Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (4) 1987, S. 301 – 320

# Некоторые вопросы теории аппроксимативно дифференцируемых функций

Н. М. Исаков

Es werden globale und lokale Eigenschaften approximativ differenzierbarer Funktionen untersucht.

Изучаются глобальные и локальные свойства аппроксимативно дифференцируемых функций.

Global and local properties of approximatively differentiable functions are studied.

Пусть $\Omega$ — борелевское подмножество в $\mathbf{R}^n$ и $\mu$ — регулярная борелевская мера на $\Omega$ такая, что $\mu\Omega < \infty$. В классическом анализе хорошо известно (см., например, [2]), что $\mu$-измеримые, $\mu$-почти всюду конечные функции $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ полностью описываются следующим свойством: Для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся компакт $K \subset \Omega$ и непрерывная функция $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ такие, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K = g|_K$. Вместе с данным глобальным условием для описания $\mu$-измеримых функций $f$ можно использовать следующее свойство функции в точке (см. [2]): Функция $f$ $\mu$-аппроксимативно непрерывна в точке $x \in \Omega$, если

$$\inf \left\{ r \,\middle|\, \frac{\mu\{y \in B(x, \varrho) \cap \Omega \mid |f(y) - f(x)| \geqq \delta\}}{\mu B(x, \varrho)} \xrightarrow[\varrho \to 0]{} 0 \right\} = 0;$$

здесь и ниже $B(x, \varrho)$ — замкнутый шар пространства $\mathbf{R}^n$ с центром в точке $x$ и радиуса $\varrho$. Оказывается (см. [2]), что функция $f$ $\mu$-измерима и $\mu$-почти всюду конечна тогда и только тогда, когда $f$ $\mu$-аппроксимативно непрерывна в $\mu$-почти каждой точке $x \in \Omega$. Еще один пример соотношения между глобальным условием и свойством функции в точке дают нам непрерывные функции: Прообраз всякого открытого множества открыт тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется $f(y) \to f(x)$ $(y \to x,\, y \in \Omega)$.

Иначе обстоит дело с понятием дифференцируемости. Нам не известно глобальное условие описывающее функции дифференцируемые на открытом множестве $\Omega$. Соответствующее глобальное описание имеет место для более широкого понятия аппроксимативной дифференцируемости: функция $f$ — аппроксимативно дифференцируема в почти каждой точке множества $\Omega$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти компакт $K \subset \Omega$ и функцию $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ такие, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K = g|_K$; здесь $\mu$ — мера Лебега. Доказательство этого факта можно найти в [2]. Там же поставлена проблема распространения этого результата на случай старших производных.

Близкие утверждения получены в работе Кальдерона и Зигмунда [1]. Глобальное условие $f \in W_p{}^r(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ влечет существование в почти каждой точке $L_p$-производных функции $f$. Если для функции $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^1$ в почти всех точках множества $\Omega$ существуют $L_p$-производные, то для всякого $\varepsilon > 0$ существуют компакт $K \subset \Omega$ и функция $g \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$ такие, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K = g|_K$.

В предлагаемой работе исследуются свойства пространств аппроксимативно дифференцируемых функций $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$, $CW_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ и $CWF_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$. В основе определений этих пространств (см. ниже) лежит следующее глобальное условие: функцию можно пререопределить на множестве как угодно малой меры так, что она станет непрерывно дифференцируемой. При этом нам оказалось удобнее работать не с функциями, а с джетами $f = \{f^\alpha\}_{|\alpha| \leq r}$, то есть наборами функций $f^\alpha$: $\Omega \to \mathbf{R}^m$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Допуская некоторую вольность речи можно говорить, что функция $f^0$ принадлежит одному из этих пространств, если существует джет $f$ ему принадлежащий такой, что $f^0 \in f$.

В первой части работы устанавливается эквивалентность глобального и локального определения этих пространств, устанавливается их связь с известными пространствами дифференцируемых функций. В частности $CW_\mu{}^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$, где $\mu$ — мера Лебега оказалось обычным пространством аппроксимативно дифференцируемых функций. Здесь предъявляется распространение результатов Кальдерона-Зигмунда на случай $0 < p < 1$, приводится решение проблемы (см. выше) поставленной в [2]. В качестве приложения доказывается существование аппроксимативно дифференцируемой однозначной ветви у многозначного отображения $f^{-1}$ обратного к липшицевому.

Вторая часть работы посвящена исследованию предельных структур пространств $CWF_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ и $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$, аналогичных предельной структуре определяемой сходимостью почти всюду в пространстве измеримых, почти всюду конечных функций. Здесь устанавливается, что всякий джет из этих пространств есть предел в смысле вводимых ниже псевдотопологий последовательности джетов

$$\{D^\alpha g_\nu\}_{|\alpha| \leq r}|_\Omega \qquad \left(g_\nu \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),\ \nu \in \mathbf{N}\right).$$

В статье принята сквозная нумерация формул, предложений и теорем. Основные результаты выделяются в виде теорем.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность П. П. Забрейко за постоянное внимание к работе.

## Часть I

### § 1 Пространство $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$

Пусть $\Omega$ — борелевское подмножество в $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что борелевский джет $f$ порядка $r$ из $\Omega$ в $\mathbf{R}^m$ *принадлежит* $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$), если для всякой регулярной борелевской меры $\mu$ такой, что $\mu\Omega < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset \Omega$, для которого $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$f^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqq r - |\alpha|} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(x) = o(|y-x|^{r-|\alpha|}) \tag{1}$$

при $|y - x| \to 0$ и $x, y \in K$. Условие (1) означает (см., например, [11]), что существует функция $g \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ такая, что $D^\alpha g|_K = f^\alpha|_K$ при всех $|\alpha| \leqq r$.

Будем говорить, что джет $f$ порядка $r$ из $\Omega$ в $\mathbf{R}^m$ *принадлежит* $T^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$, если при всех $x \in \Omega$ выполняется условие

$$f^0(y) - \sum_{|\alpha| \leqq r} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x) = o(|y-x|^r) \quad \text{при} \quad y \to x \quad \text{и} \quad y \in \Omega.$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$T_x{}^r f(y) = \sum_{|\alpha| \leqq r} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x).$$

Следующая теорема уточняет результаты работы [7].

Теорема 1: *Пусть $n = 1$ и $r \leqq 2$. Джет $f \in CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ тогда и только тогда, когда для любой регулярной борелевской меры $\mu$ такой, что $\mu\Omega < \infty$ существует компакт $K \subset \Omega$, для которого $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K \in T^r(K, \mathbf{R}^m)$.*

Доказательство: Пусть для всякой регулярной борелевской меры $\mu$ такой, что $\mu\Omega < \infty$ существует компакт $K \subset \Omega$ для которого $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K \in T^r(K, \mathbf{R}^m)$. Рассмотрим компакт $K_1 \subset \Omega$ такой, что $\mu K_1 > \mu\Omega - \varepsilon/3$, джет $f|_{K_1}$ — непрерывен и $f|_{K_1} \in T^r(K_1, \mathbf{R}^m)$. Далее, рассмотрим подмножества $\Phi(\sigma, N) \subset K_1$ точек таких, что $\|D^{(j)}f(x)\| \leqq N$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ и

$$|f^0(y) - T_x{}^r f(y)| \leqq \sigma\, |y-x|^r \quad \text{при} \quad |y-x|_0 \leqq \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad y \in K_1;$$

здесь и ниже

$$D^{(j)}f(x)\, h = \sum_{|\alpha|=j} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x) \quad (h \in \mathbf{R}^n) \text{ и } \|D^{(j)}f(x)\| = \sup_{|h|=1} |D^{(j)}f(x)\, h|.$$

Очевидно, что $\Phi(\sigma, N)$ — борелевские множества и

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi(\sigma, N) = K_1. \tag{2}$$

Выберем возрастающую последовательность $(N_\nu)$ натуральных чисел и убывающую последовательность борелевских множеств $(I_\nu)$ из условий

$$I_\nu = \bigcap_{k \leqq \nu} \Phi\left(\frac{1}{k}, N_k\right) \text{ и } \mu I_\nu > \mu K_1 - \varepsilon/3 \quad (\nu \in \mathbf{N}).$$

Число $N_1$ можно выбрать в силу (2) и взять $I_1 = \Phi(1, N_1)$. Предположим, что $N_1, \ldots, N_{\nu-1}$ и $I_1, \ldots I_{\nu-1}$ мы уже выбрали. Так как

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{\nu}, N\right) \cap I_{\nu-1} = I_{\nu-1}$$

и все участвующие в этом равенстве множества измеримы, то

$$\mu\left(\Phi\left(\frac{1}{\nu}, N\right) \cap I_{\nu-1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mu I_{\nu-1} > \mu K_1 - \varepsilon/3.$$

Поэтому найдется число $N_\nu > N_{\nu-1}$ такое, что взяв $I_\nu = \Phi(1/\nu, N_\nu) \cap I_{\nu-1}$ получим $\mu I_\nu > \mu K_1 - \varepsilon/3$. Положим теперь $K_2 = I_1 \cap I_2 \cap \ldots$ Так как $\mu I_1 < \mu\Omega < \infty$ и $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, то $\mu I_\nu \to \mu K_2$ и, следовательно, $\mu K_2 \geqq \mu K_1 - \varepsilon/3$. На множестве $K_2$ для каждого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f^0(y) - T_x{}^r f(y)| \leqq \sigma\, |y-x|^r \quad \text{при} \quad |y-x| < \delta \quad \text{и} \quad x, y \in K_2.$$

Действительно, пусть $\sigma > 0$. Выберем $\nu$ такое, что $1/\nu < \sigma$ и положим $\delta = 1/N_\nu$. Так как $K_2 \subset \Phi(1/\nu, N_\nu)$, то

$$|f^0(y) - T_x{}^r f(y)| \leqq \frac{1}{\nu}\, |y-x|^r \quad \text{при} \quad |y-x| < \frac{1}{N_\nu} \quad \text{и} \quad x, y \in K_2.$$

Так как $K_2$ борелевское множество и $\mu K_2 \geqq \mu K_1 - \varepsilon/3 > \mu\Omega - 2\varepsilon/3$, то можно считать, что $K_2$ — компакт.

Далее ограничимся рассмотрением случая $r = 2$ и $m = 1$. Случай $m > 1$ очевидно следует из рассмотренного ниже. Положим

$$\Phi_{x,y}(z) = T_x{}^r f(z) - T_y{}^r f(z) \qquad (x, y \in K_2;\ z \in \mathbf{R}^1),$$

для определенности считая, что $x < y$. Пусть $\sigma > 0$. Выберем $\delta > 0$ таким образом, что

$$|\Phi_{x,y}(x)| \leqq \frac{\sigma}{3}|y - x|^2, \qquad |\Phi_{x,y}(y)| \leqq \frac{\sigma}{3}|y - x|^2, \qquad |\Phi''_{x,y}(x)| \leqq \frac{\sigma}{3}.$$

По теореме о среднем на интервале $(x, y)$ найдется точка $z_0$ такая, что

$$|\Phi'_{x,y}(z_0)| = \frac{|\Phi_{x,y}(y) - \Phi_{x,y}(x)|}{|y - x|} \leqq \frac{2\sigma}{3}|y - x|.$$

С другой стороны

$$|\Phi'_{x,y}(z_0) - \Phi'_{x,y}(x)| \leqq \max_{z \in [x, z_0]} |\Phi'_{x,y}(z)|\, |z_0 - x| \leqq \frac{\sigma}{3}|y - x|.$$

Поэтому $|\Phi'_{x,y}(x)| \leqq \sigma|y - x|$. Остается заметить, что

$$\Phi'_{x,y}(x) = f^1(x) - f^1(y) - \frac{(x - y)}{1!} f^2(y).$$

Отсюда получаем, что на $K_2$ выполняются условия

$$f^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqq r - |\alpha|} \frac{(y - x)^\beta}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(x) = o(|y - x|^{r - |\alpha|}) \qquad (|\alpha| \leqq r)$$

при $|y - x| \to 0$ и $x, y \in K_2$. Это означает, что $f \in CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ и теорема в одну сторону доказана. Обратное утверждение очевидно ∎

Пусть $f \in T^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ и $\Omega$ — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $C$ подмножество $\Omega$ состоящее из точек, в которых функция $f^0$ не имеет обычных производных до порядка $r$.

Теорема 2: *Множество $C$ нигде не плотно в $\Omega$.*

Доказательство: Обозначим $C_0$ множество точек $x \in \Omega$, для которых существует сходящаяся к $x$ последовательность $(x_\nu) \subset \Omega$ такая, что $\|D^{(r)}f(x_\nu)\| \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Из результатов работы [6] следует, что $C \subset C_0$. Мы покажем, что $C_0$ нигде не плотно в $\Omega$. Для этого рассмотрим пересечение $C_0$ с любым замкнутым кубическим интервалом $Q$ вложенным в $\Omega$. Покажем, что $C_0 \cap Q$ нигде не плотно в $Q$. В предположении противного $C_0 \cap Q$ содержит замкнутый шар $Ш$. Для всякого $\sigma > 0$ обозначим $\Phi(\sigma, N)$ множество точек $x \in Ш$ таких, что $\|D^{(j)}f(x)\| \leqq N$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ и

$$|f^0(y) - T_x{}^r f(y)| \leqq \sigma|y - x|^r \quad \text{при} \quad |y - x| \leqq \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad y \in Ш.$$

Легко видеть, что $Ш = \Phi(\sigma, 1) \cup \Phi(\sigma, 2) \cup \ldots$ Множество $Ш$ — второй категории. Значит при некотором $N_0$ множество $\Phi(\sigma, N_0)$ не является нигде не плотным и, следовательно, его замыкание содержит шар $Ш_0$. Нам понадобится следующая

Лемма 1: *Имеет место включение* $\overline{\Phi(\sigma, N_0)} \subset \Phi(2\sigma, N_0 + \sigma)$.

Прежде чем доказывать лемму 1 завершим доказательство теоремы. Из леммы 1 следует $Ш_0 \subset \overline{\Phi(\sigma, N_0)} \subset \Phi(2\sigma, N_0 + \sigma)$. Пусть $x$-внутренняя точка в $Ш_0$. Тогда найдется окрестность $U_x \subset Ш_0$ точки $x$ такая, что $\|D^{(r)}f(y)\| \leqq N_0 + \sigma$ для всех $y \in U_x$. Значит $x \notin C_0$, в противоречии с включением $x \in Ш_0 \subset \Phi(2\sigma, N_0 + \sigma) \subset Ш \subset C_0 \cap Q$. Таким образом $C_0 \cap Q$ не содержит шара, то есть $C_0 \cap Q$ нигде не плотно в $Q$.

По теореме Безиковича (см. [4]) можно найти не более чем счетное семейство замкнутых кубических интервалов $Q_{ij}$ ($i = 1, \ldots, M$; $j = 1, 2, \ldots$) таких, что $Q_{ij} \subset \Omega$, $C_0 \subset \cup \{Q_{ij}$: все $i$ и $j\}$ и для всякого $i$ множества $\{Q_{ij}\}$, $j \geqq 1$, попарно не пересекаются. Тогда $C_0 \cap Q_{ij}$ нигде не плотно в $Q_{ij}$ для всех $i$ и $j$. Поэтому для $i = 1, \ldots, M$

$$C_i = C_0 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij} \quad \text{нигде не плотно в} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij}$$

и, следовательно, нигде не плотно в $\Omega$. Наконец $C_0 = C_1 \cup \ldots \cup C_M$ нигде не плотно в $\Omega$ как конечное объединение нигде не плотных множеств ∎

Доказательство леммы 1: Очевидно, что $\Phi(\sigma, N) \subset \Phi(2\sigma, N + \sigma)$. Возьмем $x \in \overline{\Phi(\sigma, N)} \setminus \Phi(\sigma, N)$ и последовательность $(x_\nu) \subset \Phi(\sigma, N)$ сходящуюся к $x$. Так как $\|D^{(j)}f(x_\nu)\| \leqq N$, то можно считать, что последовательности $(D^{(j)}f(x_\nu))_\nu$ сходятся к некоторым однородным многочленам $B^j$ ($j = 0, 1, \ldots, r$). Пусть точка $y \in Ш$ такая, что $|y - x_\nu| \leqq 1/(N + \sigma)$. Тогда начиная с некоторого момента выполняется неравенство $|y - x_\nu| \leqq 1/N$ и, следовательно, неравенство $|f^0(y) - T^r_{x_\nu}f(y)| \leqq \sigma\,|y - x|^r$. Это означает, что

$$\left|f^0(y) - \sum_{j=0}^{r} D^{(j)}f(x_\nu)\, h\right| \leqq \sigma\,|h|^r \qquad (h = y - x).$$

Переходя к пределу получаем

$$\left|f^0(y) - \sum_{j=0}^{r} B^j h\right| \leqq \sigma\,|h|^r \qquad (h = y - x).$$

Джет $f \in T^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ и, следовательно, $f|_Ш \in T^r(Ш, \mathbf{R}^m)$. Поэтому

$$\left|\sum_{j=0}^{r} (B^j - D^{(j)}f(x))\, h\right| \leqq \sigma\,|h|^r + \left|f^0(x + h) - \sum_{|\alpha| \leqq r} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x)\right|.$$

Отсюда получаем, что $B^j = D^{(j)}f(x)$ ($j = 0, \ldots, r - 1$) и $\|B^r - D^r f(x)\| \leqq \sigma$. Поэтому $\|D^{(r)}f(x)\| \leqq N + \sigma$. И, если $|y - x| \leqq 1/(N + \sigma)$, то

$$\left|f^0(y) - \sum_{j=0}^{r} D^{(j)}f(x)\,(y - x)\right|$$
$$\leqq \left|f^0(y) - \sum_{j=0}^{r-1} B^j(y - x)\right| + \left|(B^r - D^{(r)}f(x))\,(y - x)\right| \leqq 2\sigma\,|y - x|^r \;∎$$

## § 2 Пространство $CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$

Пусть $\Omega$ — борелевское подмножество в $\mathbf{R}^n$, $\mu$ — регулярная борелевская мера на $\Omega$, $Y$ — нормированное пространство. Для $\varphi\colon \Omega \to \mathbf{R}^1$ будем писать

$$(\mu) \operatorname*{ap}_{y \in \Omega} \limsup_{y \to x} \varphi(y) = t,$$

если

$$t = \inf \left\{\delta \,\middle|\, \frac{\mu\big(B(x, \varrho) \cap \{y \in \Omega \mid \varphi(y) \geqq \delta\}\big)}{\mu B(x, \varrho)} \xrightarrow[\varrho \to 0]{} 0\right\}.$$

Ниже все джеты предполагаются $\mu$-измеримыми. Будем говорить, что джет $\{f^\alpha\}_{|\alpha|\leqq r}$ из $\Omega$ в $Y$ *$\mu$-аппроксимативно дифференцируем* на $\Omega$ до порядка $r$, если для $\mu$-почти всех $x \in \Omega$ выполняется

$$(\mu)\operatorname*{ap}_{y\in\Omega}\limsup_{y\to x}\frac{|f^0(y)-T_x{}^rf(y)|}{|y-x|^r}=0.$$

Пусть $\mu\Omega<\infty$. Будем говорить, что джет $f\in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется компакт $K\subset\Omega$ такой, что $\mu K>\mu\Omega-\varepsilon$ и для всех $|\alpha|\leqq r$ выполняется

$$f^\alpha(y)-\sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}f^{\alpha+\beta}(x)=o(|y-x|^{r-|\alpha|})$$

при $|y-x|\to 0$ и $x, y\in K$. Следующая теорема представляет собой обобщение результатов работы [8].

Теорема 3: *Пусть $\mu$ — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ и $\mu\Omega<\infty$. Джет $f$ $\mu$-аппроксимативно дифференцируем на $\Omega$ до порядка $r$ тогда и только тогда, когда $f\in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$.*

Доказательство: Пусть джет $f$ $\mu$-аппроксимативно дифференцируем на $\Omega$ до порядка $r$. Для заданного $\varepsilon>0$ выберем компакт $K_0\subset\Omega$ такой, что $\mu K_0>\mu\Omega-\varepsilon/4$,

$$(\mu)\operatorname*{ap}_{y\in\Omega}\limsup_{y\to x}\frac{|f^0(y)-T_x{}^rf(y)|}{|y-x|^r}=0$$

для всех $x\in K_0$ и $f|_{K_0}$ — непрерывен. Положим

$$Q(x,\varrho,\sigma_1)=\left\{y\in B(x,\varrho)\cap K_0\left|\frac{|f^0(y)-T_x{}^rf(y)|}{|y-x|^r}\geqq\sigma_1\right.\right\}$$

и

$$P(\sigma_1,\sigma_2,N)=\{x\in K_0\mid \mu Q(x,\varrho,\sigma_1)<\sigma_2\mu B(x,\varrho)\ \text{при}\ 0<\varrho<1/N\}.$$

Множество $P(\sigma_1,\sigma_2,N)$ — измеримо (действительно, так как множества $K_0\times Q(x,\varrho,\sigma_1)$ и $K_0\times B(x,\varrho)$ $\mu\times\mu$-измеримы, то по теореме Фубини измеримы $\mu Q(x,\varrho,\sigma_1)$ и $\mu B(x,\varrho)$ как функции от $x$, откуда и следует измеримость множества $P(\sigma_2,\sigma_2,N)$). Из определения $P(\sigma_1,\sigma_2,N)$ получаем, что

$$\bigcup_{N=1}^{\infty}P(\sigma_2,\sigma_2,N)=K_0\quad\text{и поэтому}\quad \mu K_0=\lim_{N\to\infty}\mu P(\sigma_1,\sigma_2,N).$$

Построим измеримое множество $I(\sigma_2)\subset K_0$ со свойствами: $\mu I(\sigma_2)\geqq\mu K_0-\varepsilon/4$ и для всякого $\sigma>0$ найдется такое $\varrho_0>0$, что

$$\mu\left\{y\in B(x,\varrho)\cap I(\sigma_2)\left|\frac{|f^0(y)-T_x{}^rf(y)|}{|y-x|^r}\geqq\sigma\right.\right\}<\sigma_2\mu B(x,\varrho)$$

при всех $\varrho<\varrho_0$ и $x\in I(\sigma_2)$. Для этого построим возрастающую последовательность чисел $(N_\nu)$ и убывающую последовательность измеримых множеств $(D(\sigma_2,\nu))$ таких, что $\mu D(\sigma_2,\nu)>\mu K_0-\varepsilon/4$. $N_1$ выберем так, что $\mu P(1,\sigma_2,N_1)>\mu K_0-\varepsilon/4$ и положим $D(\sigma_2,1)=P(1,\sigma_2,N_1)$. Если для $\nu<\nu_0$ числа $N_\nu$ и множества $D(\sigma_2,\nu)$ уже построены, то выберем $N_{\nu_0}$ так, что

$$\mu\left(P\left(\frac{1}{\nu_0},\sigma_2,N_{\nu_0}\right)\cap D(\sigma_2,\nu_0-1)\right)>\mu K_0-\varepsilon/4\quad\text{и}\quad N_{\nu_0}>N_{\nu_0-1}$$

и положим

$$D(\sigma_2, \nu_0) = P(1/\nu_0, \sigma_2, N_{\nu_0}) \cap D(\sigma_2, \nu_0 - 1).$$

Наконец, взяв $I(\sigma_2) = D(\sigma_2, 1) \cap D(\sigma_2, 2) \cap \ldots$ получаем множество с указанным свойством. Действительно, $\mu I_2(\sigma_2) = \lim \mu D(\sigma_2, \nu) \geqq \mu K_0 - \varepsilon/4$ и, если для заданного $\sigma$ подобрать $\nu_0$ такое, что $1/\nu_0 < \sigma$, то при $\varrho_0 = 1/N_{\nu_0}$, в силу вложения $I(\sigma_2) \subset P(1/\nu_0, \sigma_2, N_{\nu_0})$ будет выполнятся указанное неравенство.

Положим $G(x, \sigma_2, \varrho) = B(x, \varrho) \setminus I(\sigma_2)$ и

$$A(\sigma_2, N) = \left\{x \in I(\sigma_2) \,\middle|\, \mu G(x, \sigma_2, \varrho) < \sigma_2 \mu B(x, \varrho) \text{ при } 0 < \varrho < \frac{1}{N}\right\}.$$

Имеримость множества $A(\sigma_2, N)$ доказывается также, как измеримость множества $P(\sigma_1, \sigma_2, N)$. Очевидно, что $A(\sigma_2, 1) \cup A(\sigma_2, 2) \cup \ldots$ совпадает с точками плотности множества $I(\sigma_2)$. Поэтому $\mu A(\sigma_2, N) \to \mu I(\sigma_2)$. Возьмем теперь $N(\sigma_2)$ так, чтобы $\mu A(\sigma_2, N(\sigma_2)) > \mu I(\sigma_2) - \varepsilon/4$ и положим $S(\sigma_2) = A(\sigma_2, N(\sigma_2))$. На $S(\sigma_2)$ для всякого $\sigma > 0$ найдется такое $\delta = \min(\sigma_0, 1/N(\sigma_2))$, что

$$\mu R(x, \varrho, \sigma, \sigma_2) < 2\sigma_2 \mu B(x, \varrho) \quad \text{при всех} \quad \varrho < \delta,$$

где

$$R(x, \varrho, \sigma, \sigma_2) = \left\{y \in B(x, \varrho) \,\middle|\, \text{либо } y \notin I(\sigma_2), \text{ либо } \frac{|f^0(y) - T_x{}^r f(y)|}{|y - x|^r} \geqq \sigma\right\}.$$

Пусть $\sigma_0$ такое, что

$$0 < \sigma_0 \leqq \frac{\mu(B(x, |y - x|) \cap B(y, |y - x|))}{\mu B(x, |y - x|) + \mu B(y, |y - x|)}.$$

Возьмем $\sigma_2$ так, что $0 < 2\sigma_2 < q\sigma_0$, где $q$ — число из леммы 2 (см. ниже) и покажем, что при таком выборе $\sigma_2$ выполняются условия

$$(R_y f)^\alpha (x) = o(|y - x|^{r - |\alpha|}) \quad (|y - x| \to 0, \ y \in S(\sigma_2)),$$

где $(R_y f)^\alpha (x) = f^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f(x)$ $(|\alpha| \leqq r)$. Для этого, взяв $\sigma > 0$ и подобрав соответствующее ему $\delta > 0$, рассмотрим разность

$$T_x{}^r f(z) - T_y{}^r f(z) = \sum_{|\alpha| \leqq r} \frac{(z - x)^\alpha}{\alpha!} (R_y f)^\alpha (x),$$

где $|x - y| < \delta$ и $x, y \in S(\sigma_2)$. В обозначениях $\lambda = |x - y|$ и $h = \lambda^{-1}(z - x)$ получим

$$T_x{}^r f(z) - T_y{}^r f(z) = \sum_{|\alpha| \leqq r} \frac{\lambda^{|\alpha|} h^\alpha}{\alpha!} (R_y f)^\alpha (x) = \sum_{|\alpha| \leqq r} a_\alpha h^\alpha.$$

Заметим, что

$$\mu(R(x, \lambda, \sigma, \sigma_2) \cup R(y, \lambda, \sigma, \sigma_2))$$
$$< 2\sigma_2(\mu B(x, \lambda) + \mu B(y, \lambda)) < 2\sigma_2 \sigma_0^{-1} \mu(B(x, \lambda) \cap B(y, \lambda)).$$

Положив

$$\tilde{Q}(x, y) = (B(x, \lambda) \cap B(y, \lambda)) \setminus (R(x, \lambda, \sigma, \sigma_2) \cup R(y, \lambda, \sigma, \sigma_2))$$

заметим, что множество $\lambda^{-1}(\tilde{Q}(x, y) + x)$ удовлетворяет условию леммы 2 с $e = \lambda^{-1} \times (y - x)$. Так как для $z \in \tilde{Q}(x, y)$ выполняется

$$|f^0(z) - T_x{}^r f(z)| < \sigma |z - x| \quad \text{и} \quad |f^0(z) - T_y{}^r f(z)| < \sigma |z - y|,$$

то

$$\sum_{|\alpha|\leqq r}\frac{\lambda^{|\alpha|}h^\alpha}{\alpha!}(R_y f)^\alpha(x)<2\sigma\lambda^r.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!}(R_y f)^\alpha(x)\right|\leqq 2M\sigma\lambda^r,\quad \text{т.е.}\quad |(R_y f)^\alpha(x)|\leqq 2M\alpha!\,\sigma\,|y-x|^{r-|\alpha|}.$$

Последнее, в силу произвольности $\sigma$, и означает, что при всех $|\alpha|\leqq r$ выполняется

$$(R_y f)^\alpha(x)=o(|y-x|^{r-|\alpha|})\qquad (|y-x|\to 0,\ y\in S(\sigma_2)).$$

Выберем теперь компакт $K\subset S(\sigma_2)$ так, чтобы $\mu K>\mu S(\sigma_2)-\varepsilon/4$. Тогда $\mu K>\mu\Omega-\varepsilon$ и на $K$ выполняются условия теоремы Уитни о продолжении (см., например, [2]), то есть для $|\alpha|\leqq r$ выполняется

$$f^\alpha(y)-\sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}f^{\alpha+\beta}(x)=o(|y-x|^{r-|\alpha|})$$

при $|y-x|\to 0$ и $x,y\in K$. Таким образом $f\in CW_\mu{}^r(\Omega,Y)$. Так как обратное утверждение очевидно, то теорема 3 доказана ∎

Лемма 2: *Пусть*

$$W(h)=\sum_{|\alpha|\leqq r}a_\alpha h^\alpha,$$

*$S_0$ — измеримое подмножество в $\mathbf{R}^n$ и пусть при некотором единичном векторе $e$ выполняется неравенство*

$$\mu((B(0,1)\cap B(e,1))\setminus S_0)<\delta\mu(B(0,1)\cap B(e,1)).$$

*Тогда существуют числа $q>0$ и $M>0$ такие, что при всех $\tau<q$ найдутся $\bar h_1,\dots,\bar h_d\in S_0\cap\operatorname{int}(B(0,1)\cap B(e,1))$, для которых $|\alpha_\alpha|\leqq M\max_\nu|W(\bar h_\nu)|$.*

Доказательство: Очевидно, что для каждого $e\in S^{n-1}$ с $|e|=1$ на множестве $\psi(e)=\operatorname{int}(B(0,1)\cap B(e,1))$ найдется набор точек $h_1(e),\dots,h_d(e)$ таких, что система уравнений (относительно $a_\alpha$)

$$\sum_{|\alpha|\leqq r}a_\alpha h_\nu{}^\alpha(e)=W(h_\nu(e))\qquad(\nu=1,\dots,d)\tag{3}$$

однозначно разрешима и при этом $|\alpha_\alpha|\leqq M(e)\max_\nu|W(h_\nu(e))|$. В силу непрерывности коэффициентов уравнения (3), для каждого набора $\{e,h_1(e),\dots,h_d(e)\}$ найдется число $\varrho(e)$ такое, что шары $B(h_\nu(e),\varrho(e))$ не пересекаются и $B(h_\nu(e),\varrho(e))\subset\psi(e)$ $(\nu=1,\dots,d)$, и для любого набора точек $\bar h_1,\dots,\bar h_d$ таких, что $\bar h_\nu\in B(h_\nu(e),\varrho(e))$ система уравнений

$$\sum_{|\alpha|\leqq r}a_\alpha\bar h_\nu{}^\alpha=W(\bar h_\nu)\qquad(\nu=1,\dots,d)$$

однозначно разрешима и при этом $|a_\alpha|\leqq 2M(e)\max_\nu|W(\bar h_\nu)|$.

Очевидно, что для каждой точки $e\in S^{n-1}$ найдется открытая окрестность $U_e$ такая, что для всякого $i\in U_e$ множество $\psi(i)$ содержит $B(h_1(e),\varrho(e))\cup\dots\cup B(h_d(e),\varrho(e))$. Набор $\{U_e\}_e$ представляет собой открытое покрытие компактного многообразия $S^{n-1}$. Выделим из него конечное подпокрытие

$$U_{e_1},\dots,U_{e_l}\tag{4}$$

и положим $M = 2\max_\nu M(e_\nu)$ и $q_0 = \min_\nu \varrho(e_\nu)$. Возьмем теперь $q$ так, что $0 < q < \mu(B(0, q_0))/\mu(B(0, 1) \cap B(e, 1))$. Тогда из условия $\mu\big((B(0, 1) \cap B(e, 1)) \setminus S_0\big) < \tau\mu(B(0, 1) \cap B(e, 1))$ получаем, что каждый шар радиуса $q_0$, вложенный в $\psi(e)$, имеет с $S_0$ непустое пересечение. Выбрав в (4) $U_{e_i}$ так, что $e \in U_{e_i}$, в соответствующих шарах $B(h_\nu(e_i), q_0)$ возьмем $\tilde{h}_\nu \in S_0 \cap B\big(h_\nu(e_i), q_0\big)$ $(\nu = 1, \ldots, d)$. Отсюда получим $|a_\alpha| \leqq M \max_\nu |W(\tilde{h}_\nu)|$ ∎

Из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие 1: *Пусть $\mu$ — мера Лебега, $f, g \in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$ и $f^0 = g^0$ почти всюду. Тогда $f = g$ почти всюду.*

Назовем вогнутую неотрицательную функцию $\omega$ *модулем непрерывности*, если $\omega(0) = 0$. Ниже $\mu$ — мера Лебега. *Пространство* $\mathrm{Lip}\,(r + \omega; \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, где $\omega$ — некоторый модуль непрерывности, определим как множество ограниченных джетов порядка $r$ из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, для которых

$$\max_{|\alpha| \leq r} \sup_{x \neq y} \frac{|(R_y f)^\alpha (x)|}{\omega(|y - x|)\,|y - x|^{r-|\alpha|}} < \infty.$$

Теорема 4: *Пусть $\mu$ — мера Лебега и $\mu\Omega < \infty$. Джет $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ при почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname*{ap\,lim\,sup}_{y \in \Omega \quad y \to x} \frac{|f^0(y) - T_x{}^r f(y)|}{\omega(|y - x|)\,|y - x|^r} < \infty$$

*тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся компакт $K \subset \Omega$ и джет $g \in \mathrm{Lip}\,(r + \omega; \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ такие, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_K = g|_K$.*

Доказательство теоремы 4 полностью аналогично доказательству теоремы 3 и потому мы его опускаем.

Особый интерес представляет случай $\omega(\varrho) = \varrho$. Применяя известную теорему Данжуа-Радемахера-Степанова получаем, что джет $f$ порядка $r$ из $\Omega$ в $\mathbf{R}^m$ при почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$\operatorname*{ap\,lim\,sup}_{y \in \Omega \quad y \to x} \frac{|f^0(y) - T_x{}^r f(y)|}{|y - x|^{r+1}} < \infty$$

тогда и только тогда, когда найдется джет $g \in CW_\mu{}^{r+1}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ такой, что $f \subset g$.

Будем говорить (см. [1]), что джет $f \in L_p T^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ $(0 < p < \infty)$, если при почти всех $x \in \Omega$ выполняется

$$\left(\frac{1}{\mu B(x, \varrho)} \int\limits_{B(x,\varrho) \cap \Omega} |f^0(y) - T_x{}^r f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} = o(\varrho^r) \quad (\varrho \to 0).$$

Легко показать (см. [8]), что условие $f \in L_p T^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ влечет аппроксимативную дифференцируемость до порядка $r$ джета $f$ на $\Omega$. В сочетании с теоремой 3 мы получим отсюда обобщение результата Кальдерона-Зигмунда об $L_p$-дифференцируемости (см. [1]) на случай $0 < p < 1$.

## § 3 Теоремы о правом обратном отображении

Перейдем теперь к установлению аналогов классических теорем об обратном отображении для аппроксимативно дифференцируемых функций.

Предложение 1: *Пусть $X$ — полное сепарабельное метрическое пространство, $Y$ — сепарабельное пространство Фреше, $f$ — борелевское отображение борелевского подмножества $\Omega \subset X$ в $Y$ и $\mu$ — регулярная борелевская мера на $Y$. Тогда существует борелевское подмножество $\Xi \subset f(\Omega)$ и борелевское отображение $g: \Xi \to \Omega$ такие, что $\mu\big(f(\Omega) \setminus \Xi\big) = 0$ и $f \circ g = id_\Xi$.*

Доказательство: Множество $f(\Omega)$ — аналитическое как образ борелевского множества при борелевском отображении и, следовательно, $\mu$-измеримое. В силу регулярности меры $\mu$, найдется борелевское подмножество $\Xi_0 \subset f(\Omega)$ такое, что $\mu(f(\Omega) \setminus \Xi_0) = 0$. Множества $\Omega$ и $\Xi_0$ можно представить как образы $\Omega = \varphi(I_1)$ и $\Xi_0 = \psi(I_2)$ замкнутых подмножеств $I_1$ и $I_2$ пространства $\mathcal{N}$ иррациональных чисел (см., например, [10]) при непрерывных однозначных отображениях $\varphi$ и $\psi$. Положим

$$\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in I_1, y \in I_2, \psi(y) - f\big(\varphi(x)\big) = 0\big\}.$$

Плоское множество $\Gamma$ является борелевским как прообраз нуля при борелевском отображении. По теореме Янкова (см. [14]) его можно униформизовать относительно оси $OY$ измеримой кривой $\eta$ такой, что лебеговы множества функции $\eta: I_2 \to I_1$ являются аналитическими. Рассмотрим отображение $g_0 = \varphi \circ \eta \circ \psi^{-1}$. Очевидно, что $f \circ g_0 = id_{\Xi_0}$. Покажем, что $g_0$ $\mu$-измеримо. Пусть $U$ — открытое подмножество в $X$. Так как $(\varphi \circ \eta)^{-1}(U)$ — аналитическое множество и $\psi$ — борелевское отображение, то множество $g_0^{-1}(U)$ также аналитическое и, следовательно, $\mu$-измеримое. В силу $\mu$-измеримости $g_0$ найдется борелевское подмножество $\Xi \subset \Xi_0$ такое, что $\mu(\Xi_0 \setminus \Xi) = 0$ и $g_0|_\Xi$-борелевское отображение. Остается положить $g = g_0|_\Xi$ ∎

Для всякого джета $f \in CW^r(\Omega, Y)$ $(r \geqq 1)$ положим

$$B_\nu = B_\nu(f) = \{x \in \Omega \mid \dim \operatorname{im} D^{(1)}f(x) \leqq \nu\}.$$

Через $H^\delta$ обозначим $\delta$-мерную меру Хаусдорфа в пространстве $Y$.

Предложение 2: *Пусть $Y$ — сепарабельное банахово пространство, $f \in CW^r(\Omega, Y)$ и $\delta \geqq \nu - (n - \nu)/r$. Тогда $H^\delta f^0(B_\nu) = 0$.*

Доказательство: Очевидно, что множества $B_\nu$-борелевские. Из предложения 1 следует, что существует борелевское подмножество $\Xi_\nu \subset f^0(B_\nu)$ и отображение $g_\nu: \Xi_\nu \to B_\nu$ такие, что $H^\delta\big(f^0(B_\nu) \setminus \Xi_\nu\big) = 0$ и $f^0 \circ g_\nu = id_{\Xi_\nu}$. Пусть $H^\delta f^0(B_\nu) = H^\delta(\Xi_\nu) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $H^\delta(\Xi_\nu) < \infty$. Рассмотрим регулярную борелевскую меру $\mu$ на $g_\nu(\Xi_\nu)$ определенную равенством $\mu A = H^\delta f^0(A)$ $(A \subset g_\nu(\Xi_\nu))$.

Так как $f \in CW^r(\Omega, Y)$, то найдется компакт $K_\nu \subset g_\nu(\Xi_\nu)$ такой, что $\mu K_\nu > 0$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполнено

$$f^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqq r - |\alpha|} \frac{(y - x)^\beta}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(x) = o(|y - x|^{r-|\alpha|})$$

при $|y - x| \to 0$ и $x, y \in K_\nu$. По теореме Уитни о продолжении (см. [2]) найдется функция $F \in C^r(\mathbf{R}^n, Y)$ такая, что $(\partial^\alpha F/\partial x^\alpha)|_{K_\nu} = f^\alpha|_{K_\nu}$. Так как множество $A_\nu = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \dim \operatorname{im} DF(x) \leqq \nu\}$ содержит $K_0$, то

$$\mu(A_\nu \cap g(\Xi_\nu)) \geqq \mu K_\nu > 0. \tag{5}$$

С другой стороны

$$\mu(A_\nu \cap g(\Xi_\nu)) = H^\delta F(A_\nu \cap g_\nu(\Xi_\nu)) \leqq H^\delta F(A_\nu).$$

Из известной теоремы для гладких функций (см. [2]) получаем, что $H^{\delta}F(A_{\nu}) = 0$. Поэтому $\mu K_{\nu} = 0$ в противоречии с (5). Таким образом $H^{\delta}f^0(B_{\nu}) = 0$ ∎

Пусть $f \in CW^r(\Omega, \mathbf{R}^n)$ и $g \in CW^r(\Xi, \mathbf{R}^n)$, где $\Xi$ — борелевское подмножество в $\mathbf{R}^n$. Для тех $x$, для которых $g(x) \in \Omega$, определим *джет* $f \circ g$ следующим образом:

$$D^{(k)}(f \circ g)(x)\, h = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+km_k=k} \frac{1}{m_1!\ldots m_k!} \widetilde{D^{(m_1+\cdots+m_k)}} f(g(x))\,(D^{(1)}g(x)\,h)^{m_1}\ldots(D^{(k)}g(x)\,h)^{m_k},$$

где для всякой $k$-линейной формы $B$ обозначим

$$\tilde{B}h_1\ldots h_k = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_k B(\varepsilon_1 h_1 + \cdots + \varepsilon_k h_k).$$

Отображение $id_{\Xi}$ будем в дальнейшем отождествлять с джетом

$$\{D^{\alpha} id_{\mathbf{R}^n}\}_{|\alpha|\leqq r}|_{\Xi}.$$

Через $\mathrm{mes}_n$ обозначим меру Лебега на $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5: *Пусть* $f \in CW^r(\Omega, \mathbf{R}^n)$. *Тогда:*

1. *найдутся борелевское подмножество* $\Xi \subset f^0(\Omega)$ *и джет* $g \in CW^r(\Xi, \mathbf{R}^n)$ *такие, что* $\mathrm{mes}_n\left(f^0(\Omega) \setminus \Xi\right) = 0$ *и* $f \circ g = id_{\Xi}$;
2. *для всякого борелевского подмножества* $\Xi \subset f^0(\Omega)$ *и любой борелевской функции* $g^0$, *удовлетворяющей условию* $f^0 \circ g^0 = id_{\Xi}^0$ *найдется джет* $g \in CW^r(\Xi, \mathbf{R}^n)$ *такой, что* $g^0 \in g$ *и* $f \circ g = id_{\Xi}$.

Доказательство: Из предложения 2 следует, что $\mathrm{mes}_n f^0(B_{n-1}) = 0$. В силу предложения 1 можно найти борелевское подмножество $\Xi \subset f^0(\Omega) \setminus f^0(B_{n-1})$ и борелевский гомеоморфизм $g^0\colon \Xi \to \Omega$ такие, что $\mathrm{mes}_n(f^0(\Omega) \setminus \Xi) = 0$ и $f^0 \circ g^0 = id_{\Xi}$. Формальное равенство $D^{(k)}(f \circ g) = D^{(k)} id_{\Xi}$ позволяет построить джет $g$ порядка $r$ из $\Xi$ в $\mathbf{R}^n$.

Покажем, что $g \in CW^r(\Xi, \mathbf{R}^n)$. Пусть $\mu$ — регулярная борелевская мера на $\Xi$ такая, что $\mu\Xi < \infty$. Положим $\mu_0(A) = \mu f^0(A \cap g^0(\Xi))$. Тогда $\mu_0$ — регулярная борелевская мера на $\Omega$ и $\mu_0\Omega < \infty$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset \Omega \setminus B_{n-1}$ такой, что $\mu_0 K > \mu_0\Omega - \varepsilon$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$f^{\alpha}(y) - \sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|} \frac{(y-x)^{\beta}}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(x) = o(|y-x|^{r-|\alpha|})$$

при $|y - x| \to 0$ и $x, y \in K$. Из теоремы Уитни о продолжении следует существование функции $F \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ такой, что $D^{\alpha}F|_K = f^{\alpha}|_K$ ($|\alpha| \leqq r$). В каждой точке множества $K$ для функции $F$ выполнены условия теоремы об обратной функции. Поэтому для каждого $x \in K$ сущесвует открытое множество $U_x$ такое, что $F|_{U_x}$ — диффеоморфизм класса $C^r$. Пусть $G_x = (F|_{U_x})^{-1}$. Ясно, что

$$D^{\alpha}G_x|_{f^0(K)} = g^{\alpha}|_{f^0(K) \cap F(U_x)}.$$

Обозначим $Ш_x$ замкнутый шар с центром в $f^0(x)$ содержащийся в $F(U_x)$ и $Ш_x^0$ открытый шар с центром в $f^0(x)$ такой, что $Ш_x^0 \subset Ш_x$. Легко видеть, что для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$g^{\alpha}(t) - \sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|} \frac{(t-z)^{\beta}}{\beta!} g^{\alpha+\beta}(z) = o(|t-z|^{r-|\alpha|}) \tag{6}$$

при $|t-z| \to 0$ и $t, z \in Ш_x \cap f^0(K)$. Покажем, что (6) имеет место при $|t-z| \to 0$ и $t, z \in f^0(K)$.

В предположении противного найдется последовательность $((t_k, z_k))_k \subset f^0(K) \times f^0(K)$ сходящаяся к $(t_0, t_0) \in f^0(K) \times f^0(K)$, для которой при всех $k$ выполняется

$$\max_{|\alpha|\leqq r} \frac{\left| g^\alpha(t_k) - \sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|} \frac{(t_k - z_k)^\beta}{\beta!} g^{\alpha+\beta}(z_k)\right|}{|t_k - z_k|^{r-|\alpha|}} \geqq \sigma > 0. \tag{7}$$

Так как множество $f^0(K)$ компакт, то оно покрывается конечным числом шаров $Ш^0_{x_1}, \ldots, Ш^0_{x_m}$. Поэтому $t_0$ принадлежит одному из этих шаров, например, $Ш^0_{x_1}$. В силу сходимости последовательности $((t_k, z_k))_k$ начиная с некоторого номера выполняется $t_k \in Ш^0_{x_1}$ и $z_k \in Ш^0_{x_1}$. Поэтому

$$\max_{|\alpha|\leqq r} \frac{\left| g^\alpha(t_k) - \sum_{|\beta|\leqq r-|\alpha|} \frac{(t_k - z_k)^\beta}{\beta!} g^{\alpha+\beta}(z_k)\right|}{t_k - z_k|^{r-|\alpha|}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

в противоречии с (7). Значит для джета $g$ для всех $|\alpha| \leqq r$ имеет место (6) при $|t-z| \to 0$ и $t, z \in f^0(K)$. Остается заметить, что $\mu f^0(K) = \mu_0 K > \mu \Xi - \varepsilon$. Таким образом $g \in CW^r(\Xi, \mathbf{R}^n)$ ∎

Пусть $\mu_0$ — регулярная борелевская мера на $Y$. Будем говорить, что $f \in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$ обладает $N(\mu_0, \mu)$*-свойством*, если для всякого множества $N \subset \Omega$ такого, что $\mu N = 0$ выполняется $\mu_0 f^0(N) = 0$.

Предложение 3: *Пусть $f \in CW_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ $(r \geqq 1)$, $f$ обладает $N(\mathrm{mes}_m, \mu)$-свойством и $r \geqq n - m + 1$. Тогда* $\mathrm{mes}_m f^0(B_{m-1}) = 0$.

Доказательство: Сначала заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K_\varepsilon$ такой, что $\mu K_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$ и $f|_{K_\varepsilon} \in CW^r(K_\varepsilon, \mathbf{R}^m)$. Поэтому, в силу предложения 2, $\mathrm{mes}_m f^0(B_{m-1}(f|_{K_\varepsilon})) = 0$. Возьмем теперь последовательность $\varepsilon_\nu \to 0$ и, соответствующую ей, последовательность компактов $K_\nu = K_{\varepsilon_\nu}$ и положим $\Omega_0 = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$. Легко видеть, что $\mu(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$. Кроме того

$$\mathrm{mes}_m f^0(B_{m-1}(f|_{\Omega_0})) \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{mes}_m f^0(B_{m-1}(f|_{K_\nu})) = 0.$$

Так как

$$f^0(B_{m-1}(f)) \subset f^0(B_{m-1}(f|_{\Omega_0})) \cup f^0(\Omega \setminus \Omega_0)$$

и $f$ обладает $N(\mathrm{mes}_m, \mu)$-свойством, то $\mathrm{mes}_m f^0(B_{m-1}(f)) = 0$ ∎

Теорема 6: *Пусть $f \in CW_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^n)$ $(r \geqq 1)$, $\mathrm{mes}_n f^0(\Omega) < \infty$ и $f$ обладает $N(\mathrm{mes}_n, \mu)$-свойством. Тогда:*

1. *существует борелевское подмножество $\Xi \subset f^0(\Omega)$ и джет $g \in CW^r_{\mathrm{mes}_n}(\Xi, \mathbf{R}^n)$ такие, что $\mathrm{mes}_n (f^0(\Omega) \setminus \Xi) = 0$ и $f \circ g = id_\Xi$;*

2. *для всякого борелевского подмножества $\Xi \subset f^0(\Omega) \setminus f^0(B_{n-1})$ и борелевского отображения $g^0$ удовлетворяющего условию $f^0 \circ g^0 = id^0_\Xi$ существует джет $g \in CW^r_{\mathrm{mes}_n}(\Xi, \mathbf{R}^n)$ такой, что $g^0 \in g$ и $f \circ g = id_\Xi$.*

Доказательство: Из предложения 3 следует, что $\mathrm{mes}_n f^0(B_{m-1}) = 0$. В силу предложения 1 можно найти борелевское подмножество $\Xi \subset f^0(\Omega) \setminus f^0(B_{n-1})$ и борелевский гомеоморфизм $g^0 \colon \Xi \to \Omega$ такие, что $\mathrm{mes}_n (f^0(\Omega) \setminus \Xi) = 0$ и $f^0 \circ g^0 = id^0_\Xi$. Формальное равенство $D^{(k)}(f \circ g) = id^{(k)}_\Xi$ позволяет построить джет $g$ порядка $r$ из $\Xi$ в $\mathbf{R}^n$.

Покажем, что $g \in CW^r_{\mathrm{mes}_n}(\Xi, \mathbf{R}^n)$. Для этого заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\mathrm{mes}_n f^0(A) < \varepsilon$ для всякого борелевского подмножества $A \subset g^0(\Xi)$ такого, что $\mu A < \delta$. Действительно, в предположении противного найдется $\varepsilon > 0$ и набор борелевских множеств $(A_\nu)_{\nu \geq 1}$ такой, что $\mu A_\nu < 2^{-\nu}$ и $\mathrm{mes}_n f^0(A_\nu) \geqq \varepsilon$. Положим $C_k = A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots$ Тогда $\mathrm{mes}_n f^0(C_k) \geqq \varepsilon$ и, следовательно,

$$\mathrm{mes}_n \bigcap_{k=1}^{\infty} f^0(C_k) \geqq \varepsilon. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу однозначности $f^0$ на $g^0(\Xi)$ справедливо

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f^0(C_k) = f^0\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right).$$

Поэтому $\mathrm{mes}_n f^0(C_1 \cap C_2 \cap \ldots) = 0$, так как $\mu(C_1 \cap C_2 \cap \ldots) = 0$ в противоречии с (8).

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что условие $\mu A < \delta$ $(A \subset g^0(\Xi))$ влечет $\mathrm{mes}_n f^0(A) < \varepsilon$. Для данного $\delta > 0$ найдем в $g^0(\Xi)$ компакт $K$ такой, что $\mu K > \mu g^0(\Xi) - \delta$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполнено

$$f^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqq r-|\alpha|} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} f^{\alpha+\beta}(x) = o(|y-x|^{r-|\alpha|})$$

при $|y - x| \to 0$ и $x, y \in K$. Так же как и в теореме 5 показывается, что тогда для всех $|\alpha| \leqq r$ выполнено

$$g^\alpha(t) - \sum_{|\beta| \leqq r-|\alpha|} \frac{(t-z)^\beta}{\beta!} g^{\alpha+\beta}(z) = o(|t-z|^{r-|\alpha|})$$

при $|t - z| \to 0$ и $t, z \in f^0(K)$. Остается лишь заметить, что $\mathrm{mes}_n f^0(K) > \mathrm{mes}_n \Xi - \varepsilon$ ∎

Следствие 2: *Пусть $K$ — компактное подмножество в $\mathbf{R}^n$, $f$ — липшицево отображение из $K$ в $\mathbf{R}^n$. Тогда существует счетное семейство аппроксимативно дифференцируемых отображений $g_\nu : f(K) \to K$ таких, что для всякого $y \in f(K)$ справедливо включение $g_\nu(y) \in f^{-1}(y)$ и множество $\{g_\nu(y)\}_{\nu \in \mathbf{N}}$ всюду плотно в $f^{-1}(y)$.*

Так как $f^{-1}$ полунепрерывно сверху, то найдется счетное всюду плотное множество измеримых однозначных ветвей отображения $f^{-1}$ (см., например, [3]). Остается применить следствие 1 и теорему 6 ∎

## Часть II

### § 4 Пространство $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$

Ниже $Y$ — нормированное пространство. Два джета $f_1, f_2 \in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$ будем называть *эквивалентными*, если равенство $f_1(x) = f_2(x)$ выполняется для $\mu$-почти всех $x \in \Omega$. *Класс джетов* эквивалентных $f$ будем обозначать $F$. Определим пространство $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ как фактор-пространство пространства $CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$ по описанному отношению эквивалентности. Легко видеть, что если $f_1 \in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$ и $f_2$ эквивалентен $f_1$, то $f_2 \in CW_\mu{}^r(\Omega, Y)$.

Пусть $K$-компакт вложенный в $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Положим

$$|f|_K = \sup_{x \in K} |f^0(x)| + \sup_{\substack{x,y \in K, x \neq y \\ |\alpha| \leqq r}} \frac{|f^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f(x)|}{|y-x|^{r-|\alpha|}} \quad \text{и} \quad |F|_K = \inf_{f \in F} |f|_K.$$

Будем называть *джетом* класс эквивалентных джетов, если это не приводит к недоразумениям.

Предложение 4: *Пусть* $(F_\nu)_{\nu\geq 1}$ — *последовательность джетов в* $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$, $(K_N)_{N\geq 1}$ — *возрастающая последовательность компактов в* $\Omega$ *такая, что* $\mu(\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots)) = 0$ *и джет* $F$ *такой, что* $|F_\nu - F|_{K_N} \to 0$ $(\nu \to \infty)$ *для всех* $N$. *Тогда* $F \in CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$.

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$. Достаточно показать, что для некоторого представителя $f$ класса $F$ найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и для всех $|\alpha| \leqq r$

$$f^\alpha(x) - D^\alpha T_y f(x) = o(|x-y|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K).$$

Так как $\mu(K_1 \cup K_2 \cup \ldots) = \mu\Omega$, то $\mu K_N \to \mu\Omega$ при $N \to \infty$. Поэтому найдется $N_0$ такое, что $\mu K_{N_0} > \mu\Omega - \varepsilon/2$. Пусть $f \in F$ и $f_\nu \in F_\nu$ представители такие, что

$$|f - f_\nu|_{K_{N_0}} < |F - F_\nu|_{K_{N_0}} + 1/\nu.$$

Для $\nu = 1$ выберем компакт $K^1$ так, что $\mu K^1 > \mu K_{N_0} - \varepsilon/2$, джет $f_1$ непрерывен на $K^1$ и для всех $|\alpha| \leqq r$

$$f_1{}^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f_1(x) = o(|x-y|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K^1).$$

Предположим, что мы подобрали компакты $K^1 \supset K^2 \supset \ldots K^{\nu-1}$ так что $\mu K^i > \mu K_{N_0} - \varepsilon/2$, джеты $f_i$ непрерывны на $K^i$ и для всех $|\alpha| \leqq r$

$$f_i{}^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f_i(x) = o(|x-y|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K^i)$$

$(i = 1, \ldots, \nu - 1)$. Очевидно, что можно подобрать компакт $K^\nu \subset K^{\nu-1}$ такой, что $\mu K^\nu > \mu K_{N_0} - \varepsilon/2$, джет $f_\nu$ непрерывен на $K^\nu$ и для свех $|\alpha| \leqq r$

$$f_\nu{}^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f_\nu(x) = o(|x-y|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K^\nu).$$

Положим $K = K^1 \cap K^2 \cap \ldots$ Так как $\mu K^1 < \infty$, то $\mu K = \lim\limits_{\nu\to\infty} \mu K^\nu \geqq \mu K_{N_0} - \varepsilon/2$. Поэтому $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$. На множестве $K$ последовательность джетов $(f_\nu|_K)$ сходится в смысле нормы $|\cdot|_K$. Так как все джеты $f_\nu|_K$ непрерывны и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняются условия

$$f_\nu{}^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f_\nu(x) = o(|y-x|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K)$$

то доопределенные на диагонали нулем и поэтому непрерывные на $K \times K$ выражения

$$\frac{f_\nu{}^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f_\nu(x)}{|y-x|^{r-|\alpha|}} \quad \text{сходятся к} \quad \frac{f^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f(x)}{|y-x|^{r-|\alpha|}}$$

в топологии равномерной сходимости на $K \times K$. В силу равностепенной непрерывности получаем, что для свех $|\alpha| \leqq r$

$$f^\alpha(x) - D^\alpha T_y{}^r f(x) = o(|y-x|^{r-|\alpha|}) \qquad (|y-x| \to 0, x, y \in K) \ \blacksquare$$

На множестве $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ для заданной возрастающей последовательности компактов $K_N \subset \Omega$ $(N \in \mathbb{N})$ таких, что $\mu\Omega = \mu(K_1 \cup K_2 \cup \ldots)$, последовательности положительных чисел $\delta_N \to 0$ и заданного джета $F \in CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ рассмотрим систему подмножеств $B_N(F, K, \Delta) = \{G \in CWF_\mu{}^r(\Omega, Y) \mid |G - F|_{K_N} < \delta_N\}$, где $K = \{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ и $\Delta = \{\delta_N\}_{N\in\mathbb{N}}$. Очевидно, что $\{B_N(F, K, \Delta)\}_{N\in\mathbb{N}}$ — базис фультра, который мы будем обозначать $B(F, K, \Delta)$. Фильтр $\chi$ на $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ будем называть *сходящимся к джету* $F$, если найдется фильтр $B(F, K, \Delta)$ такой, что $\psi \supset B(F, K, \Delta)$. Таким образом мы определили на $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ предельную структуру, согласованную со сходимостью описанной предложением 4 (см. также [9]).

Предложение 5: *Пространство* $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ *с данной предельной структурой является псевдотопологическим уравновешенным векторным пространством.*

Доказательство: Сначала проверим выполнение аксиом псевдотопологического пространства (см. [12]). Пусть $\chi_1$ сходится к $F$ и фильтр $\chi_2$ такой, что $\chi_2 \supset \chi_1$. Так как $\chi_1 \supset B(F, K, \Delta)$ для некоторого фильтра $B(F, K, \Delta)$, то и $\chi_2 \supset B(F, K, \Delta)$. Поэтому из определения предельной структуры следует, что фильтр $\chi_2$ сходится к $F$. Пусть фильтры $\chi_1$ и $\chi_2$ сходятся к $F$ и фильтры $B(F, K', \Delta')$ и $B(F, K'', \Delta'')$ такие, что $\chi_1 \supset B(F, K', \Delta')$ и $\chi_2 \supset B(F, K'', \Delta'')$. Рассмотрим фильтр $\chi_1 \vee \chi_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \chi_1, X_2 \in \chi_2\}$. Проверим, что

$$B(F, K, \Delta), \text{ где } K = \{K_N = K_N' \cap K_N''\} \text{ и } \Delta = \{\delta_N = \max(\delta_N', \delta_N'')\},$$

удовлетворяет условию $\chi_1 \vee \chi_2 \supset B(F, K, \Delta)$. Действительно, если

$$G \in B_N(F, K', \Delta') \cup B_N(F, K'', \Delta''),$$

то найдутся $g' \in G$, $g'' \in G$ и $f' \in F$, $f'' \in F$ такие, что $|g' - f'|_{K_N'} < \delta_N'$ или $|g'' - f''|_{K_N''} < \delta_N''$. Тогда либо

$$|g' - f'|_{K_N' \cap K_N''} < \delta_N' \leqq \max(\delta_N', \delta_N'') = \delta_N,$$

либо

$$|g'' - f''|_{K_N' \cap K_N''} < \delta_N'' \leqq \max(\delta_N', \delta_N'') = \delta_N.$$

Таким образом $B_N(F, K, \Delta) \supset B_N(F, K', \Delta') \cup B_N(F, K'', \Delta'')$. Откуда следует, что $\chi_1 \vee \chi_2 \supset B(F, K, \Delta)$, то есть фильтр $\chi_1 \vee \chi_2$ сходится к $F$.

Фильтр $[F]$, составленный из всех подмножеств $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$, содержащих $F$, очевидно сходится к $F$. Таким образом $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ — псевдотопологическое пространство.

Покажем, что псевдотопология пространства $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ согласована со структурой векторного пространства, то есть операции

$$\psi : (F, G) \mapsto F + G \quad \text{и} \quad \varphi : (a, F) \to aF \quad (a \in \mathbf{R})$$

непрерывны относительно псевдотопологии пространства $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$. (Мы не останавливаемся на тривиальной проверке корректности определений операций сложения и умножения на число для классов эквивалентных джетов.) Пусть $\{B_N(F, K', \Delta')\}_{N \in \mathbf{N}}$ — базис фильтра сходящегося к $F$ и $\{B_M(G, K'', \Delta'')\}_{M \in \mathbf{N}}$ — базис фильтра, сходящегося к $G$. Тогда $\{B_{NM}((F, G), K' \times K'', \Delta' \times \Delta'')\}_{M, N \in \mathbf{N}}$ базис фильтра сходящегося к $(F, G)$ в топологии декартова произведения. Покажем, что $\{\psi(B_{N,M}((F, G), K' \times K'', \Delta' \times \Delta''))\}_{N,M \in \mathbf{N}}$ базис фильтра, сходящегося к $F + G$. Действительно,

$$\psi(B_{NN}((F, G), K' \times K'', \Delta' \times \Delta'')) = B_N(F + G, K, \Delta),$$

где $K = \{K_N' \cap K_N''\}_{N \in \mathbf{N}}$ и $\Delta = \{\delta_N' + \delta_N''\}_{N \in \mathbf{N}}$ и, следовательно, фильтр порожденный базисом $\psi(B((F, G), K' \times K'', \Delta' \times \Delta''))$ сходится к $F + G$, так как фильтр $B(F + G, K, \Delta)$ сходится к $F + G$. Таким образом сложение непрерывно в $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$. Непрерывность умножения на число доказывается аналогично.

Уравновешенность любого фильтра сходящегося к 0, следует из того, что сходящийся к 0 фильтр $\chi$ содержит некоторый фильтр $B(0, K; \Delta)$ являющийся уравновешенным фильтром ∎

Пусть мера $\mu$ есть сумма не более чем счетного числа дираковских мер, то есть

$$\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \delta_{x_\nu} \qquad (\nu_0 \leqq \infty).$$

Легко проверяется, что в этом случае каждый класс эквивалентных джетов $F$ определяется значениями любого его представителя в точках $x_\nu$ $(\nu \leqq \nu_0)$ и псевдотопология пространства $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ эквивалентна топологии поточечной сходимости джетов на множестве $\{x_\nu : \nu \leqq \nu_0\}$. Таким образом $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ — пространство Фреше (в случае $\nu_0 < \infty$ — евклидово пространство).

Рассмотрим теперь случай, когда мера $\mu$ непрерывна.

Предложение 6: *Пусть мера $\mu$ непрерывна. Тогда пространство $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ не является топологическим.*

Для этого достаточно проверить, что фильтр $\vee \{\psi^{\cdot} \colon \psi$ сходится к $0\}$ не является сходящимся (см. [12]). Это следует из того, что мера одноточечного множества нулевая и, поэтому, для каждой точки $x$ найдется сходящийся фильтр $B(0, K, \Delta)$ такой, что для каждого $K_N \in K$ выполняется $K_N \cap \{x\} = \emptyset$ ∎

Разложению меры $\mu = \mu_1 + \mu_2$ на атомарную и непрерывную составляющие соответствует разложение пространства $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ в прямую сумму векторных пространств

$$CWF_\mu{}^r(\Omega, Y) = CWF^r_{\mu_1}(\Omega, Y) \oplus CWF^r_{\mu_2}(\Omega, Y). \tag{9}$$

Теорема 7: *Равенство (9) является изиморфизмом в категории псевдотопологических векторных пространств.*

Доказательство: Оно состоит в, теперь уже тривиальной, проверке, что псевдотопология декартова произведения $CWF^r_{\mu_1}(\Omega, Y) \times CWF^r_{\mu_2}(\Omega, Y)$ эквивалентна псевдотопологии $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ ∎

## § 5 Сходимость последовательностей в пространстве $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$

Будем говорить, что последовательность джетов $(F_\nu)_{\nu \geqq 1} \subset CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ *$\mu$-аппроксимативно* (аппроксимативно, если это не приводит к недоразумениям) *сходится* к джету $F$, если найдется фильтр $B(F, K, \Delta)$, каждый элемент базиса которого содержит все за исключением конечного числа элементов последовательности. Будем говорить, что подмножество $X \subset C^r(\mathbf{R}^n, Y)$ *аппроксимирует* $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$, если для всякого джета $F \in CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ найдется последовательность функций $g_\nu \in X$ такая, что последовательность классов джетов $G_\nu$ эквивалентных $\{D^\alpha g_\nu\}_{|\alpha| \leqq r}|_\Omega$ аппроксимативно сходится к $F$.

Предложение 7: *Пространство $C^r(\mathbf{R}^n, Y)$ аппроксимирует пространство $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$.*

Доказательство: Оно следует непосредственно из определения пространства $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$. Действительно, пусть $F \in CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$. Взяв последовательность $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, мы можем найти последовательность компактов $(K(\nu))$ и последовательность функций $(g_\nu) \subset C^r(\mathbf{R}^n, Y)$ такие, что

$$\mu K(\nu) > \mu\Omega - \varepsilon_\nu \quad \text{и} \quad \{f^\alpha\}_{|\alpha| \leqq r}|_{K(\nu)} = \{D^\alpha g\}_{|\alpha| \leqq r}|_{K(\nu)}.$$

Положим

$$K = \left\{ K_N \subset \Omega \;\middle|\; K_N = \bigcap_{\nu=N}^{\infty} K(\nu) \right\} \quad \text{и} \quad \Delta = \left\{ \delta_N \;\middle|\; \delta_N = \frac{1}{N} \right\}.$$

Тогда каждое множество $B_N(F, K, \Delta)$ содержит все за исключением конечного числа элементов последовательности, составленной из классов джетов эквивалентных $\{D^\alpha g_\nu\}_{|\alpha| \leq r}|_\Omega$. Таким образом последовательность классов джетов эквивалентных $\{D^\alpha g_\nu\}_{|\alpha|\leq r}|_\Omega$ аппроксимативно сходится к $F$ ▮

Пусть теперь $\Omega$-открытое множество. Рассмотрим пространство $C^r(\Omega, Y)$ с топологией равномерной сходимости на каждом компактном подмножестве. Определим оператор $i_\mu\colon C^r(\Omega, Y) \to CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ следующим образом: $i_\mu(g)$ есть класс джетов эквивалентных $\{D^\alpha g\}_{|\alpha|\leq r}$.

Предложение 8: *Вложение $i_\mu\colon C^r(\Omega, Y) \to CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$ непрерывно.*

Доказательство: Достаточно показать, что сходимость в $C^r(\Omega, Y)$ последовательности $(g_\nu)$ влечет ее аппроксимативную сходимость. Представим $\Omega$ в виде объединения возрастающей последовательности компактов $K_N$. Пусть $g_\nu \to g$ в смысле $C^r(\Omega, Y)$. В силу формулы Тейлора

$$g_\nu(y) = \sum_{|\alpha|\leq r-1} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha g_\nu(x)$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 r(1-t)^{r-1} D^\alpha g_\nu((1-t)x + ty)\,dt$$

получаем, что

$$\left| g_\nu(y) - \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha g_\nu(x) \right|$$
$$\leq \sum_{|\alpha|=r} \frac{|(y-x)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 r(1-t)^{r-1} \left| D^\alpha g_\nu((1-t)x+ty) - D^\alpha g_\nu(x) \right| dt.$$

Так как последовательность $(g_\nu|_{K_N})_\nu$ при любом $N$ равностепенно непрерывна, то правая часть равенства для всех $\nu$ может быть оценена величиной $\sigma\,|y-x|^r$ лишь только $y \in B(x, \varrho) \subset K_N \subset \Omega$ при достаточно малом $\varrho$ и некотором $N \in \mathbf{N}$. В силу равномерной сходимости

$$\sup_{\substack{x,y\in K_N \\ x\neq y}} \frac{\left| g_\nu(y) - g(y) - \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \left(D^\alpha g_\nu(x) - D^\alpha g(x)\right) \right|}{|y-x|^r} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$$

Аналогично доказывается, что для всех $|\alpha| \leq r$

$$\sup_{\substack{x,y\in K_N \\ x\neq y}} \frac{\left| D^\alpha g_\nu(y) - D^\alpha g(y) - \sum_{|\beta|\leq r-|\alpha|} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} \left(D^{\alpha+\beta} g_\nu(x) - D^{\alpha+\beta} g(x)\right) \right|}{|y-x|^{r-|\alpha|}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$$

Поэтому $|i_\mu g_\nu - i_\mu g|_{K_N} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Взяв $\Delta = \{\delta_N \mid \delta_N \downarrow 0\}$ мы получим, что каждый элемент базиса фильтра $\{B_N(i_\mu g, K, \Delta)\}_{N\in\mathbf{N}}$ содержит все за исключением конечного числа элементов последовательности $(i_\mu g_\nu)_\nu$ ▮

Следующая теорема является прямым следствием предложений 7 и 8.

Теорема 8: *Пусть $X$ есть плотное подмножество пространства $C^r(\mathbf{R}^n, Y)$. Тогда $X$ аппроксимирует $CWF_\mu{}^r(\Omega, Y)$.*

Доказательство: Представим $F$ как аппроксимативный предел элементов из $i_\mu C^r(\mathbf{R}^n, Y)$, то есть найдем последовательность $(g_\nu) \subset C^r(\mathbf{R}^n, Y)$ и фильтр $B(F, K, \Delta)$ такие, что $B_N(F, K, \Delta)$ при любом $N \in \mathbf{N}$ содержит все за исключением конечного числа элементов последовательности $(i_\mu g_\nu)_\nu$. Так как $X$ плотно в $C^r(\mathbf{R}^n, Y)$, то для всякого $K_N \in K$ и $\delta_N \in \Delta$ найдется элемент $d_N \in X$ такой, что $|i_\mu d_N - i_\mu g_{\nu(N)}|_{K_N} < \delta_N$, где $\nu(N)$ выбирается так, что $\nu(N+1) > \nu(N)$ и $|i_\mu g_{\nu(N)} - F|_{K_N} < \delta_N$. Тогда каждый элемент базиса фильтра $\{B_N(F, K, 2\Delta)\}_{N \in \mathbf{N}}$ содержит все за исключением конечного числа элементов последовательности $(i_\mu d_N)_N$. Таким образом $(i_\mu d_N)_N$ аппроксимативно сходится к $F$ ∎

Следствие 3: *Пространство $CWF_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ аппроксимируется множеством*

1. $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *в случае* $r \geqq 1$,
2. *погружений* $\mathrm{Imm}^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *в случае* $r \geqq 1$ *и* $m \geqq 2n$,
3. *вложений* $\mathrm{Imb}^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *в случае* $r \geqq 2$ *и* $m \geqq 2n + 1$,
4. *функций морса из* $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *в случае* $r \geqq 2$ *и* $m = 1$.

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы 8 и плотности соответствующих множеств в $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (см. [13]).

## § 6 Псевдотопология пространства $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$

Обозначим через $j_\mu$ вложение

$$j_\mu : CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m) \to CWF_\mu^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$$

определенное следующим образом: $j_\mu(f)$ есть класс джетов эквивалентных по мере $\mu$ джету $f$. Существует единственная псевдотопология, грубейшая из всех псевдотопологий, при которой все $j_\mu$ непрерывны. Будем считать, что $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ наделено описанной псевдотопологией. Ниже везде, за исключением следствия 5, считаем, что $n = 1$ и $r \leqq 2$. Чтобы описать предельную структуру $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ в удобных терминах нам понадобится следующий результат.

Предложение 9: *Пусть $F, F_\nu \in CWF_\mu{}^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ $(\nu \in \mathbf{N})$. Тогда эквивалентно:*

(i) *Последовательность* джетов $(F_\nu)$ *аппроксимативно сходится к джету $F$.*

(ii) *Некоторая последовательность $(f_\nu)$ с $f_\nu \in F_\nu$ сходится к джету $f \in F$ $\mu$-почти всюду, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и для всякого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $\nu$*

$$|f_\nu{}^0(y) - T_x{}^r f_\nu(y)| \leqq \sigma\,|y - x|^r \quad \text{при} \quad |y - x| < \delta \quad \text{и} \quad x, y \in K.$$

Доказательство: (i) ⇒ (ii): Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset \Omega$ такой что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и для некоторой непрерывной на $K$ последовательности $(f_\nu)$ с $f_\nu \in F_\nu$ последовательность

$$(\Phi_\nu) \text{ с } \Phi_\nu(x, y) = \frac{f_\nu{}^0(y) - T_x{}^r f_\nu(y)}{|y - x|^r}$$

сходится равномерно к

$$\Phi \text{ с } \Phi(x, y) = \frac{f^0(y) - T_x{}^r f(y)}{|y - x|^r}$$

на $K \times K$ (здесь мы продолжили $\Phi_\nu$ и $\Phi$ на диагональ непрерывным образом и, следовательно, $\Phi_\nu(x, x) = \Phi(x, x) = 0$). В силу равностепенной непрерывности последовательности $(\Phi_\nu)$ для всякого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $\nu$ будет $|\Phi_\nu(x, y)| < \sigma$ при $|y - x| < \delta$ и $x, y \in K$. Это и означает, что для всех $\nu$

$$|f_\nu^0(y) - T_x^r f_\nu(y)| \leqq \sigma |y - x|^r \quad \text{при} \quad |y - x| < \delta \quad \text{и} \quad x, y \in K.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выделим компакт $K_0 \subset \Omega$ такой, что $\mu K_0 > \mu\Omega - \varepsilon/3$, последовательность непрерывных джетов $(f_\nu)|_{K_0}$ сходится к $f|_{K_0}$ равномерно и подберем компакт $K_1 \subset K_0$ так, что $\mu K_1 > \mu K_0 - \varepsilon/3$ и для всякого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $\nu$

$$|f_\nu^0(y) - T_x^r f_\nu(y)| \leqq \sigma |y - x|^r \quad \text{при} \quad |y - x| < \delta \quad \text{и} \quad x, y \in K_1.$$

Джеты $f_\nu|_{K_1}, f|_{K_1} \in T^r(K_1, \mathbf{R}^n)$. Используя теорему 1 выделим компакт $K^0 \subset K_1$ такой, что $\mu K^0 > \mu K_1 - \varepsilon/3$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$f^\alpha(x) - D^\alpha T_y^r f(x) = o(|x - y|^{r - |\alpha|}) \qquad (|x - y| \to 0, x, y \in K^0).$$

Затем выделим компакт $K^1 \subset K^0$ такой, что $\mu K^1 > \mu K_1 - \varepsilon/3$ и для всех $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$f_1^\alpha(x) - D^\alpha T_y^r f_1(x) = o(|x - y|^{r - |\alpha|}) \qquad (|x - y| \to 0, x, y \in K^1).$$

Продолжая таким образом мы получим убывающую последовательность компактов $K^0 \supset K^1 \supset \ldots$ таких, что $\mu K^\nu > \mu K_1 - \varepsilon/3$. При этом для всех $\nu$ и $|\alpha| \leqq r$ выполняется

$$f_\nu^\alpha(x) - D^\alpha T_y^r f_\nu(x) = o(|x - y|^{r - |\alpha|}) \qquad (|x - y| \to 0, x, y \in K^\nu).$$

Положим $K = K^0 \cap K^1 \cap \ldots$ Легко видеть, что $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ и на $K$ для всех джетов $f$ и $f_\nu$ выполнены условия теоремы Уитни о продолжении. Поэтому для

$$\Phi_\nu^\alpha(y, x) = \frac{f_\nu^\alpha(x) - D^\alpha T_y^r f_\nu(x)}{|y - x|^{r - |\alpha|}} \quad \text{и} \quad \Phi^\alpha(y, x) = \frac{f^\alpha(x) - D^\alpha T_y^r f(x)}{|y - x|^{r - |\alpha|}}$$

($|\alpha| \leqq r$) выполняется $\Phi_\nu^\alpha(y, x) \to 0$ и $\Phi^\alpha(y, x) \to 0$ при $(y, x) \to (y_0, x_0)$ $\big((y, x), (y_0, x_0) \in K\big)$.

Покажем, что $(\Phi_\nu^\alpha)_\nu$ сходится равномерно к $\Phi^\alpha$ на $K \times K$. В предположении противного найдутся последовательности $(x_{\nu_N})_N, (y_{\nu_N})_N \subset K$ такие, что

$$\inf_{\nu_N} \frac{|f_{\nu_N}^\alpha(x_{\nu_N}) - f^\alpha(x_{\nu_N}) - D^\alpha T_{y_{\nu_N}}^r (f_{\nu_N} - f)(x_{\nu_N})|}{|y_{\nu_N} - x_{\nu_N}|^{r - |\alpha|}} \geqq \varrho > 0.$$

Можно считать, что $y_{\nu_N} \to y_0 \in K$ при $N \to \infty$. Тогда $x_{\nu_N}$ также сходится к $y_0$ при $N \to \infty$. Это следует из равномерной сходимости $(f_\nu)|_K$ к $f|_K$. Остается заметить, что

$$\frac{|f_{\nu_N}^\alpha(x_{\nu_N}) - f^\alpha(x_{\nu_N}) - D^\alpha T_{y_{\nu_N}}^r (f_{\nu_N} - f)(x_{\nu_N})|}{|y_{\nu_N} - x_{\nu_N}|^{r - |\alpha|}}$$

$$\leqq |\Phi_{\nu_N}^\alpha(y_{\nu_N}, x_{\nu_N})| + |\Phi^\alpha(y_{\nu_N}, x_{\nu_N})| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Получили противоречие. Таким образом $(\Phi_\nu^\alpha)_\nu$ сходится к $\Phi^\alpha$ ($|\alpha| \leqq r$) равномерно при $\nu \to \infty$. А это означает, что $|f_\nu - f|_K \to 0$ и, следовательно, $|F_\nu - F|_K \to 0$ при $\nu \to \infty$. Тогда, в силу произвольности $\varepsilon$, последовательность $(F_\nu)$ аппроксимативно сходится к $F$ ∎

Следствие 4: *Последовательность джетов* $(f_\nu)$ *аппроксимативно (в смысле псевдотопологии* $CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$) *сходится к джету* $f$ *тогда и только тогда, когда для всякого* $x \in \Omega$ *выполняется* $f_\nu(x) \to f(x)$, *для всякого* $\varepsilon > 0$ *и всякой регулярной борелевской меры* $\mu$ *найдется компакт* $K \subset \Omega$ *такой, что* $\mu K > \mu\Omega - \varepsilon$ *и для каждого* $\sigma > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $\nu$

$$|f_\nu^0(y) - T_x^r f_\nu(y)| \leqq \sigma\,|y - x|^r \quad \text{при} \quad |y - x| < \delta \quad \text{и} \quad x, y \in K.$$

Следствие 5: *Пусть* $\Omega$ *— открытое множество. Вложение* $j: C^r(\Omega, \mathbf{R}^m) \to CW^r(\Omega, \mathbf{R}^m)$ *непрерывно.*

## Литература


[1] Calderón, A. P., and A. Zygmund: Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. Studia Math. 20 (1961), 171—225.

[2] Federer, G.: Geometric Measure Theory. New-York: Springer-Verlag 1969.

[3] Варга, Дж.: Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. Москва: Изд-во Наука 1977.

[4] Гусман, М.: Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$. Москва: Изд-во Мир 1978.

[5] Дубовицкий, А. Я.: О точках полного вырождения матрицы Якоби. Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. 22 (1958), 705—716.

[6] Забрейко, П. П., и И. Н. Рябикова: К теории производных высших порядков для операторов в банаховых пространствах. В сб.: Качественные и приближенные методы решения операторных уравнений (под ред. П. П. Забрейко) (Ярославль) 4 (1979), 87—101.

[7] Исаков, Н. М.: Дифференцируемость в смысле Тейлора на компактах эквивалентна непрерывной дифференцируемости. В сб.: Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. Москва: Изд-во Университета дружбы народов (1985), 13—24.

[8] Исаков, Н. М.: Аппроксимативная дифференцируемость на компактах эквивалентна непрерывной дифференцируемости. В сб.: Функциональные пространства и их применение в дифференциальных уравнениях. Москва: Изд-во Университета дружбы народов (1986), 47—57.

[9] Исаков, Н. М.: Об аппроксимативно дифференцируемых функциях. В сб.: Функциональные пространства и их применение в дифференциальных уравнениях. Москва: Изд-во Университета дружбы народов (1986), 57—65.

[10] Куратовский, К.: Топология, т. 1 и 2. Москва: Изд-во Мир 1966 и 1969.

[11] Мальгранж, Б.: Идеалы дифференцируемых функций. Москва: Изд-во Мир 1968.

[12] Фрелихер, А., и В. Бухер: Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. Москва: Изд-во Мир 1970.

[13] Хирш, М.: Дифференциальная топология. Москва: Изд-во Мир 1979.

[14] Янков, В.: Об унификации А-множеств. Докл. Акад. Наук СССР 30 (1941), 591—592.


Manuskripteingang: 21. 05. 1985

VERFASSER:

Ст. н. сотр. Николай Михайлович Исаков
Кафедра дифф. уравнений и функц. анализа
Университета Дружбы Народов им. П. Лумумбы
СССР—117923 Москва, ул. Орджоникидзе 3