_{\mathrm{U}} = 6 \max_{i,j=1,2,3} \sup_{(0,T)\times T_l} \left| \frac{\partial U^j}{\partial x^i} \right| < \infty,$$

so besitzt das System (3.2), (3.3) *für jeden Anfangswert* $\mathrm{v}_0 \in \mathcal{M}(l)$ *eine eindeutige Lösung* $\mathrm{u}_l = S_l \mathrm{v}_0 \in C^1(0, T; \mathcal{M}(l))$ *mit*

$$\|\mathrm{u}_l(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leqq \left(\|\mathrm{u}_l(0)\|^2 + \frac{4}{\nu} c_l \right) \exp(c_{\mathrm{U}} t). \tag{3.4}$$

Der Lösungsoperator $S_l : \mathcal{M}(l) \to C^1(0, T; \mathcal{M}(l))$ *ist stetig.*

Beweis: Angenommen u_l ist eine Lösung von (3.2), (3.3). Dann folgt nach skalarer Multiplikation von (3.2) mit u_l und anschließender Integration über T_l und $(0, t)$

$$\frac{1}{2} \|\mathrm{u}_l(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|_1^2 \, d\tau + \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \left(u_l^j(\tau) \frac{\partial \mathrm{U}(\tau)}{\partial x^j}, \mathrm{u}_l(\tau) \right)_{T_l} d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \|\mathrm{u}_l(0)\|^2 + \int_0^t (\mathrm{f}(\tau), \mathrm{u}_l(\tau))_{T_l} \, d\tau,$$

wobei die in (2.3) erklärten Normen benutzt wurden. Beachtet man die Ungleichung $\sum (u^j \, \partial \mathrm{U}/\partial x^j, \mathrm{u})_{T_l} \leqq 2^{-1} c_{\mathrm{U}} \|\mathrm{u}\|^2$, so erhält man

$$\|\mathrm{u}_l(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leqq \|\mathrm{u}_l(0)\|^2 + c_{\mathrm{U}} \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|^2 \, d\tau + \int_0^t \|\mathrm{f}(\tau) \mid T_l\| \, \|\mathrm{u}_l(\tau)\| \, d\tau$$

Wegen $\|\mathrm{u}_l\| \leqq 4 \|\mathrm{u}_l\|_1$ und $4 \|\mathrm{f} \mid T_l\| \, \|\mathrm{u}_l\|_1 - \nu \|\mathrm{u}_l\|_1^2 \leqq (4/\nu) \|\mathrm{f} \mid T_l\|^2$ entsteht daraus

$$\|\mathrm{u}_l(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leqq \|\mathrm{u}_l(0)\|^2 + \frac{4}{\nu} c_l + c_{\mathrm{U}} \int_0^t \|\mathrm{u}_l(\tau)\|^2 \, d\tau. \tag{3.5}$$

Nach dem Gronwallschen Lemma folgt hieraus

$$\|\mathrm{u}_l(t)\|^2 \leqq (\|\mathrm{u}_l(0)\|^2 + (4/\nu) c_l) \exp(c_{\mathrm{U}} t).$$

Benutzt man in (3.5) diese Abschätzung, so erhält man für $t \in [0, T]$ schließlich die Ungleichung (3.4). Da (3.2) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $\hat{u}_{lk}$ von

$$\mathrm{u}_l(t, \mathrm{x}) = \sum_{\lambda_{lk} \leqq l^2} \hat{u}_{lk}(t) \, \mathrm{e}_{lk}(\mathrm{x})$$

darstellt, dessen rechte Seite polynomial von den $\hat{u}_{lk}$ abhängt, folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (3.2), (3.3) aus der Apriori-Abschätzung (3.4). Die $\hat{u}_{lk}$ hängen dabei stetig von den Anfangsbedingungen ab, so daß der Lösungsoperator S_l tatsächlich stetig ist ∎

Unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{f}$ und $\mathbf{U}$ von x^1 und x^3 unabhängig sind, gilt

Satz 3.2: *Der Lösungsoperator S_l des Problems* (3.2), (3.3) *ist mit dem Verschiebungsoperator $\hat{\mathbf{h}}$: $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{u}(t, \mathbf{x} + \mathbf{h})$, $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3$ beliebig, vertauschbar.*

Beweis: Zunächst wird die Vertauschbarkeit von π_l und $\hat{\mathbf{h}}$ gezeigt. Nach (2.1) und (2.2) gilt für beliebige in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Funktionen $\mathbf{u} \in \left(L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right)^3$

$$\begin{aligned}\pi_l \hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum (\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}, \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) = \sum (\mathbf{u}, \hat{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) \\ &= \sum (\mathbf{u}, \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \exp\left(i(h^1x^1 + h_4x_4)\right) \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) \\ &= \sum (\mathbf{u}, \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \hat{\mathbf{h}} \sum (\mathbf{u}, \mathbf{e}_{lk})_{T_l} \mathbf{e}_{lk}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{h}}\pi_l \mathbf{u}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

wobei über $\mathbf{N}$ zu summieren ist. Schreibt man hierin nur endliche Summen, so ergibt sich $p_l\pi_l\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}p_l\pi_l$. Außerdem gilt offenbar $\hat{\mathbf{h}}(\partial \mathbf{u}/\partial t) = \partial(\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u})/\partial t$, $\hat{\mathbf{h}}\, \Delta \mathbf{u} = \Delta \hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}$ und $\hat{\mathbf{h}}u^j\mathbf{u} = \hat{\mathbf{h}}u^j\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}$. Weil auch $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{f} = \mathbf{f}$ und $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{U} = \mathbf{U}$ ist, folgt $\hat{\mathbf{h}}(u^j\mathbf{U}) = (\hat{\mathbf{h}}u^j)\, \mathbf{U}$ und $\hat{\mathbf{h}}(U^j\mathbf{u}) = U^j(\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u})$. Wendet man also den Operator $\hat{\mathbf{h}}$ auf die Gleichung (3.2) an, so wird ersichtlich, daß mit $\mathbf{u}$ auch $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}$ Lösung von (3.2) ist. Der Anfangswert von $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}$ bei $t = 0$ ist $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{v}_0 \in \mathcal{M}(l)$, wenn $\mathbf{v}_0 = p_l\pi_l\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}(l)$ der Anfangswert von $\mathbf{u}$ ist. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (3.2), (3.3) bedeutet dies $\hat{\mathbf{h}}S_l\mathbf{v}_0 = S_l\hat{\mathbf{h}}\mathbf{v}_0$ ∎

Über die im Satz 3.1 formulierten Apriori-Abschätzung hinaus ist die Abschätzung der Zeitableitung von $\mathbf{u}_l$ erforderlich. Wie in [9: Kap. VII, § 3] sei dazu $K \subset \Omega$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{H}^s(K) = \left\{\mathbf{u} \in \left(W_2{}^s(K)\right)^3 : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\right\}$, $s = 0, 1, \ldots,$ der Sobolevraum der auf K erklärten quellenfreien Vektorfelder mit der Norm $\|\cdot \mid K\|_s$ von $\mathbf{H}^s(K) := \left(W_2{}^s(K)\right)^3$. Wir setzen $\|\mathbf{u} \mid K\|_{-s} = \sup \left\{(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\Omega / \|\mathbf{w} \mid K\|_s : \mathbf{w} \in \left(C_0{}^\infty(K)\right)^3\right\}$, wobei $(\cdot, \cdot)_\Omega$ für das Skalarprodukt in $\left(L_2(\Omega)\right)^3$ steht, und bezeichnen mit $\mathbf{H}^{-s}(K)$ die Vervollständigung von $\left(C_0{}^\infty(K)\right)^3$ in der Norm $\|\cdot \mid K\|_{-s}$. Im weiteren sei $K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\}$ mit einem $N \in \mathbf{N}$. Es sollen nun Abschätzungen für $\|\partial \mathbf{u}_l/\partial t \mid K\|_{-s}$ bewiesen werden, die den Ungleichungen (3.2) und (3.23) aus [9: Kap. VII] entsprechen. Für die in (3.2) eingehenden, von x^1 und x^3 unabhängigen Funktionen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{U}$ muß dabei gelten

$$C_{\mathbf{f}} = \sup_{t \in (0,T)} \int_{-1}^{1} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|^2 \, dx^2 < \infty \quad \text{und} \quad C_{\mathbf{U}} = \sup_{t \in (0,T)} \int_{-1}^{1} |\mathbf{U}(t, \mathbf{x})|^2 \, dx^2 < \infty.$$

Satz 3.3: *Ist $\mathbf{u}_l$ die Galerkin-Näherung für die schwache Lösung des Problems* (3.1) *in T_l zum Anfangswert $\mathbf{v}_0 = p_l\pi_l\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}(l)$, so gilt für $K \subset T_l$ und $s > 21/2$*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \middle| K \right\|_{-s} \leqq C\left(\|\mathbf{u}_l \mid K\|^2 + l^{-2} \|\mathbf{u}_l \mid T_l\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2_{l0,((\varepsilon-3)/2)} + 1\right), \tag{3.6}$$

wobei die Konstante C nur von ν, N, ε $(0 < \varepsilon < 1)$, $C_{\mathbf{U}}$ und $C_{\mathbf{f}}$, aber nicht von $\mathbf{v}_0$ und l abhängt.

Beweis: Für dessen Dauer wird der Index l bei $\mathbf{u}_l$ und π_l weggelassen und das Skalarprodukt in $\mathbf{H}_l$ mit $(\cdot, \cdot)$ bezeichnet. Ferner sei $\mathbf{w}^0 \in \left(C_0{}^\infty(K)\right)^3$ und $\mathbf{w}$ die in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Fortsetzung von $\mathbf{w}^0$. Skalare Multiplikation von (3.2) mit $\mathbf{w}$ und anschließende Integration über T_l liefert

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{w}\right) = \left(p_l\pi \left[\nu\, \Delta \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u^j\mathbf{u}}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j\mathbf{U}}{\partial x^j} + \frac{\partial U^j\mathbf{u}}{\partial x^j}\right) + \mathbf{f}\right], \mathbf{w}\right). \tag{3.7}$$

Die Klammer [...] wird der Kürze halber mit $\mathbf{F}$ bezeichnet. Wir zerlegen $p_l\pi$ in

$$p_l\pi = I + (\pi - I) + (p_l - I)\,\pi \tag{3.8}$$

und schätzen nacheinander die auf der rechten Seite von (3.7) bei Anwendung dieser drei Operatoren auf $\mathbf{F}$ jeweils entstehenden Terme ab.

A) *Anwendung von I:* Wie in [9: S. 222] sieht man

$$|(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{w})| = |(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{w})| \leqq \|\mathbf{u} \mid K\| \, \|\Delta\mathbf{w} \mid K\| \leqq (\|\mathbf{u} \mid K\|^2 + 1)\, \|\mathbf{w} \mid K\|_2,$$

$$\left|\left(\frac{\partial u^j\mathbf{u}}{\partial x^j}, \mathbf{w}\right)\right| = \left|\left(u^j\mathbf{u}, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x^j}\right)\right| \leqq c\, \|\mathbf{u} \mid K\|^2\, \|\mathbf{w} \mid K\|_3.$$

Völlig analog läßt sich sowohl $|(\partial u^j\mathbf{U}/\partial x^j, \mathbf{w})|$ als auch $|(\partial U^j\mathbf{u}/\partial x^j, \mathbf{w})|$ durch $c(\|\mathbf{u} \mid K\|^2 + \|\mathbf{U} \mid K\|^2)\, \|\mathbf{w} \mid K\|_3$ abschätzen.

Wegen $|(\mathbf{f}, \mathbf{w})| \leqq \|\mathbf{f} \mid K\|\, \|\mathbf{w} \mid K\|$ gilt dann mit einer von ν, N, $C_{\mathbf{U}}$ und $C_{\mathbf{f}}$ abhängigen Konstanten C_{A}

$$|(I\mathbf{F}, \mathbf{w})| \leqq C_{\mathrm{A}}(\|\mathbf{u} \mid K\|^2 + 1)\, \|\mathbf{w} \mid K\|_3. \tag{3.9}$$

B) *Anwendung von $\pi - I$:* Für die hier benötigten Abschätzungen ist es erforderlich, Ableitungen von $(\pi - I)\,\mathbf{w}$ abzuschätzen. Dazu wird nach Abschluß dieses Beweises der folgende Hilfssatz bewiesen.

Lemma 3.1: *Ist* $\mathbf{w}^0 \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ *mit* $\operatorname{supp} \mathbf{w}^0 \subset K \subset T_l$, *so gilt für alle* $\mathbf{x} \in \overline{T}_l$, $\varepsilon > 0$, $|\alpha| \geqq 1$ *und* $s > 7/2 + |\alpha|$

$$|D^\alpha(\pi - I)\,\mathbf{w}(\mathbf{x})| \leqq C_{|\alpha|}N^{4+|\alpha|}\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s \left(\frac{c_\varepsilon}{(1 + |\mathbf{x}|)^{2+|\alpha|-\varepsilon}} + Cl^{-2-|\alpha|}\right). \tag{3.10}$$

Für die zweite Komponente $(\pi - I)\, w(\mathbf{x})^2$ *des Vektors* $(\pi - I)\,\mathbf{w}(\mathbf{x})$ *gilt mit* $s > 9/2$ *und* $\varepsilon > 0$

$$|(\pi - I)\, w(\mathbf{x})^2| \leqq 2C_1N^5\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s \left(\frac{c_\varepsilon}{(1 + |\mathbf{x}|)^{3-\varepsilon}} + Cl^{-3}\right). \tag{3.11}$$

Damit ist die Abschätzung von $(\pi - I)\,\mathbf{F}$ möglich. Für $s > 11/2$ und $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
|((\pi - I)\,\Delta\mathbf{u}, \mathbf{w})| &= |(\mathbf{u}, \Delta(\pi - I)\,\mathbf{w})| \\
&\leqq C_2N^6\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s \left(\int_{T_l} \frac{c_\varepsilon\, |\mathbf{u}|}{(1 + |\mathbf{x}|)^{4-\varepsilon}}\, d\mathbf{x} + Cl^{-4} \int_{T_l} |\mathbf{u}|\, d\mathbf{x}\right) \\
&\leqq c(\|\mathbf{u}\|^2_{0,((\varepsilon-4)/2)} + l^{-4}\, \|\mathbf{u} \mid T_l\|^2 + 1)\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s.
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt aus Lemma 3.1 mit $|\alpha| = 1$ und $s > 9/2$

$$\begin{aligned}
\left|\left((\pi - I)\frac{\partial u^j\mathbf{u}}{\partial x^j}, \mathbf{w}\right)\right| &= \left|\left(u^j\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x^j}(\pi - I)\,\mathbf{w}\right)\right| \\
&\leqq C_1N^5\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s \left(\int_{T_l} \frac{c_\varepsilon\, |\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}}{(1 + |\mathbf{x}|)^{3-\varepsilon}} + Cl^{-3} \int_{T_l} |\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}\right) \\
&\leqq c(\|\mathbf{u}\|^2_{0,((\varepsilon-3)/2)} + l^{-3}\, \|\mathbf{u} \mid T_l\|^2)\, \|\mathbf{w} \mid K\|_s.
\end{aligned}$$

Analoge Ungleichungen erhält man für die Terme mit $u^j\mathbf{U}$ und $U^j\mathbf{u}$. Schließlich gilt für die von x^1 und x^3 unabhängige Funktion $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$ nach Satz 2.1 $(\pi - I)\,\mathbf{f}$

$= (\pi - I)\,(0, f^2, 0)$, so daß aus (3.11) für $s > 9/2$ und $0 < \varepsilon < 1$

$$\left|\big((\pi - I)\,\mathfrak{f}, \mathrm{w}\big)\right| = \left|\int_{T_l} f^2(t, \mathrm{x})\,(\pi - I)\,w(\mathrm{x})^2\,d\mathrm{x}\right|$$
$$\leqq 2C_1N^6\,\|\mathrm{w} \mid K\|_s \left(\int_{T_l} \frac{c_\varepsilon\,|\mathfrak{f}(t, \mathrm{x})|}{(1 + |\mathrm{x}|)^{3-\varepsilon}}\,d\mathrm{x} + \int_{T_l} Cl^{-3}\,|\mathfrak{f}(t, \mathrm{x})|\,d\mathrm{x}\right)$$
$$\leqq c\,\|\mathrm{w} \mid K\|_s$$

folgt. Mit einer Konstanten C_{B}, die von ν, N, ε $(0 < \varepsilon < 1)$, C_{U} und C_f, aber nicht von l abhängt, gilt also für $s > 11/2$

$$\left|\big((\pi - I)\,\mathrm{F}, \mathrm{w}\big)\right| \leqq C_{\mathrm{B}}\big(\|\mathrm{u}\|^2_{0,((\varepsilon-3)/2)} + l^{-3}\,\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2 + 1\big)\,\|\mathrm{w} \mid K\|_s. \tag{3.12}$$

C) *Anwendung von* $(p_l - I)\,\pi$: Für $\mathrm{u} \in \mathcal{M}(l)$ ist $(p_l - I)\,\pi\,\Delta\mathrm{u} = 0$. Stellvertretend für die anderen Glieder aus $\big((p_l - I)\,\pi\mathrm{F}, \mathrm{w}\big)$ wird die folgende Abschätzung angegeben. Für $m > 3/2 + 1$ gilt

$$Y := \left|\left((p_l - I)\,\pi\,\frac{\partial u^j\mathrm{u}}{\partial x^j}, \mathrm{w}\right)\right| = \left|\left(u^j\mathrm{u}, \frac{\partial}{\partial x^j}\,(p_l - I)\,\pi\mathrm{w}\right)\right|$$
$$\leqq \|\mathrm{u} \mid T_l\|^2 \sup_{\mathrm{x}\in T_l} \left|\frac{\partial}{\partial x^j}\,(p_l - I)\,\pi\mathrm{w}\right| \leqq c_1\,\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2\,\|(p_l - I)\,\pi\mathrm{w} \mid T_l\|_m. \tag{3.13}$$

Gemäß (2.4) kann hierin das Quadrat des letzten Faktors weiter abgeschätzt werden:

$$\|(p_l - I)\,\pi\mathrm{w} \mid T_l\|_m{}^2 \leqq (C_m l^m)^2\,\|(p_l - I)\,(\pi\mathrm{w})\|_m{}^2 = (C_m l^m)^2 \sum_{\lambda_{lk} > l^2} \lambda_{lk}^m\,|\hat{w}_{lk}|^2$$
$$\leqq C_m{}^2 l^{2m-2n} \sum_{\lambda_{lk} > l^2} \lambda_{lk}^{m+n}\,|\hat{w}_{lk}|^2$$
$$\leqq C_m{}^2 l^{2m-2n}\,\|\pi\mathrm{w}\|^2_{m+n} \leqq (C_m l^{m-n})^2\,\|\pi\mathrm{w} \mid T_l\|^2_{m+n}. \tag{3.14}$$

Setzt man dies in (3.13) ein, so erhält man mit $n = m + 2$ und $s > 7$ die Ungleichung $Y \leqq c_2 l^{-2}\,\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2\,\|\pi\mathrm{w} \mid T_l\|_s$. Außerdem gilt nach Lemma 3.1 für alle α mit $1 \leqq |\alpha| \leqq s$, $\mathrm{x} \in \overline{T}_l$, $s_1 > 7/2 + s$

$$|D^\alpha(I - \pi)\,\mathrm{w}(\mathrm{x})| \leqq CN^{s+4}\,\|\mathrm{w} \mid K\|_{s_1}\left(\frac{c_\varepsilon}{(1 + |x|)^{3-\varepsilon}} + Cl^{-3}\right),$$

woraus dann $\|D^\alpha(I - \pi)\,\mathrm{w} \mid T_l\|^2 \leqq c_3\,\|\mathrm{w} \mid K\|^2_{s_1}$ folgt. Man addiert die letzte Beziehung über alle α mit $1 \leqq |\alpha| \leqq s$ und benutzt die so entstehende Ungleichung zur Abschätzung

$$\|\pi\mathrm{w} \mid T_l\|_s{}^2 \leqq \|\pi\mathrm{w} \mid T_l\|^2 + 2 \sum_{1\leqq\alpha\leqq s} \big(\|D^\alpha\mathrm{w} \mid T_l\|^2 + \|D^\alpha(I - \pi)\,\mathrm{w} \mid T_l\|^2\big)$$
$$\leqq 2\,\|\mathrm{w} \mid T_l\|_s{}^2 + c_4\,\|\mathrm{w} \mid K\|^2_{s_1} \leqq c_5{}^2\,\|\mathrm{w} \mid K\|^2_{s_1}. \tag{3.15}$$

Damit erhält man schließlich für $s_1 > 21/2$

$$\left|\left((p_l - I)\,\pi\,\frac{\partial u^j\mathrm{u}}{\partial x^j}, \mathrm{w}\right)\right| \leqq cl^{-2}\,\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2\,\|\mathrm{w} \mid K\|^2_{s_1}.$$

In gleicher Weise lassen sich die Glieder mit $u^j\mathrm{U}$ und $U^j\mathrm{u}$ durch

$$cl^{-2}(\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2 + \|\mathrm{U} \mid T_l\|^2)\,\|\mathrm{w} \mid K\|_{s_1} \leqq c(l^{-2}\,\|\mathrm{u} \mid T_l\|^2 + 4C_{\mathrm{U}})\,\|\mathrm{w} \mid K\|_{s_1}$$

abschätzen. Dazu analog gilt mit $s_2 > 7/2 + 1$

$$\begin{aligned}|((p_l - I)\,\pi\mathbf{f}, \mathbf{w})| &\leqq \|\mathbf{f} \mid T_l\|\,\|(p_l - I)\,\pi\mathbf{w} \mid T_l\| \\ &\leqq 2l\sqrt{C_t}\Big(\sum_{\lambda_{lk} > l_s} |\hat{w}_{lk}|^2\Big)^{1/2} \leqq 2(C_t + 1)\,\|\pi\mathbf{w} \mid T_l\|_1 \leqq c_6\,\|\mathbf{w} \mid K\|_{s_2},\end{aligned}$$

so daß man die für $s > 21/2$ gültige Ungleichung

$$|((p_l - I)\,\pi\mathbf{F}, \mathbf{w})| \leqq C_C(l^{-2}\,\|\mathbf{u} \mid T_l\|^2 + 1)\,\|\mathbf{w} \mid K\|_s \tag{3.16}$$

erhält. Auch hier hängt C_C nicht von l und $\mathbf{v}_0$, sondern nur von N, ε $(0 < \varepsilon < 1)$, C_U und C_t ab. Unter Berücksichtigung der Zerlegung (3.8) folgt die Behauptung aus (3.7) und den Ungleichungen (3.9), (3.12) und (3.16) ∎

Für den noch ausstehenden Beweis des Lemmas 3.1 wird der folgende Hilfssatz benötigt, der in gleicher Weise wie [9: Lemma VII.3.3] bewiesen werden kann.

Lemma 3.2: *Es sei* $K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\}$ *und* $\mathbf{w}^0 \in (C_0^\infty(K))^3$. *Dann ist das Newtonsche Volumenpotential von* div $\mathbf{w}^0$:

$$q(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\operatorname{div}\mathbf{w}^0(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\,d\mathbf{y},$$

eine C^∞-Funktion, die in ganz $\mathbf{R}^3$ *der Differentialgleichung* $\Delta_q = \operatorname{div}\mathbf{w}^0$ *und der Abschätzung*

$$|D^\alpha \operatorname{grad} q(\mathbf{x})| \leqq c_{|\alpha|}\,\frac{N^{4+|\alpha|}\,\|\mathbf{w}^0 \mid K\|_s}{(1 + |\mathbf{x}|)^{3+|\alpha|}} \quad \text{mit} \quad s > 7/2 + |\alpha| \tag{3.17}$$

genügt.

Beweis des Lemmas 3.1: Die in (3.10) links stehenden Ableitungen von $(I - \pi)\,\mathbf{w}$ (es war $\mathbf{w}^0 \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ mit supp $\mathbf{w}^0 \subset K \subset T_l$) lassen sich für $|\alpha| \geqq 1$ mit Hilfe der in Lemma 3.2 erklärten Funktion $q \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ explizit angeben:

$$D^\alpha(I - \pi)\,\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{m^1, m^3 \in 2l\mathbf{Z}}\ \sum_{m^2 \in 4\mathbf{Z}} D^\alpha \operatorname{grad}\big(q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}})\big), \tag{3.18}$$

wobei $\mathbf{x} + \mathbf{m} = (x^1 + m^1, x^2 + m^2, x^3 + m^3)$ und $\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}} = (x^1 + m^1, m^2 + 2 - x^2, x^3 + m^3)$ ist. Um (3.18) zu beweisen, überzeugt man sich zunächst von der auf T_l gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe. Nach (3.17) gilt für $s > 7/2 + |\alpha|$ und $r = 3 + |\alpha|$

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{m}} D^\alpha \operatorname{grad}\big(q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}})\big) \\ &\leqq c_{|\alpha|} N^{4+|\alpha|}\,\|\mathbf{w}^0 \mid K\|_s \sum_{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{(1 + |\mathbf{x} + \mathbf{m}|)^r} + \frac{1}{(1 + |\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}}|)^r}\right],\end{aligned}$$

wobei wie in (3.18) über alle $\mathbf{m} = (m^1, m^2, m^3)$ mit $m^1, m^3 \in 2l\mathbf{Z}$ und $m^2 \in 4\mathbf{Z}$ zu summieren ist. Die Konvergenz der rechts stehenden Reihe wird durch die folgenden Abschätzungen bewiesen. Die Teilsumme $S_1 = \sum [\ldots]$, Summation über $|m| > 4l$, kann wegen der für alle $\mathbf{x} \in \overline{T}_l$ gültigen Ungleichungen

$$|\mathbf{x} + \mathbf{m}| \geqq |\mathbf{m}| - |\mathbf{x}| \geqq |\mathbf{m}| - \sqrt{2l^2 + 1} \geqq |\mathbf{m}| - 2l - 1$$

$$|\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}}| \geqq |\tilde{\mathbf{m}}| - |\mathbf{x}| \geqq |\tilde{\mathbf{m}}| - 2l - 1 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{m}} = (m^1, m^2 + 2, m^3)$$

durch $S_1 \leqq c_1 l^{-2-|\alpha|}$ abgeschätzt werden (vgl. [4: S. 35–37]). Die Teilsumme S_2 enthält alle noch verbleibenden Summanden $[\ldots]$ mit $|m| \leqq 4l$. Ist $|m^1| + |m^3| \neq 0$, dann kann jeder Summand $[\ldots]$ durch cl^{-r} abgeschätzt werden, so daß wegen der zu l proportionalen Anzahl solcher Summanden für $r = 3 + |\alpha|$ gilt:

$$S_2 \leqq c_2 l^{-r+1} + \sum_{\substack{|m^2| \leqq 4l \\ m^1 = 0 = m^3}} \left[\frac{1}{(1 + |\mathbf{x} + \mathbf{m}|)^r} + \frac{1}{(1 + |\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}}|)^r}\right]$$
$$\leqq c_2 l^{-r+1} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{2}{(1 + (x^1)^2 + (x^2 + 4k)^2 + (x^3)^2)^{r/2}}$$
$$\leqq c_2 l^{-r+1} + 2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-(r-r_1)/2} (1 + 4k^2)^{-r_1/2}$$
$$\leqq c_2 l^{-2-|\alpha|} + c_\varepsilon \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|)^{2+|\alpha|-\varepsilon}},$$

falls $r_1 = 1 + \varepsilon > 1$, d. h. $\varepsilon > 0$ ist. Hieraus und aus $S_1 \leqq c_1 l^{-2-|\alpha|}$ erhält man für $|\alpha| \geqq 1$ und alle $\mathbf{x} \in \overline{T}_l$

$$\sum_{\mathbf{m}} |D^\alpha \operatorname{grad} (q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}}))|$$
$$\leqq c_{|\alpha|} N^{4+|\alpha|} \|\mathbf{w}^0 \mid K\|_s \left[C l^{-2-|\alpha|} + \frac{c_\varepsilon}{(1 + |\mathbf{x}|)^{2+|\alpha|-\varepsilon}}\right], \tag{3.19}$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3.18) folgt. Gleichzeitig ist mit dieser Ungleichung gezeigt, daß (3.18) gliedweise differenziert werden kann und die dabei entstehenden Reihen sämtlich wieder auf $\overline{T}_l$ gleichmäßig konvergieren. Als Summe von Gradientenfeldern entsteht mit (3.18) auch jeweils ein Gradientenfeld. Insbesondere gibt es also skalare Funktionen $V^j \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, für die

$$\operatorname{grad} V^j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x^j} \operatorname{grad} (q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}})) \tag{3.20}$$

gilt. Integriert man nun $\partial V^j/\partial x^2 = \partial V^2/\partial x^j$ nach x^j, so kann wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen gliedweise integriert werden:

$$V^2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x^2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}})).$$

Für alle $\mathbf{x} \in \overline{T}_l$ ist $V^2(\mathbf{x})_{|x^2=1} = 0$. Darüber hinaus ist nach Umordnung dieser auf $\overline{T}_l$ gleichmäßig konvergenten Reihe sofort ersichtlich, daß auch $V^2(\mathbf{x})_{|x^2=-1} = 0$ ist. Aus der Darstellung (3.20) folgt, daß es eine Funktion V mit $\partial V/\partial x^j = V^j$ für $j = 1, 2, 3$ gibt. Diese muß sich dann als gleichmäßig konvergente Reihe in der Form

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}} (q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}}) + v_m{}^1 x^1 + v_m{}^3 x^3 + c_m)$$

darstellen lassen, so daß neben V^2 auch V^1 und V^3 jeweils in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Funktionen sind.

Damit läßt sich nun zeigen, daß die mit (3.20) erklärten Funktionen grad V^j tatsächlich mit den Funktionen $\partial(I - \pi)\,\mathbf{w}/\partial x^j$ übereinstimmen. Die in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Funktion $(I - \pi)\,\mathbf{w}$ ist nach Satz 2.1 ein Gradientenfeld, $(I - \pi)\,\mathbf{w} = \operatorname{grad} p$, dessen zweite Komponente $\partial p/\partial x^2$ bei $|x^2| = 1$ verschwindet und das in T_l der Differentialgleichung $\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{w}$ genügt. Berücksichtigt man, daß nach (3.20) wegen $\Delta q = \operatorname{div} \mathbf{w}$ für alle $\mathbf{x} \in T_l$ und $j = 1, 2, 3$ auch

$$\Delta V^j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{\mathbf{m}} \Delta(q(\mathbf{x} + \mathbf{m}) + q(\widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{m}})) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Delta q(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^j} \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})$$

gilt, so erhält man für $r^j = V^j - \partial p/\partial x^j$ die Gleichung

$$\int_{T_l} |\operatorname{grad} r^j(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = -\int_{T_l} r^j(\mathbf{x}) \left(\Delta V^j(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^j} \Delta p(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} + \int_{\partial T_l} r^j(\mathbf{x}) \operatorname{grad} r^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} do = 0.$$

Das Oberflächenintegral hierin verschwindet, da r^j und grad r^j in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodisch sind und $r^2(\mathbf{x})_{||x^2|=1} = 0$ ist. Es gilt also grad $V^j = \partial \operatorname{grad} p/\partial x^j = \partial(I - \pi)\,\mathbf{w}/\partial \mathbf{x}^j$.

Daraus ergibt sich mit (3.20) und den Abschätzungen (3.19) die Ungleichung (3.10). (3.11) erhält man aus (3.10) durch Integration der zweiten Komponente von $\partial(I - \pi)\, \mathbf{w}/\partial x^2$ nach x^2 unter Beachtung der Nullrandbedingung ∎

Mit Satz 3.3 konnte eine Abschätzung für $\|\partial \mathbf{u}_l/\partial t \mid K\|_{-s}$ unter der Voraussetzung $K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\} \subset T_l$ gefunden werden. Analog zu [9: Theorem VII.3.2] wird nun eine entsprechende Abschätzung für diese Norm bewiesen, die auch im Falle $K \not\subset T_l$ gültig bleibt.

Satz 3.4: *Ist* $\mathbf{u}_l$ *die Galerkin-Näherung für die schwache Lösung des Problems* (3.1) *in* T_l *zum Anfangswert* $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{M}(l)$, *so gilt für* $s > 6$ *und* $q = ml$ *mit* $m = [N/l] + 1$ *(*$[a]$ *bezeichnet den ganzen Teil von* a*)*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \middle| K \right\|_{-s} \leqq C(\|\mathbf{u}_l \mid T_q\|^2 + 1), \tag{3.21}$$

wobei C *eine von* v_0 *und* l *unabhängige Konstante ist.*

Beweis: Die reelle Zahl q wurde so gewählt, daß $K \subset T_q$ ist. Der Beweis kann deshalb teilweise auf den in Satz 3.3 behandelten Fall zurückgeführt werden. Es sei dazu wieder $\mathbf{w}^0 \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ mit $\operatorname{supp} \mathbf{w}^0 \subset K$ und $\mathbf{w}$ die in x^1- und x^3-Richtung $2q$-periodische Fortsetzung von $\mathbf{w}^0$. Multipliziert man die Galerkin-Gleichungen (3.2) mit $\mathbf{w}$ und integriert über T_q, so erhält man wieder formal die Gleichung (3.7), wobei diesmal $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt in $\mathbf{H}_q$ bezeichnet (abkürzend sei auch hier $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l$). In [4: S. 40—41] wurde gezeigt, daß für in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Funktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_l$ stets $\pi_l \mathbf{v} = \pi_q \mathbf{v}$ gilt und somit (3.7) die Gestalt

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{w}\right)_{T_q} = \left(\nu\, \Delta \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u^j \mathbf{u}}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j \mathbf{U}}{\partial x^j} + \frac{\partial U^j \mathbf{u}}{\partial x^j}\right) + \mathbf{f}, p_l \pi_q \mathbf{w}\right)_{T_q} \tag{3.22}$$

annimmt. Der Projektionsoperator $p_l : \mathcal{R}(l) \to \mathcal{M}(l)$ bewirkt, daß in der Entwicklung (2.2) nur über die Werte k summiert wird, für die $\lambda_{lk} \leqq l^2$ ist. Da die Eigenwerte λ_{qn} zu den $2l$-periodischen Eigenfunktionen $\mathbf{e}_{qn}$ von $A_q = -\pi_q\, \Delta$ mit den Eigenwerten λ_{lk} übereinstimmen, gilt für in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Funktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_l$ die Gleichheit $p_l \pi_l \mathbf{v}(\mathbf{x}) = p_l \pi_q \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Der Operator $p_l \pi_q$ bewirkt dabei, daß die (2.2) entsprechende Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\mathbf{e}_{qn}$ von A_q nur die Summanden enthält, für die $\lambda_{qn} \leqq l^2$ ist.

Wie im Teil C) des Beweises von Satz 3.3 kann man nun die in (3.22) vorkommenden Glieder abschätzen. So gilt wegen $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(l)$ auch $\mathbf{u} = \pi_q \mathbf{u} \in \mathcal{M}(q) \subset \mathcal{R}^2(q)$ und deshalb

$$|(\Delta \mathbf{u}, p_l \pi_q \mathbf{w})_{T_q}| = |(\mathbf{u}, \Delta p_l \pi_q \mathbf{w})_{T_q}| \leqq \|\mathbf{u} \mid T_q\| \, \|p_l \pi_q \mathbf{w} \mid T_q\|_2 .$$

Analog zu (3.13) ist für $s > 5/2$

$$\left| \left(\frac{\partial u^j \mathbf{u}}{\partial x^j}, p_l \pi_q \mathbf{w} \right)_{T_q} \right| \leqq c_1 \|\mathbf{u} \mid T_q\|^2 \, \|p_l \pi_q \mathbf{w} \mid T_q\|_s ,$$

entsprechend lassen sich die Glieder mit $\mathbf{U}$ abschätzen. Außerdem gilt

$$|(\mathbf{f}, p_l \pi_q \mathbf{w})_{T_q}| \leqq \|\mathbf{f} \mid T_q\| \, \|p_l \pi_q \mathbf{w} \mid T_q\| \leqq 2q \sqrt{C_f}\, \|p_l \pi_q \mathbf{w} \mid T_q\| .$$

Mit den obigen Abschätzungen folgt die Behauptung aus (3.22), da wegen (2.4) und (3.15) für $s_1 > 7/2 + s$ die Ungleichung $\|p_l \pi_q \mathbf{w} \mid T_q\|_s \leqq c(N) \, \|\mathbf{w} \mid K\|_{s_1}$ erfüllt ist ∎

4. Maßtheoretische Hilfsmittel

Es sei $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ein Maßraum mit einer nichtleeren Grundmenge X, einer σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und einem vollständigem Wahrscheinlichkeitsmaß μ, $\mu(X) = 1$. Ist X ein metrischer Raum, so bezeichnet $\mathfrak{B}(X)$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von X, d. h. die minimale σ-Algebra, die alle offenen Mengen aus X enthält. Im folgenden werden nur Borel-Maße, d. h. auf dem Meßraum $(X, \mathfrak{B}(X))$ erklärte Maße betrachtet. Wir geben zunächst einige in [9: Kap. II, § 2] bewiesene Eigenschaften von Borelschen σ-Algebren und meßbaren Abbildungen an.

Ist X_1 ein separabler reflexiver Banachraum, der stetig in dem separablen Banachraum X_2 eingebettet ist, $X_1 \hookrightarrow X_2$, so gilt $\mathfrak{B}(X_1) = \mathfrak{B}(X_2) \cap X_1 := \{\omega \in \mathfrak{B}(X_2) : \omega \subset X_1\}$ und speziell $X_1 \in \mathfrak{B}(X_2)$. Ist ferner X_3 ein Banachraum und $f : X_3 \to X_2$ eine meßbare Abbildung mit $f^{-1}X_1 \neq \emptyset$, dann ist auch die Einschränkung $f_{|f^{-1}(X_1)} : X_3 \to X_1$ meßbar. Für beliebige Meßräume $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ und $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ und einer meßbaren Abbildung $A : X_1 \to X_2$ läßt sich zu einem auf $(X_1, \mathfrak{B}_1)$ gegebenen Maß μ auf $(X_2, \mathfrak{B}_2)$ das Maß $A^*\mu$ gemäß $A^*\mu(\omega) = \mu(A^{-1}\omega)$ für alle $\omega \in \mathfrak{B}_2$ erklären. Für jedes $A^*\mu$-integrierbare Funktional $g : X_2 \to \mathbf{R}$ gilt

$$\int g(u)\, A^*\mu(du) = \int g(Au_0)\, \mu(du_0), \tag{4.1}$$

insbesondere ist also das Funktional $u_0 \to g(Au_0)$ μ-integrierbar. Ist umgekehrt $A \circ g : X_1 \to \mathbf{R}$ μ-integrierbar, so ist auch $u \to g(u)$ $A^*\mu$-integrierbar und es gilt (4.1). Wird über Mengen mit vollständigem Maß integriert, so geben wir wie in (4.1) den Integrationsbereich nicht mit an. Gilt für die Banachräume X_1, X_2 die stetige Einbettung $X_1 \hookrightarrow X_2$, so läßt sich ein auf $(X_1, \mathfrak{B}(X_1))$ erklärtes Maß μ gemäß $\mu(\omega) = \mu(\omega \cap X_1)$ für alle $\omega \in \mathfrak{B}(X_2)$ auf X_2 fortsetzen.

Es sei X ein metrischer Raum. Mit $C_b(X)$ werde die Menge aller auf X definierten stetigen beschränkten Funktionale bezeichnet. Eine Folge $\{\mu_n\}$ von auf X erklärten Maßen heißt *schwach konvergent* gegen das Maß μ auf X, $\mu_n \to \mu$ bei $n \to \infty$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int f(u)\, \mu_n(du) = \int f(u)\, \mu(du) \quad \text{für alle} \quad f \in C_b(X)$$

gilt. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von auf X erklärten Maßen heißt schwach kompakt, wenn aus jeder Folge $\{\mu_n\} \subset \mathfrak{M}$ eine auf X schwach konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann. Gilt $\mu_n \to \mu$ und $\sup\limits_n \int f(u)\, \mu_n(du) \leqq c$ für ein auf X stetiges Funktional f, so ist auch $\int f(u)\, \mu(du) \leqq c$. Als Folgerung aus dem Satz von Prochorov wurde in [9: Lemma II.3.1] das folgende Kriterium für die schwache Kompaktheit bewiesen.

Satz 4.1: *Der Banachraum X_1 sei vollstetig in den separablen Banachraum X_2 eingebettet. Eine Familie $\mathfrak{M}$ von auf X_2 gegebenen Maßen ist auf X_2 schwach kompakt, wenn für alle $\mu \in \mathfrak{M}$ das Funktional $u \to \|u\|_{X_1}$ μ-integrierbar und $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} \int \|u\|_{X_1}\, \mu(du) \leqq c < \infty$ ist.*

Wir wollen nun *partiell* translationshomogene Maße auf Funktionenräumen X betrachten — im Unterschied zu den in [9: Kap. VII, § 1] untersuchten homogenen Maßen, die bei beliebigen Translationen $\hat{\mathbf{h}}$ invariant bleiben, fordern wir die Invarianz der Maße nur für Translationen in x^1- und x^3-Richtung. Dabei sei $X = \mathcal{H}^0(r)$ bzw. $X = L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ und $\hat{\mathbf{h}}$ der durch $\hat{\mathbf{h}} : \mathbf{u}(\mathbf{x}) \to \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ bzw. $\hat{\mathbf{h}} : \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{u}(t, \mathbf{x} + \mathbf{h})$ erklärte Translationsoperator.

Definition 4.1: Ein Maß μ heißt auf X *in x^1- und x^3-Richtung translationshomogen*, wenn $\hat{\mathbf{h}}$ für alle $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3$ einen meßbaren Automorphismus auf X realisiert und $\mu = \hat{\mathbf{h}}^*\mu$ ist.

Satz 4.2: *Ein beschränktes Maß μ ist genau dann in x^1- und x^3-Richtung translationshomogen, wenn gilt*

$$\int f(\mathbf{u})\,\mu(d\mathbf{u}) = \int f(\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u})\,\mu(d\mathbf{u}) \quad \textit{für} \quad f \in C_b(X),\ \mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3.$$

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus (4.1), die Hinlänglichkeit aus dem Satz von B. Levi und einer geeigneten Approximation für die Indikatorfunktionale von Borel-Mengen durch stetige Funktionale ∎

In Analogie zu [9: Theorem VII.1.1] bzw. [2: Lemma 2.1] kann der folgende Satz formuliert werden.

Satz 4.3: *Es sei μ ein in x^1- und x^3-Richtung translationshomogenes Maß auf X und $G: X \to L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bzw. $G: X \to L_1^{\mathrm{loc}}\big((0, T) \times \Omega\big)$ eine Abbildung, die für μ-fast alle $\mathbf{u} \in X$ und alle $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3$ mit dem Translationsoperator $\hat{\mathbf{h}}$ vertauschbar ist. Außerdem seien für Funktionen w mit $w(\mathbf{x}) = \tilde{w}(x^1, x^3)$, $\tilde{w} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, die Funktionale*

$$\mathbf{u} \to \int_\Omega G\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \to \int_\Omega \big|G\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\big|\, w(x)\, d\mathbf{x}$$

bzw.

$$\mathbf{u} \to \int_0^T \int_\Omega G\big(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\big)\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\, dt, \qquad \mathbf{u} \to \int_0^T \int_\Omega \big|G\big(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\big)\big|\, w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\, dt$$

μ-integrierbar und die entsprechenden Integrale endlich. Dann gibt es Konstanten

$$G_0 = \int \int_{-1}^{1} G\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\, dx^2 \mu(d\mathbf{u}) \quad \textit{bzw.} \quad G_1 = \int \int_0^T \int_{-1}^{1} G\big(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\big)\, dx^2\, dt \mu(d\mathbf{u}),$$

so daß für alle $\tilde{w}(\cdot, \cdot) \in L_1(\mathbf{R}^2)$ gilt

$$\int \int_\Omega G\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\, \tilde{w}(x^1, x^3)\, d\mathbf{x} \mu(d\mathbf{u}) = G_0 \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{w}(x^1, x^3)\, dx^1\, dx^3$$

bzw.

$$\int \int_0^T \int_\Omega G\big(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\big)\, \tilde{w}(x^1, x^3)\, d\mathbf{x}\, dt \mu(d\mathbf{u}) = G_1 \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{w}(x^1, x^3)\, dx^1\, dx^3. \tag{4.2}$$

Ist μ ein Maß, das den Voraussetzungen von Satz 4.3 genügt, so ist speziell auch das Funktional $\mathbf{u} \to \int_K G(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$ μ-integrierbar, falls K eine beschränkte meßbare Teilmenge von Ω ist. Dies folgt aus (4.2), wenn man für $\tilde{w}(\cdot, \cdot) \in L_1(\mathbf{R}^2)$ die Indikatorfunktion der Menge

$$K' = \{(x^1, x^3) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in K \quad \text{für ein} \quad x^2 \in (-1, 1)\}$$

einsetzt. Es gilt dann mit $|K'| = \int_{K'} dx^1\, dx^3$

$$\int \int_K G(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\mu(d\mathbf{u}) = |K'| \int \int_{-1}^{1} G\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\, dx^2 \mu(d\mathbf{u}). \tag{4.3}$$

Der folgende Satz wird bei der Konstruktion der statistischen Lösungen benötigt, um aus dem vorgegebenen Anfangsmaß μ die für die Galerkin-Approximationen erforderlichen Anfangsmaße μ_l bereitzustellen.

Satz 4.4: *Auf $X = \mathcal{H}^0(r)$, $r < -1$, sei ein in x^1- und x^3-Richtung translationshomogenes Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit endlicher „Energiedichte"*

$$\bar{e} = \int \int_{-1}^{1} |\mathbf{u}_0(\mathbf{x})|^2\, dx^2 \mu(d\mathbf{u}_0) < \infty \tag{4.4}$$

gegeben, wobei μ die Voraussetzungen des Satzes 4.3 mit $G: \mathbf{u}_0(\cdot) \to |\mathbf{u}_0(\cdot)|^2$ erfülle. Es existiert dann eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mu_l\}$, mit den folgenden Eigenschaften:

1. *μ_l sind auf $\mathcal{M}(l)$ konzentrierte, in x^1- und x^3-Richtung translationshomogene Maße auf $\mathcal{H}^0(r)$.*
2. *Für die charakteristischen Funktionale $\tilde{\mu}_l$ und $\tilde{\mu}$,*

$$\tilde{\mu}_l(\mathbf{w}) = \int \exp\left(i(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})_\Omega\right) \mu_l(d\mathbf{v}_0) \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}(\mathbf{w}) = \int \exp\left(i(\mathbf{u}_0, \mathbf{w})_\Omega\right) \mu(d\mathbf{u}_0),$$

gilt

$$\tilde{\mu}_l(\mathbf{w}) \xrightarrow[l\to\infty]{} \tilde{\mu}(\mathbf{w}) \text{ für beliebige } \mathbf{w} \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^3. \tag{4.5}$$

3. *μ_l erfüllen die Voraussetzungen von Satz 4.3 und*

$$\int \int_{-1}^{1} |\mathbf{v}_0(x)|^2 \, dx^2 \mu_l(d\mathbf{v}_0) \leqq \bar{e} \quad \text{für alle } l. \tag{4.6}$$

Beweis: Zum Beweis des entsprechenden Approximationssatzes für in ganz $\mathbf{R}^n$ translationshomogene Maße wurde in [9: Anhang II, § 4] zu gegebenem $\bar{\mathbf{u}}$ eine $2l$-periodische quellenfreie Vektorfunktion $\bar{\mathbf{u}}^s_{l,\varrho(l)}$ konstruiert, die auch hier für den Fall $n = 2$ benützt werden soll. Für $\bar{\mathbf{u}} = \left(u^1(x^1, x^3), u^3(x^1, x^3)\right)$ möge dazu der Operator $\tilde{Y}_l$,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_l \bar{\mathbf{u}}(x^1, x^3) &= \left(\tilde{Y}_l^1(u^1, u^3), \tilde{Y}_l^3(u^1, u^3)\right) \\ &= \left((\bar{u}^s_{l,\varrho(l)})^1 (x^1, x^3), (\bar{u}^s_{l,\varrho(l)})^2 (x^1, x^3)\right) = \bar{\mathbf{u}}^s_{l,\varrho(l)}(x^1, x^3),\end{aligned}$$

diese Zuordnung realisieren. Damit läßt sich für von x^2 unabhängige Funktionen $\mathbf{u} \in \mathcal{H}^0(r)$ der Operator Y_l durch $Y_l \mathbf{u} = \left(\tilde{Y}_l^1(u^1, u^3), 0, \tilde{Y}_l^3(u^1, u^3)\right)$ erklären. Ferner sei $J: \mathcal{H}^0(r) \to \mathcal{H}^0(r)$ der durch

$$J\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dx^2 = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^{1} u^1(\mathbf{x}) \, dx^2, 0, \int_{-1}^{1} u^3(\mathbf{x}) \, dx^2 \right)$$

erklärte Operator, der solche von x^2 unabhängigen Funktionen $J\mathbf{u}$ bereitstellt, auf die dann der Operator Y_l angewendet werden soll. Mit Hilfe der in [9: Anhang II, § 4] konstruierten Abschneidefunktionen $\tilde{\psi}_l \in C_0^\infty\left((-l, l)^2\right)$ und $\psi_l(x) = \tilde{\psi}_l(x^1, x^3)$ (es gilt dann $0 \leqq \psi_l(\mathbf{x}) \leqq 1$, $\psi_l(\mathbf{x}) \equiv 1$ für $|x^j| \leqq l(\varkappa) := l - l^\varkappa$, $j = 1, 3$, $0 < \varkappa < 1$) kann so zu vorgegebenem $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}^0(r)$ die Approximationsfunktion $\mathbf{u}_l \in \mathcal{M}(l)$ gemäß

$$\mathbf{u}_l(\mathbf{x}) \doteq p_l \pi_l\left(\psi_l(\mathbf{x}) \left(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - J\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\right) + Y_l J\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\right)$$

gebildet werden. Wir betrachten schließlich den Wahrscheinlichkeitsraum

$$\left(\mathcal{H}^0(r) \times T_l', \mathfrak{B}(\mathcal{H}^0(r) \times T_l'), \mu \times \tau_l\right)$$

wobei $T_l' = \{(x^1, x^3) \in \mathbf{R}^2 : |x^1|, |x^3| > l\}$ und τ_l das über T_l' auf Eins normierte Lebesgue-Maß in $\mathbf{R}^2$ ist: $\tau_l(d\mathbf{h}) = (2l)^{-2} \, dh^1 \, dh^3$. Es soll nun gezeigt werden, daß die Verteilung der zufälligen Funktion $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}_l$ mit $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3)$ das gesuchte Maß μ_l ergibt, daß also das gemäß

$$\mu_l(B) = \mu \times \tau_l\left(\left\{(\mathbf{u}_0, h^1, h^3) \in \mathcal{H}^0(r) \times T_l' : \hat{\mathbf{h}}\mathbf{u}_l \in B\right\}\right), \; B \in \mathfrak{B}\left(\mathcal{M}(l)\right),$$

erklärte Maß alle genannten Eigenschaften besitzt. Wegen $\mu\left(\mathcal{H}^0(r)\right) = 1$ und $\tau_l(T_l') = 1$ ist auch $\mu_l\left(\mathcal{M}(l)\right) = 1$, d. h. μ_l ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Translationshomogenität von μ_l in x^1- und x^3-Richtung kann mit den gleichen Betrachtungen wie in [9: Anhang II, Theorem 4.2] bewiesen werden.

Um die Gültigkeit der Ungleichung (4.6) nachzuweisen, benötigt man die Beziehung

$$\begin{aligned}\int_{T_l} |\mathfrak{u}_l(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x} &\leqq \int_{T_l} \big(\psi_l(\mathrm{x})\, |\mathfrak{u}_0(\mathrm{x}) - J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|\big)^2\, d\mathrm{x} + \int_{T_l} |\, Y_l J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x}\\ &\leqq \int_{T_l} |\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})\,|^2\, d\mathrm{x} - \int_{T_l} |J\mathfrak{u}_0(x)|^2\, d\mathrm{x} + \int_{T_l} |\, Y_l J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Außerdem gilt eine Ungleichung [9: Anhang II, (4.51)], die hier als

$$\int \int_{T_l'} |\, Y_l J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^1\, dx^3 \mu(d\mathfrak{u}_0') \leqq \int \int_{T_l'} |J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^1\, dx^3 \mu(d\mathfrak{u}_0) \tag{4.8}$$

geschrieben werden kann. Die rechte Seite ist wegen der Voraussetzung (4.4) endlich. Aus der Homogenität von μ_l und μ folgt dann nach (4.3), (4.7) und (4.8) die geforderte Ungleichung aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}&\int \int_{-1}^{1} |\mathfrak{v}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^2 \mu_l(d\mathfrak{v}_0) \int_{T_l} dx^1\, dx^3 = \int \int_{T_l} |\mathfrak{v}_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x} \mu_l(d\mathfrak{v}_0)\\ &= \int \int_{T_l} (2l)^{-2} \int_{T_l'} |\mathfrak{u}_l(\mathrm{x} + \mathfrak{h})|^2\, dh^1\, dh^3\, d\mathrm{x} \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &= \int \int_{T_l'} (2l)^{-2} \Big[\int_{T_l} |\mathfrak{u}_l(\mathrm{x} + \mathfrak{h})|^2\, d\mathrm{x}\Big] dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0) = \int \int_{T_l} |\mathfrak{u}_l(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x} \mu\, (d\mathfrak{u}_0)\\ &\leqq \int \Big(\int_{T_l} |\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x} - 2 \int_{T_l'} |J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^1\, dx^3 + 2 \int_{T_l'} |\, Y_l J\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^1\, dx^3\Big) \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &\leqq \int \int_{-1}^{1} |\mathfrak{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^2\, \mu(d\mathfrak{u}_0) \int_{T_l'} dx^1\, dx^3.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Darin wurde benutzt, daß wegen der Periodizität von $\mathfrak{u}_l$ die Klammer [...] von $\mathfrak{h}$ unabhängig ist.

Um nun noch die Konvergenz der charakteristischen Funktionale (4.5) zu beweisen, betrachtet man für $\mathrm{w} \in \big(C_0^\infty(\Omega)\big)^3$ die Differenz $\tilde{\mu}_l(w) - \tilde{\mu}(w)$ und berücksichtigt die Homogenität von μ:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_l(\mathrm{w}) - \tilde{\mu}(\mathrm{w}) &= \int \exp i(\mathfrak{v}_0, \mathrm{w})_\Omega\, \mu_l(d\mathfrak{v}_0) - \int \exp i(\mathfrak{u}_0, \mathrm{w})_\Omega\, \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &= \int (2l)^{-2} \int_{T_l'} \big(\exp i(\hat{\mathfrak{h}}\mathfrak{u}_l, \mathrm{w})_\Omega - \exp i(\hat{\mathfrak{h}}\mathfrak{u}_0, \mathrm{w})_\Omega\big)\, dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &= \int (2l)^{-2} \int_{T_l'} \big[\exp i(\mathfrak{u}_l, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega\\ &\quad - \exp i\big(\psi_l(\mathfrak{u}_0 - J\mathfrak{u}_0) + Y_l J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\big)_\Omega\big]\, dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &\quad + \int (2l)^{-2} \int_{T_l'} \exp i\big(\psi_l(\mathfrak{u}_0 - J\mathfrak{u}_0), \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\big)_\Omega \big[\exp i(Y_l J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega\\ &\quad - \exp i\, (J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega\big]\, dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0)\\ &\quad + \int (2l)^{-2} \int_{T_l'} \big[\exp i\big(\psi_l(\mathfrak{u}_0 - J\mathfrak{u}_0) + J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\big)_\Omega\\ &\quad - \exp i(\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega\big]\, dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0).\end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, daß jeder dieser drei Summanden, die nachfolgend mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ bezeichnet werden, für $l \to \infty$ gegen Null strebt. Die Konvergenz von $\mathfrak{S}_2$,

$$\begin{aligned}|\mathfrak{S}_2| &\leqq \int (2l)^{-2} \int_{T_l'} |\exp i(Y_l J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega - \exp i(J\mathfrak{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega|\\ &\quad \times dh^1\, dh^3 \mu(d\mathfrak{u}_0) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

folgt dabei aus dem Beweis der entsprechenden Konvergenzaussage in [9: Anhang II, Theorem 4.3]. Analog zu [9: S. 384] kann auch der Summand $\mathfrak{S}_3$ abgeschätzt werden. Dazu sei für $l(\varkappa) = l - l^\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$,

$$T'_{l(\varkappa)}(\mathrm{w}) \doteq \{(h^1, h^3) \in T_l' : \operatorname{supp} \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w} \subset T_{l(\varkappa)}\}$$

die Menge der $\mathfrak{h}$, für die (wegen $\psi_l(\mathrm{x}) \equiv 1$ bei $\mathrm{x} \in T_{l(\varkappa)}$)

$$\left(\psi_l(\mathrm{u}_0 - J\mathrm{u}_0) + J\mathrm{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\right)_\Omega = (\mathrm{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_\Omega$$

ist. Für ein hinreichend großes, festes l_0 gilt für alle $l(\varkappa) > l_0$

$$T'_{l(\varkappa)}(\mathrm{w}) \supset T'_{l(\varkappa)-l_0} = \{(h^1, h^3) \in T_l' : |h^j| < l - l^\varkappa - l_0, \qquad j = 1, 3\},$$

so daß man für $\mathfrak{S}_3$ die folgende Abschätzung erhält:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_3| &\leqq \int (2l)^{-2} \int\limits_{T_l' \setminus T_l'{}_{(\varkappa)}(\mathrm{w})} 2 dh^1\, dh^3 \mu(d\mathrm{u}_0) \\ &\leqq 2(2l)^{-2}\left(l^2 - (l - l^\varkappa - l_0)^2\right) \leqq c_3 l^{\varkappa-1} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ähnlich kann mit $\mathfrak{S}_1$ verfahren werden, denn mit

$$T_l'(\mathrm{w}) = \{(h^1, h^3) \in T_l' : \operatorname{supp} \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w} \subset T_l\} \supset T'_{l-l_0}$$

gilt entsprechend die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_1| &\leqq \int (2l)^{-2} \int\limits_{T_l'(\mathrm{w})} \left|\exp i(\mathrm{u}_l, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w})_{T_l} - \exp i\left(\psi_l(\mathrm{u}_0 - J\mathrm{u}_0) + Y_l J\mathrm{u}_0, \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\right)_{T_l}\right| \\ &\qquad \times dh^1\, dh^3 \mu(d\mathrm{u}_0) + 2(2l)^{-2}\left(l^2 - (l - l_0)^2\right) \\ &\leqq \int (2l)^{-2} \int\limits_{T_l'} \left|\left((p_l\pi_l - I)\left(\psi_l(\mathrm{u}_0 - J\mathrm{u}_0) + Y_l J\mathrm{u}_0\right), \hat{\mathfrak{h}}^{-1}\mathrm{w}\right)_{T_l}\right| \\ &\qquad \times dh^1\, dh^3 \mu(d\mathrm{u}_0) + c_1 l^{-1} \\ &\leqq (2l)^{-2} \int\limits_{T_l'} \Bigg[\int \int\limits_{T_l} |\psi_l(\mathrm{x})\,(\mathrm{u}_0(\mathrm{x}) - J\mathrm{u}_0(\mathrm{x})) + Y_l J\mathrm{u}_0(\mathrm{x})| \\ &\qquad \times |(p_l - I)\, \pi_l \mathrm{w}(\mathrm{x} - \mathfrak{h})|\, d\mathrm{x}\mu(d\mathrm{u}_0)\Bigg] dh^1\, dh^3 \\ &\quad + (2l)^{-2} \int\limits_{T_l'} \Bigg[\int \int\limits_{T_l} |(\pi_l - I)\, \psi_l(\mathrm{x})\left(\mathrm{u}_0(\mathrm{x}) - J\mathrm{u}_0(\mathrm{x})\right)| \\ &\qquad \times |\mathrm{w}(\mathrm{x} - \mathfrak{h})|\, d\mathrm{x}\mu(d\mathrm{u}_0)\Bigg] dh^1\, dh^3 + c_1 l^{-1} \\ &=: S_{11} + S_{12} + c_1 l^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei wurde der Operator $p_l\pi_l - I$ in die Summanden $(p_l - I)\,\pi_l$ und $\pi_l - I$ zerlegt sowie ausgenutzt, daß $Y_l J\mathrm{u}_0$ bereits ein quellenfreies, in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodisches Vektorfeld ist, dessen Normalenkomponente bei $|x^2| = 1$ verschwindet, also $(\pi_l - I)\, Y_l J\mathrm{u}_0 = 0$ ist. Im ersten Summanden S_{11} ist die Klammer $[\ldots]$ nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung wieder von $\mathfrak{h}$ unabhängig, so daß analog zu (4.7)—(4.9) weiter abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} S_{11} &\leqq \left[\int \int\limits_{T_l} |\psi_l(\mathrm{x})\left(\mathrm{u}_0(\mathrm{x}) - J\mathrm{u}_0(\mathrm{x})\right) + Y_l J\mathrm{u}_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x}\mu(d\mathrm{u}_0)\right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int \int\limits_{T_l} |(p_l - I)\, \pi_l \mathrm{w}(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x}\mu(d\mathrm{u}_0)\right]^{1/2} \\ &\leqq \left[(2l)^2 \int \int\limits_{-1}^{1} |\mathrm{u}_0(\mathrm{x})|^2\, dx^2 \mu(d\mathrm{u}_0)\right]^{1/2} \|(p_l - I)\, \pi_l \mathrm{w} \mid T_l\|. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (4.4) und gemäß (3.14), (3.15) folgt daraus

$$S_{11} \leqq 2l\sqrt{\bar{e}}\; cl^{-2}\, \|\mathbf{w} \mid T_l\|_6 \leqq c_{11}l^{-1} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Für den zweiten Summanden S_{12} gilt

$$\begin{aligned} S_{12} &\leqq (2l)^{-2} \int\limits_{T_l}\int \Big(\big|(\pi_l - I)\, \psi_l(\mathbf{x}) \big(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - J\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\big)\big| \\ &\quad \times \int\limits_{T_l'} |\mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{h})|\, dh^1\, dh^3\Big)\, d\mathbf{x}\mu(d\mathbf{u}_0) \\ &\leqq C(\mathbf{w})\, (2l)^{-2} \int \int\limits_{T_l} \frac{1}{2} \left(l^{-\beta} + l^{\beta} \left|(\pi_l - I)\, \psi_l(\mathbf{x})\, (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - J\mathbf{u}_0(\mathbf{x}))\right|^2\right) d\mathbf{x}\, \mu(d\mathbf{u}_0) \\ &\leqq C(\mathbf{w}) \left[l^{-\beta} + \frac{1}{2}\, l^{\beta}(2l)^{-2} \int (cl^{-\varkappa}\, \|\mathbf{u}_0 \mid T_l\|)^2\, \mu(d\mathbf{u}_0)\right] \\ &\leqq C(\mathbf{w}) \left[l^{-\beta} + \frac{1}{2}\, c^2 l^{\beta - 2\varkappa}\bar{e}\right] \xrightarrow[l\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

falls $0 < \beta < 2\varkappa$ gewählt wird. Hierbei wurde die für $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}^0(r)$ gültige Ungleichung $\|(\pi_l - I)\, \psi_l(\mathbf{u}_0 - J\mathbf{u}_0) \mid T_l\| \leqq cl^{-\varkappa}\, \|\mathbf{u}_0 \mid T_l\|$ [4: S. 54—56] benutzt. Also ist abschließend gezeigt worden

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}_l(w) - \bar{\mu}(w)| &\leqq |\mathfrak{S}_1| + |\mathfrak{S}_2| + |\mathfrak{S}_3| \\ &\leqq (|S_{11}| + |S_{12}| + c_1 l^{-1}) + |\mathfrak{S}_2| + |\mathfrak{S}_3| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

5. Galerkin-Approximation der statistischen Lösung

Es sei μ ein in x^1- und x^3-Richtung translationshomogenes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{H}^0(r)$, $r < -1$, mit endlicher Energiedichte (4.4), das den Voraussetzungen von Satz 4.3 mit $G : \mathbf{u}(\cdot) \to |\mathbf{u}(\cdot)|^2$ genügt, und $\{\mu_l\}$ die in Satz 4.4 konstruierte Folge von auf $\mathcal{M}(l)$ konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Ferner sei $S_l : \mathcal{M}(l) \to C^1\big(0, T; \mathcal{M}(l)\big)$ der nach Satz 3.1 stetige Operator, der dem Anfangswert $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{M}(l)$ die Lösung $S_l\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_l \in C^1\big(0, T; \mathcal{M}(l)\big)$ der Galerkin-Gleichungen (3.2) zuordnet. Wegen der nach Satz 2.4 stetigen Einbettung $C^1\big(0, T; \mathcal{M}(l)\big) \hookrightarrow L_2\big(0, T; \mathcal{H}^0(r)\big)$, $r < -1$, ist $S_l : \mathcal{M}(l) \to L_2\big(0, T; \mathcal{H}^0(r)\big)$ ebenfalls stetig und damit meßbar.

Definition 5.1: Das auf $L_2\big(0, T; \mathcal{H}^0(r)\big)$ erklärte Maß $P_l = S_l{}^*\mu_l$ heißt *Galerkin Approximation der statistischen Lösung von* (3.1) *zum Anfangsmaß* μ.

Bezeichnen wir allgemein mit γ_t den Spuroperator $\gamma_t : \mathbf{u}(\cdot, \cdot) \to \mathbf{u}(t, \cdot)$, so können wir P_l wie folgt charakterisieren.

Satz 5.1: *P_l ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf den Lösungen $\mathbf{u}_l \in S_l\big(\mathcal{M}(l)\big)$ von* (3.2) *konzentriert ist. Für alle $\omega \in \mathfrak{B}\big(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))\big)$ gilt*

$$P_l(\omega) = P_l\big(\omega \cap S_l(\mathcal{M}(l))\big) = \mu_l\big(\gamma_0(\omega \cap S_l(\mathcal{M}(l)))\big). \tag{5.1}$$

Beweis: Die Gültigkeit von (5.1) ergibt sich sofort aus $P_l(\omega) = \mu_l(S_l{}^{-1}\omega)$, wenn man berücksichtigt, daß $S_l{}^{-1}\omega = \gamma_0\big(\omega \cap S_l(\mathcal{M}(l))\big)$ ist. Aus (5.1) folgt insbesondere $P_l\big(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))\big) = \mu_l\big(\mathcal{M}(l)\big) = 1$ und

$$P_l\big(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)) \setminus S_l(\mathcal{M}(l))\big) = P_l\big((L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)) \setminus S_l(\mathcal{M}(l))) \cap S_l(\mathcal{M}(l))\big) = 0,$$

so daß P_l tatsächlich ein auf $S_l\big(\mathcal{M}(l)\big)$ konzentriertes Wahrscheinlichkeitsmaß ist $\blacksquare$

Satz 5.2: *Das Maß P_l ist auf $L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ in x^1- und x^3-Richtung translationshomogen.*

Beweis: Die Behauptung folgt nach Satz 4.2 aus der für alle P_l-integrierbaren Funktionale $f: L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)) \to \mathbf{R}$ und alle $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3$ gültigen Beziehung

$$\begin{aligned}\int f(\mathbf{u})\, P_l(d\mathbf{u}) &= \int f(S_l \mathbf{v}_0)\, \mu_l(d\mathbf{v}_0) = \int f(S_l \hat{\mathfrak{h}} \mathbf{v}_0)\, \mu_l(d\mathbf{v}_0) \\ &= \int f(\hat{\mathfrak{h}} S_l \mathbf{v}_0)\, \mu_l(d\mathbf{v}_0) = \int f(\hat{\mathfrak{h}} \mathbf{u})\, P_l(d\mathbf{u}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei die Homogenität von μ_l (gemäß Satz 4.4) und die nach Satz 3.2 mögliche Vertauschbarkeit von S_l und $\hat{\mathfrak{h}}$ ausgenutzt wurden ∎

Satz 5.3: *Mit einer von l unabhängigen Konstanten C_1 gilt für alle $0 \leqq t \leqq T$, $T > 0$, die Abschätzung*

$$\begin{aligned}&\int \left\{ \int_0^T \int_{-1}^1 \left(|\mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})|^2 + \nu \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})}{\partial x^j} \right|^2 \right) dx^2\, d\tau + \int_{-1}^1 |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2\, dx^2 \right\} P_l(d\mathbf{u}) \\ &\leqq C_1 \left(\int \int_{-1}^1 |\mathbf{v}_0(\mathbf{u})|^2\, dx^2 \mu_l(d\mathbf{v}_0) + C_l \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Beweis: Für $\mathbf{u}_l(t, \cdot) = \gamma_t S_l \mathbf{v}_0(\cdot)$ gilt die Abschätzung (3.4). Wegen $S_l{}^* \mu_l = P_l$ erhält man daraus nach Integration bezüglich $\mu_l(d\mathbf{v}_0)$ entsprechend (4.1)

$$\begin{aligned}&\int \left\{ \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid T_l\|^2 + \int_0^T \left(\|\mathbf{u}(\tau, \cdot) \mid T_l\|^2 + \nu \sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(\tau, \cdot)}{\partial x^j} \right| T_l \right\|^2 \right) d\tau \right\} P_l(d\mathbf{u}) \\ &\leqq c(T) \left(\int \|\mathbf{v}_0 \mid T_l\|^2\, \mu_l(d\mathbf{v}_0) + 4l^2 C_l \right),\end{aligned}$$

wobei die μ_l-Integrierbarkeit aus (4.4) und (4.6) folgte. Da die Maße P_l und μ_l in x^1- und x^3-Richtung translationshomogen sind, ergibt sich die Behauptung nach Satz 4.3 und Gleichheit (4.3) aus Division durch $4l^2$ ∎

Satz 5.4: *Die Galerkin-Approximation der statistischen Lösung von* (3.1) *genügt für $s > 21/2$ und $K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\}$, $N \in \mathbf{N}$, den Abschätzungen*

$$\int \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|_{-s}\, P_l(d\mathbf{u}) \leqq C(N) \quad \text{und} \quad \int \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t, \cdot)}{\partial t} \right| K \right\|_{-s} P_l(d\mathbf{u}) \leqq C(N). \tag{5.4}$$

Die Konstanten hängen dabei nicht von l ab.

Beweis: Es ist $\mathbf{v}_0 \to \|\gamma_t S_l \mathbf{v}_0 \mid K\|_{-s}$ offenbar ein stetiges und somit meßbares Funktional auf $\mathcal{M}(l)$. Die Integration der Ungleichung $\|\gamma_t S_l \mathbf{v}_0 \mid K\|_{-s} \leqq \|\gamma_t S_l \mathbf{v}_0 \mid K\|$ bezüglich $\mu_l(d\mathbf{v}_0)$ liefert wegen $P_l = S_l{}^* \mu_l$ nach (4.1) und (4.3)

$$\begin{aligned}\int \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|_{-s}\, P_l(d\mathbf{u}) &\leqq \int \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|\, P_l(d\mathbf{u}) \leqq 1 + \int \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|^2\, P_l(d\mathbf{u}) \\ &\leqq 1 + |K'| \int \int_{-1}^1 |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2\, dx^2\, P_l(d\mathbf{u}) \\ &\leqq 1 + |K'|\, C_1 \left(\int \int_{-1}^1 |\mathbf{v}_0(\mathbf{x})|^2\, dx^2 \mu_l(d\mathbf{v}_0) + C_l \right) \\ &\leqq 1 + \pi N^2 C_1 (\bar{e} + C_l)\end{aligned}$$

(die letzten beiden Ungleichungen folgten dabei aus (5.3) und (4.6)). Damit ist die erste behauptete Abschätzung nachgewiesen.

Um die zweite Abschätzung nachzuweisen, betrachten wir zunächst diejenigen Werte von l, für die $K \subset T_l$ ist. Sämtliche in (3.6) vorkommenden Funktionale sind wieder μ-integrierbar, so daß sich die folgende für $0 < \varepsilon < 1$ gültige Ungleichungskette ergibt:

$$\int \left\| \frac{\partial \mathrm{u}(t,\cdot)}{\partial t} \middle| K \right\|_{-s} P_l(d\mathrm{u}) \leqq C \int \left\{ \int_K |\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2 \, d\mathrm{x} + l^{-2} \int_{T_l} |\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2 \, d\mathrm{x} \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \frac{|\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2}{(1+|\mathrm{x}|^2)^{(3-\varepsilon)/2}} d\mathrm{x} + 1 \right\} P_l(d\mathrm{u})$$

$$\leqq C \left[\left(|K'| + l^{-2} |T_l'| + \int_{\mathrm{R}^2} \frac{dx^1 \, dx^3}{\left(1 + (x^1)^2 + (x^3)^2\right)^{(3-\varepsilon)/2}} \right) \right.$$

$$\left. \times \int \int_{-1}^{1} |\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2 \, dx^2 P_l(d\mathrm{u}) + 1 \right]$$

$$\leqq C_2 \left(\int \int_{-1}^{1} |\mathrm{v}_0(\mathrm{x})|^2 \, dx^2 \mu_l(d\mathrm{v}_0) + C_l \right) \leqq C(N).$$

Hierbei wurde Satz 4.3 angewandt und das vorletzte Integral wie im Beweis der ersten Abschätzung behandelt. Ist im anderen Fall K nicht in T_l enthalten, d. h. $l \leqq N$, so benutzen wir Satz 3.4. Die Integration von (3.21) bezüglich $\mu_l(d\mathrm{v}_0)$ liefert dann analog

$$\int \left\| \frac{\partial \mathrm{u}(t,\cdot)}{\partial t} \middle| K \right\|_{-s} P_l(d\mathrm{u}) \leqq C \int \left(\int_{T_q} |\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2 \, d\mathrm{x} + 1 \right) P_l(d\mathrm{u})$$

$$\leqq 4Cq^2 \left(\int \int_{-1}^{1} |\mathrm{u}(t,\mathrm{x})|^2 \, dx^2 P_l(d\mathrm{u}) + 1 \right) \leqq C(N) \;\blacksquare$$

Wie in [9: Kap. VII, § 2] soll nun eine Integralidentität für die Galerkin-Approximation P_l der statistischen Lösung von (3.1) hergeleitet werden. Es sei dazu $\mathrm{w}_0 \in \left(C_0^\infty([0,T] \times \Omega)\right)^3$ mit $\operatorname{div} \mathrm{w}_0(t,\cdot) = 0$ und $\operatorname{supp} \mathrm{w}_0 \subset Q_l := [0,T] \times T_l$. Mit w werde die in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Fortsetzung von w_0 und mit $(\cdot,\cdot)_{Q_l}$ das Skalarprodukt in $\left(L_2(Q_l)\right)^3$ bezeichnet. Nach skalarer Multiplikation der Galerkin-Gleichungen (3.2) mit w erhält man dann

$$L_l(\mathrm{u}_l, \mathrm{w}) := \left(\mathrm{u}_l, \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} \right)_{Q_l} + \nu(\mathrm{u}_l, \Delta \mathrm{w})_{Q_l}$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \left((u_l^j \mathrm{u}_l + u_l^j \mathrm{U} + U^j \mathrm{u}_l), \frac{\partial}{\partial x^j} p_l \mathrm{w} \right)_{Q_l} + (\mathrm{f}, p_l \mathrm{w})_{Q_l} = 0. \tag{5.5}$$

Daraus ergibt sich nach Integration bezüglich $\mu_l(d\mathrm{v}_0)$ wegen $\mathrm{u}_l = S_l \mathrm{v}_0$ und $P_l = S_l^* \mu_l$ der folgende Satz.

Satz 5.5: *Für beliebige beschränkte P_l-meßbare Funktionale $\varphi : L_2\left(0, T; \mathcal{R}(l)\right) \to \mathrm{R}$ und beliebige Funktionen $\psi \in \left(L_2(Q_l)\right)^3$ gilt*

$$\int \varphi(\mathrm{u}) \, L_l(\mathrm{u}, \mathrm{w}) \exp\left(i(\mathrm{u}, \psi)_{Q_l}\right) P_l(d\mathrm{u}) = 0.$$

Wir können nun die schwache Kompaktheit der Maßfamilie $\{P_l\}$ nachweisen.

Satz 5.6: *Es gibt eine Zahlenfolge $l \to \infty$, für die die in Definition 5.1 erklärten Maße P_l schwach gegen ein in x^1- und x^3-Richtung translationshomogenes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ konvergieren; dabei gilt*

$$\int \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r_1))} P(d\mathbf{u}) \leqq C < \infty. \tag{5.6}$$

Beweis: Um mit Hilfe von Satz 4.1 die schwache Kompaktheit von $\{P_l\}$ zeigen zu können, erklären wir den Banachraum X von Funktionen $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$, für die die Norm

$$\|\mathbf{u}\|_X = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{C(N)\, 2^N} \int_0^T \left(\|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|_{-s} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t, \cdot)}{\partial t} \right| K \Big\|_{-s} \right) dt + \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r_1))}$$

endlich ist. Hierbei sind $C(N)$ die in Satz 5.4 eingeführten Konstanten und $K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\}$. Da sich völlig analog zu [9: Lemma VII. 5.1] beweisen läßt, daß $X \hookrightarrow L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ für $s > 21/2$ und $r < r_1 < -1$ eine vollstetige Einbettung ist, braucht nur noch die gleichmäßige Beschränktheit von $\int \|\mathbf{u}\|_X P_l(d\mathbf{u})$ gezeigt zu werden. Multipliziert man dazu (5.3) mit der Konstanten

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left(1 + (x^1)^2 + (x^3)^2\right)^{r_1} dx^1\, dx^3, \qquad r < r_1 < -1,$$

so folgt aus (4.2) und (4.6)

$$\int \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1(r_1))} P_l(d\mathbf{u}) \leqq c_1. \tag{5.7}$$

Aus (5.4) ergibt sich nach Integration über $(0, T)$ für $s > 21/2$

$$\frac{1}{C(N)\, 2^N} \int \int_0^T \left(\|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|_{-s} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t, \cdot)}{\partial t} \right| K \Big\|_{-s} \right) dt\, P_l(d\mathbf{u}) \leqq \frac{2T}{2^N}.$$

Summiert man dies über alle $N \in \mathbf{N}$, so erhält man aus dem Satz von B. Levi und aus (5.7) die P_l-Integrierbarkeit von $\|\cdot\|_X$ und die bezüglich l gleichmäßige Beschränktheit der Integrale: $\int \|\mathbf{u}\|_X P_l(d\mathbf{u}) \leqq c_1 + 2T$. Damit ist die Konvergenz $P_l \to P$ für eine Folge $l \to \infty$ gezeigt. Für alle $f \in C_b(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$ gilt deshalb

$$\lim_{l\to\infty} \int f(\mathbf{u})\, P_l(d\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{u})\, P(d\mathbf{u}).$$

Da P_l Wahrscheinlichkeitsmaße sind, folgt mit $f(\mathbf{u}) \equiv 1$ auch $\int P(d\mathbf{u}) = 1$, d. h. P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Aus der in Satz 5.2 festgestellten Homogenität von P_l ergibt sich nach (5.2) die für alle $\mathbf{h} = (h^1, 0, h^3) \in \mathbf{R}^3$ und alle $f \in C_b(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$ gültige Beziehung

$$\int f(\mathbf{u})\, P(d\mathbf{u}) = \lim_{l\to\infty} \int f(\mathbf{u})\, P_l(d\mathbf{u}) = \lim_{l\to\infty} \int f(\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u})\, P_l(d\mathbf{u}) = \int f(\hat{\mathbf{h}}\mathbf{u})\, P(d\mathbf{u}),$$

woraus nach Satz 4.2 die geforderte Homogenität von P folgt. Die Ungleichung (5.6) ergibt sich schließlich wegen $P_l \to P$ aus (5.7) ∎

6. Eigenschaften der statistischen Lösung

Von dem (nicht notwendig eindeutig bestimmten) Grenzmaß P soll gezeigt werden, daß es auf den im folgenden Sinne verallgemeinerten Lösungen des Problems (3.1) konzentriert ist.

Definition 6.1: $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$, $r < -1$, heißt *verallgemeinerte Lösung des Problems* (3.1), wenn für alle $\mathbf{w}_0 \in (C_0^\infty((0, T) \times \Omega))^3 \cap C(0, T; \mathcal{H}^0(r)) =: G^\infty$ die Beziehung

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0) := \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t}\right) + \nu(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{w}_0) + \sum_{j=1}^{3} \left(u^j\mathbf{u} + u^j\mathbf{U} + U^j\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial x^j}\right)$$
$$+ (\mathbf{f}, \mathbf{w}_0) = 0 \tag{6.1}$$

erfüllt ist. Mit $(\cdot, \cdot)$ wird dabei das Skalarprodukt in $L_2(0, T; (L_2(\Omega))^3)$ bezeichnet.

Satz 6.1: *Es gibt eine in $L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ abgeschlossene Menge $W_0 \in \mathfrak{B}(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$, $r < -1$, mit $P(W_0) = 1$, so daß jedes Element $\mathbf{u} \in W_0$ verallgemeinerte Lösung des Problems* (3.1) *ist.*

Beweis: Wie in [9: Theorem VII.7.1] genügt der Nachweis, daß

$$\int L(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0) \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P(d\mathbf{u}) = 0 \qquad \left(\mathbf{w}_0 \in G^\infty, \psi \in L_2(0, T; \mathcal{H}^0(-r))\right) \tag{6.2}$$

gilt. Es läßt sich zu jedem $\mathbf{w}_0 \in G^\infty$ eine Zahl l und eine Kugel $B \subset \mathbf{R}^3$ so wählen, daß $K_0 := B \cap \Omega \subset T_l$ und $\operatorname{supp} \mathbf{w}_0 \subset [0, T] \times K_0$ gilt. Mit $\mathbf{w}$ soll wieder die auf T_l in x^1- und x^3-Richtung $2l$-periodische Fortsetzung von $\mathbf{w}_0$ bezeichnet werden. Nach Definition von G^∞ und nach Satz 2.1 ist $\mathbf{w} \in \mathcal{R}(l)$ und somit $\pi_l \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Aus (5.5) und (6.1) ergibt sich für $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l = S_l \mathbf{v}_0$ die Gleichung $L_l(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0) + F(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ mit

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{3} \left((u^j\mathbf{u} + u^j\mathbf{U} + U^j\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial x^j}(p_l - I)\, \pi_l \mathbf{w}\right)_{Q_l} + \left(\mathbf{f}, (p_l - I)\, \pi_l \mathbf{w}\right)_{Q_l}.$$

Wir wählen nun $\varphi_R \in C_b(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$ mit $0 \leqq \varphi_R(\mathbf{u}) \leqq 1$ und

$$\varphi_R(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r))} < R \\ 0 & \text{für } \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r))} > R + 1. \end{cases}$$

Ist außerdem $\psi \in (L_2(Q_l))^3$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset [0, T] \times K_0$, dann folgt wegen $(\mathbf{u}, \psi)_{Q_l} = (\mathbf{u}, \psi)$ aus Satz 5.5

$$\int \varphi_R(\mathbf{u})\, L(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0) \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P_l(d\mathbf{u}) = -\int \varphi_R(\mathbf{u})\, F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P_l(d\mathbf{u}).$$

Weil der Integrand auf der linken Seite ein (bezüglich $\mathbf{u}$) stetiges beschränktes Funktional auf $L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$ ist, kann nach Satz 5.6 für $l \to \infty$ zum Grenzwert übergegangen werden:

$$\int \varphi_R(\mathbf{u})\, L(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0) \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P(d\mathbf{u})$$
$$= -\lim_{l \to \infty} \int \varphi_R(\mathbf{u})\, F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P_l(d\mathbf{u}). \tag{6.3}$$

Dabei verschwindet die rechte Seite. Um dies zu zeigen, benutzt man für $m > 5/2$ die Abschätzungen (3.14) und (3.15) und die Formel (4.2):

$$\left|\int \varphi_R(\mathbf{u}) \left(u^j\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x^j}(p_l - I)\, \pi_l \mathbf{w}\right)_{Q_l} \exp\left(i(\mathbf{u}, \psi)\right) P_l(d\mathbf{u})\right|$$
$$\leqq c_1 \int \int_0^T \int_{T_l} |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\, \|(p_l - I)\, \pi_l \mathbf{w}(t, \cdot) \mid T_l\|_m\, dt P_l(d\mathbf{u})$$
$$\leqq c_2 \sup_{t \in [0,T]} l^{m+2-n}\, \|\mathbf{w} \mid T_l\|_{m+n+7/2}\, C_1 \left[\int \int_{-1}^{1} |\mathbf{v}_0(\mathbf{x})|^2\, dx^2 \mu_l(d\mathbf{v}_0) + C_t\right] \leqq c_3 l^{5-n},$$

wobei außerdem die Abschätzungen (5.3) und (4.6) verwendet wurden. Ganz analog lassen sich die anderen in $F(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ enthaltenen Glieder abschätzen. Da für jedes R der

Integrand auf der linken Seite von (6.3) durch $c \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r))}$ majorisiert werden kann, folgt die Behauptung (6.2) beim Grenzübergang $R \to \infty$ wegen (5.6) aus dem Satz von Lebesgue ∎

Um analog zu [9: Kap. VII, § 11] den Begriff der statistischen Lösung für das Problem (3.1) sachgerecht definieren zu können, benötigen wir noch die folgenden Funktionenräume. Für $s > 21/2$ sei BV^{-s} die Menge der Funktionen $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$, für die die Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{BV^{-s}} = \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^0(r))} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{u}|_N}{C(N)\, 2^N}$$

endlich ist. Dabei sind $C(N)$ die Konstanten aus Satz 5.4 und

$$|\mathbf{u}|_N = \sup_{\{t_j\}} \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{osc}_{[t_{j-1},t_j)} (N)\, \mathbf{u} + \operatorname*{vrai\,sup}_{[0,T]} \|\mathbf{u}(t, \cdot) \mid K\|_{-s}$$

mit

$$K = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < N\} \quad \text{und} \quad \operatorname*{osc}_{[t,\tau)} (N)\, \mathbf{u} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t',\tau' \in [t,\tau)} \|\mathbf{u}(t', \cdot) - \mathbf{u}(\tau', \cdot) \mid K\|_{-s}.$$

In der Definition von $|\mathbf{u}|_N$ wird das Supremum über alle Zerlegungen $\{t_j\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$, $k \in \mathbb{N}$, des Intervalls $[0, T]$ genommen. Außerdem sei Φ^{-s} der Raum der auf Ω erklärten (verallgemeinerten) Funktionen $\mathbf{u}$ mit $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ und endlicher Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{\Phi^{-s}} = \left[\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{\|\mathbf{u} \mid K\|_{-s}}{C(N)\, 2^N}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Wie in [9: Kap. VII, § 8] läßt sich zeigen, daß $BV^{-s} \in \mathfrak{B}(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$ gilt. Für jedes $\mathbf{u} \in BV^{-s}$ ist die Abbildung $t \to \mathbf{u}(t, \cdot) \in \Phi^{-s}$ (evtl. nach Abänderung auf einer Teilmenge des Intervalls $[0, T]$ vom Lebesgue-Maß Null) eine stückweise stetige Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen erster Ordnung. Darüber hinaus ist diese Funktion rechtsseitig stetig, so daß der Spuroperator $\gamma_t : BV^{-s} \to \Phi^{-s}$ gemäß $\mathbf{u} \to \mathbf{u}(t + 0, \cdot)$ erklärt ist.

Definition 6.2: Ein auf $L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r))$, $r < -1$, erklärtes Wahrscheinlichkeitsmaß P heißt *raum-zeitliche statistische Lösung des Problems* (3.1) *zu einem auf* $\mathcal{H}^0(r)$ *gegebenen Anfangsmaß* μ, wenn es auf einer Borel-Menge $W \subset BV^{-s}$, $s > 21/2$, von verallgemeinerten Lösungen des Problems (3.1) konzentriert und $P(\gamma_0^{-1}\omega) = \mu(\omega)$ für alle $\omega \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^0(r))$ ist.

Der letzte Teil dieser Definition ist gerechtfertigt, da für $\omega \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^0(r)) \subset \mathfrak{B}(\Phi^{-s})$ die Menge $\gamma_0^{-1}\omega$ bis auf eine Menge vom P-Maß Null mit $\{\mathbf{u} \in W \cap BV^{-s} : \gamma_0 \mathbf{u} \in \omega\} \in \mathfrak{B}(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$ übereinstimmt (vgl. [9: Lemma VII.10.2]).

Satz 6.2: *Ist μ ein auf $\mathcal{H}^0(r)$, $r < -1$, gegebenes in x^1- und x^3-Richtung translationshomogenes Wahrscheinlichkeitsmaß mit endlicher Energiedichte* (4.4), *dann gibt es zu diesem Anfangsmaß μ eine in x^1- und x^3-Richtung translationshomogene raum-zeitliche statistische Lösung des Problems* (3.1), *die auf einer Menge $W \subset L_2(0, T; \mathcal{H}^1(r))$ konzentriert ist und für $0 \leqq t \leqq T$ den folgenden Ungleichungen genügt:*

$$\int \left\{ \int_{-1}^{1} |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2\, dx^2 + \nu \int_0^T \int_{-1}^{1} \left(\sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial \mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})}{\partial x^j} \right|^2 \right) dx^2\, d\tau \right\} P(d\mathbf{u})$$

$$\leqq C_1 \left(\int \int_{-1}^{1} |\mathbf{v}_0(\mathbf{x})|^2\, dx^2 \mu(d\mathbf{v}_0) + C_f \right), \tag{6.4}$$

$$\int \|\mathbf{u}\|_{BV^{-s}}\, P(d\mathbf{u}) \leqq C_2 < \infty. \tag{6.5}$$

Beweis: Wir zeigen, daß das in Satz 5.6 erhaltene translationshomogene Wahrscheinlichkeitsmaß P, das nach Satz 6.1 bereits auf einer Menge $W_0 \in \mathfrak{B}(L_2(0, T; \mathcal{H}^0(r)))$

von verallgemeinerten Lösungen von (3.1) konzentriert ist, auch die anderen geforderten Eigenschaften besitzt. Dazu erhält man zunächst in der gleichen Weise wie in [9: Theorem VII.8.1] aus den Ungleichungen (5.4) und (5.6) die Behauptung (6.5). Entsprechend ergibt sich durch den Grenzübergang $l \to \infty$ analog zu [9: Kap. VII, § 9] aus (5.3) die Ungleichung (6.4), woraus mit Satz 4.3 insbesondere auch $\int \|\mathrm{u}\|^2_{L_2(0,T;\mathscr{H}^1(r))} P(d\mathrm{u}) < \infty$ folgt. Damit kann festgestellt werden, daß P auf der Menge $W = W_0 \cap BV^{-s} \cap L_2(0, T; \mathscr{H}^1(r)) \in \mathfrak{B}(L_2(0, T; \mathscr{H}^0(r)))$ konzentriert ist. Auf der Grundlage von Satz 4.4 folgt schließlich wie in [9: Kap. VII, § 10], daß das für alle $\omega \in \mathfrak{B}(\Phi^{-s})$ gemäß $\mu_0(\omega) = P(\gamma_0^{-1}\omega)$ erklärte Maß μ_0 auf $\mathscr{H}^0(r) \subset \Phi^{-s}$ konzentriert ist und dort mit μ übereinstimmt ∎

Zusätzlich läßt sich analog zu [9: Kap. VII, § 10] beweisen, daß für die verallgemeinerten Lösungen $\mathrm{u} \in W$ und alle $\mathrm{w} \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \cap \mathscr{H}^0(r)$ für fast alle $t \in [0, T]$ die Gleichung

$$(\mathrm{u}(t, \cdot), \mathrm{w})_\Omega - \int_0^t \left\{\nu(\mathrm{u}(\tau, \cdot), \Delta\mathrm{w})_\Omega + \sum_{j=1}^3 \left(u^j\mathrm{u} + u^j\mathrm{U} + U^j\mathrm{u}, \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}\right)_\Omega\right\} d\tau$$

$$= (\mathrm{u}(0, \cdot), \mathrm{w})_\Omega + \int_0^t (\mathrm{f}(\tau, \cdot), \mathrm{w})_\Omega \, d\tau$$

erfüllt ist.

LITERATUR

[1] Foias, C.: Statistical study of Navier-Stokes equations, I and II. Rend. Sem. Matem. Univ. Padova 48 (1972), 219—348 and 49 (1973), 9—123.

[2] Foias, C., and R. Temam: Homogeneous statistical solutions of Navier-Stokes equations. Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 913—957.

[3] Hopf, E.: Statistical hydrodynamics and functional calculus. J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952), 87—123.

[4] Krause, B.: Translationshomogene statistische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen im Kanal. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1984.

[5] Ладыженская, О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва: Изд-во Наука 1970.

[6] Temam, R.: Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis. Amsterdam: North Holland 1979.

[7] Visik, M. I., et A. V. Foursikov: Solutions statistiques homogènes des systèmes différentiels paraboliques et du système de Navier-Stokes. Ann. Scuola norm. super. Pisa Cl. Sci. (Ser. IV) 4 (1977), 531—576.

[8] Вишик, М. И., и А. В. Фурсиков: Трансляционно однородные статистические решения и индивидуальные решения с бесконечной энергией системы уравнений Навье-Стокса. Сиб. мат. журн. 19 (1978), 1005—1031.

[9] Вишик, М. И., и А. В. Фурсиков: Математические задачи статистической гидромеханики. Москва: Изд-во Наука 1980.

[10] Вишик, М. И., и А. И. Комеч: Об оценке среднего квадрата разности скоростей для однородных статистических решений трехмерной системы Навье-Стокса. В сб.: Труды семинара имени И. Г. Петровского, вып. 10. Москва: Изд-во Московского университета 1984.

Manuskripteingang: 01. 11. 1984; in revidierter Fassung 06. 08. 1986

VERFASSER:

Dr. Bernd Krause
Abteilung Mathematik/Rechentechnik der Ingenieurhochschule
Bernburger Str. 52—57
DDR-4370 Köthen