Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (4) 1987, S. 321–330

Die Grundgleichungen der inneren Elektronik – ein Evolutionsproblem im Banach-Raum

L. ANGERMANN

Die Grundgleichungen der inneren Elektronik werden vom Standpunkt speziell strukturierter Differentialgleichungen in einem geeigneten Banach-Raum untersucht. Es werden Existenz, Eindeutigkeit, Regularität und physikalische Relevanz der Lösung gezeigt.

Изучаются основные уравнения внутренней электроники с точки зрения дифференциальных уравнений специальной структуры в подходящем Банаховом пространстве. Доказываются существование, единственность, регулярность и физическая разумность решения.

The basic equations of inner electronics are investigated as a differential equation with special structure in a suitable Banach space. Existence, uniqueness, regularity and physical relevance of the solution are proved.

1. Einleitung

Auf Grund ihrer großen praktischen Bedeutung sind die Gleichungen der inneren Elektronik Gegenstand vieler, vor allem numerischen Fragestellungen gewidmeter Untersuchungen. Häufig werden dabei vereinfachte und vorwiegend stationäre Modelle behandelt. Qualitative Analysen des instationären Problemes wurden von MOCK [9–11], SEIDMAN und TROIANIELLO [12], GAJEWSKI [2], GAJEWSKI und GRÖGER [3] sowie KLUGE und UNGER [7] publiziert. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, durch Verwendung bekannter Resultate aus der Theorie abstrakter Differentialgleichungen in Banach-Räumen (vgl. z. B. HENRY [5]) Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit, Glattheit sowie Vorzeichenverhalten der Lösung der Grundgleichungen zu gewinnen. Der durch dieses Vorgehen diktierte Lösungsbegriff ist „stärker" als die in den oben genannten Arbeiten – und auch bei HEINRICH [4] – benutzten Definitionen der schwachen Lösung. Der gewählte Zugang unterscheidet sich wesentlich von den aus der zitierten Literatur bekannten Herangehensweisen. Eine gewisse Sonderstellung nehmen die Untersuchungen von SEIDMAN und TROIANIELLO [12] ein, in denen ein um die sogenannte Temperaturgleichung erweitertes Modell betrachtet wird. Zur Untersuchung dieser zusätzlichen Gleichung werden Ergebnisse der linearen Theorie von HENRY [5] herangezogen. Die Lösbarkeit des Gesamtsystems dagegen wird detailliert aus dem Schauderschen Fixpunktsatz abgeleitet. Das von uns verwendete Modell ist Ergebnis einer von VASIL'EVA und STELMACH [1] sowie MARKOWICH, RINGHOFER, LANGER und SELBERHERR [8] vorgeschlagenen Umformung der Grundgleichungen in eine für störungstheoretische Untersuchungen geeignete Form.

2. Beschreibung der Aufgabenstellung, Voraussetzungen

Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbf{R}^d$ (d gleich 2 oder 3) sowie ein Intervall $(0, T)$, $T > 0$. Der Rand B von D sei eine $C^{0,1}$-glatte Mannigfaltigkeit und habe die Struktur $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Die Komponente B_1 sei eine abgeschlossene Teilmenge von B und besitze ein positives Randmaß. Des weiteren bezeichne ν die äußere Normale zu B. Gesucht sind Funktionen $\varphi = \varphi(t, x)$ und $u = u(t, x) = \big(n(t, x), p(t, x)\big)^T$, die dem System

$$\left.\begin{aligned} -\lambda^2 \Delta\varphi &= p - n + Q \\ n_t &= \nabla \cdot (\nabla n - n \nabla\varphi) - \beta S(n, p, \lambda) \\ p_t &= \frac{1}{\delta} \nabla \cdot (\nabla p + p \nabla\varphi) - \beta S(n, p, \lambda) \\ &(t, x) \in (0, T) \times D \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

genügen. Die Nichtlinearität S habe die Gestalt

$$S(n, p, \lambda) = (n^+ p^+ - \gamma_1 \lambda^4)/(n^+ + \vartheta p^+ + \gamma_2 \lambda^2)$$

mit $n^+ = \max\{0, n\}$. Dabei seien $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta, \vartheta, \lambda$ positive Konstanten und $Q = Q(x, \lambda)$ eine vorgegebene Funktion. Die zu (1) gehörenden Anfangs- und Randbedingungen lauten:

$$u(0, x) = u_0(x) = \big(n_0(x), p_0(x)\big)^T, \qquad x \in D \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \tilde{\varphi}(t, x), && (t, x) \in (0, T) \times B_1 \\ \nu \cdot \nabla\varphi(t, x) &= \tilde{\tilde{\varphi}}(t, x), && (t, x) \in (0, T) \times B_2 \\ u(t, x) &= \tilde{u}(x), && (t, x) \in (0, T) \times B_1 \\ \nu \cdot \nabla u(t, x) + P(x)\, u(t, x) &= \tilde{\tilde{u}}(x), && (t, x) \in (0, T) \times B_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit

$$P(x) = \begin{pmatrix} b_n(x) & 0 \\ 0 & b_p(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $n_0, p_0, b_n, b_p, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}$ werden als bekannt vorausgesetzt. Weiterhin benutzen wir folgende Annahmen:

(A1) $u_0 \in M = \{v \in W_2^2(D, \mathbf{R}^2) : v = \tilde{u}$ auf B_1, $\nu \cdot \nabla v + Pv = \tilde{\tilde{u}}$ auf $B_2\}$.

(A2)
1. $b_n, b_p \in L_\infty(B_2)$.
2. $b_n(x) \geqq 0$ und $b_p(x) \geqq 0$ auf B_2.
3. B_1, B_2, b_n, b_p seien so beschaffen, daß die Abbildung $G_\varphi : f \mapsto \varphi$, realisiert durch

   $$-\Delta\varphi = f \text{ in } D, \ \varphi = 0 \text{ auf } B_1, \ \nu \cdot \nabla\varphi = 0 \text{ auf } B_2$$

   ein Isomorphismus zwischen $L_2(D)$ und $W_2^2(D)$ ist.
4. Die Abbildung $G : g \mapsto u$, definiert mittels

   $$-\Delta u = g \text{ in } D, \ u = 0 \text{ auf } B_1, \ \nu \cdot \nabla u + Pu = 0 \text{ auf } B_2,$$

   stellt einen Isomorphismus zwischen $L_2(D, \mathbf{R}^2)$ und $W_2^2(D, \mathbf{R}^2)$ dar.

(A3)
1. Es gebe eine Funktion $\varphi_B \in C^\omega\big((-1, T], W_2^2(D)\big)$, $\omega \in (0, 1)$, mit $\varphi_B = \tilde{\varphi}$, $(t, x) \in [0, T] \times B_1$, und $\nu \cdot \nabla\varphi_B = \tilde{\tilde{\varphi}}$, $(t, x) \in [0, T] \times B_2$.

2. Falls $\bar{u} \not\equiv 0$ auf B_1 oder $\tilde{u} \not\equiv 0$ auf B_2 ist, so existiere eine Funktion $u_B = (n_B, p_B)^T \in M$.

(A4) $Q = Q(\cdot, \lambda) \in L_2(D)$.

Die Funktion φ kann unter Verwendung des Lösungsoperators G_φ als affin-linearer Operator bezüglich $u = (n, p)^T$ aufgefaßt werden (vgl. (A2)/3), d. h.

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= \varphi_G[u(t, \cdot)]\,(x) + \varphi_B(t, x) \\ &= \lambda^{-2} G_\varphi[p(t, \cdot) - n(t, \cdot) + Q + \lambda^2 \Delta\varphi_B(t, \cdot)]\,(x) + \varphi_B(t, x). \end{aligned} \tag{4}$$

Damit erhält das Gleichungssystem (1) formal die Gestalt

$$u_t(t, x) - C\Delta u(t, x) = f(u(t, x), \varphi_G[u(t, \cdot)]\,(x) + \varphi_B(t, x))$$
$$(t, x) \in (0, T) \times D$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } f(u, \varphi) = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot n\, \nabla\varphi - \beta S(n, p, \lambda) \\ \delta^{-1}\, \nabla \cdot p\, \nabla\varphi - \beta S(n, p, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Unser nächster Schritt besteht nun darin, dieses System als Anfangswertaufgabe (Cauchy-Problem)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au = F(t, u), \qquad t \in (0, T) \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

mit dem Phasenraum $X = L_2(D, \mathbf{R}^2)$ zu interpretieren. Hierbei ist $A : \operatorname{dom} A \subset X \to X$ ein linearer Operator und $F : U \subset \mathbf{R} \times X \to X$ die Nichtlinearität. Um beide Objekte konkret beschreiben zu können, führen wir den Raum

$$Y = \{w = (w_1, w_2)^T \in W_2{}^1(D, \mathbf{R}^2) : w = 0 \text{ auf } B_1\}$$

ein und definieren auf $Y \times Y$ eine Bilinearform a durch

$$a(v, w) = a_n(v_1, w_1) + \delta^{-1} a_p(v_2, w_2)$$

mit

$$a_n(v_1, w_1) = \int_D \nabla v_1 \cdot \nabla w_1 \, dx + \int_{B_2} b_n v_1 w_1 d\sigma,$$

$$a_p(v_2, w_2) = \int_D \nabla v_2 \cdot \nabla w_2 \, dx + \int_{B_2} b_p v_2 w_2 \, d\sigma.$$

Diese Bilinearform erzeugt in natürlicher Weise einen linearen Operator $\tilde{A} : Y \to Y^*$, indem die Abbildung $a(v, \cdot) : Y \to \mathbf{R}$ für jedes feste $v \in Y$ mit einem Funktional aus Y^* identifiziert wird. Den in (5) auftretenden Operator A verstehen wir nun als die Einschränkung von $\tilde{A}$ auf die Menge $\operatorname{dom} A = \{v \in Y : \tilde{A}v \in X\}$.

Folgerungen: 1. *Wegen der Regularitätsforderung* (A2)/4 *gilt*

$$\operatorname{dom} A = \{v \in W_2{}^2(D, \mathbf{R}^2) : v = 0 \text{ auf } B_1,\ \nu \cdot \nabla v + Pv = 0 \text{ auf } B_2\}.$$

2. *Als positiv definiter sowie selbstadjungierter Operator ist A im Raum X sektoriell und damit infinitesimaler Generator einer analytischen Halbgruppe* $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ (vgl. [5]).

3. *Der Operator A läßt die Bildung beliebiger Potenzen A^α, $\alpha \in \mathbf{R}$, zu* (*vgl. ebenfalls* [5]).

Die Potenzen A^α mit nichtnegativem Exponenten ermöglichen in X die Einführung einer Skala normierter Räume $X^\alpha = \operatorname{dom} A^\alpha = \operatorname{im} A^{-\alpha}$, $\|v\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha v\|_X$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{dom} A = X^1 \hookrightarrow X^\beta \hookrightarrow X^\alpha \hookrightarrow X^0 = X \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1.$$

Auf Einzelheiten wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen; für unsere Zwecke genügt es zu vermerken, daß für $\alpha \in (3/4, 1)$ die stetige Einbettung $X^\alpha \hookrightarrow W_3^1(D, \mathbf{R}^2) \cap L_\infty(D, \mathbf{R}^2)$ vorliegt [5: Th. 1.6.1]. Im weiteren sei α ein fixierter Wert aus dem Intervall $(3/4, 1)$. Für $v(t) = v(t, \cdot) \in X^\alpha$, $t \in (0, T)$, definieren wir den *Nemyckij*-Operator $F: (0, T) \times X^\alpha \to X$ wie folgt:

$$F(t, v(t))(x) = f(v(t, x) + u_B(x), \varphi_G[v(t, \cdot) + u_B](x) + \varphi_B(t, x)) + C\Delta u_B(x).$$

Wir wollen jetzt den Lösungsbegriff für die Aufgabe (5) erklären. Dazu sei noch folgendes angenommen:

(A5) $U \subset \mathbf{R} \times X^\alpha$ ist offen.

(A6) Die rechte Seite $F: U \to X$ ist lokal Hölder-stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in v.

Definition 1: $u \in C((0, T), X)$ heißt *Lösung* der Aufgabe (5) in $(0, T)$, wenn gilt:

(P1) $u(0) = u_0$,

(P2) $(t, u(t)) \in U$ für $t \in (0, T)$,

(P3) $u(t) \in \operatorname{dom} A$ für $t \in (0, T)$.

(P4) Die Funktion u ist in $(0, T)$ differenzierbar.

(P5) Die Abbildung $t \mapsto F(t, u(t))$ ist lokal Hölder-stetig in $(0, T)$.

(P6) Es gibt eine Zahl $\varrho > 0$, für welche das Integral $\int_0^\varrho \|F(t, u(t))\|_X \, dt$ endlich ist.

(P7) $\dfrac{du}{dt} + Au = F(t, u)$ für $t \in (0, T)$.

Mit Hilfe dieser Definition können wir jetzt auch einen Lösungsbegriff für das Problem (1)—(3) einführen.

Definition 2: Das Tripel $(\varphi(t, x), n(t, x), p(t, x))^T$ heißt *Lösung* der Aufgabe (1) bis (3) in $(0, T) \times D$ genau dann, wenn gilt:

(P8) $u(t, x) - u_B(x) = (n(t, x) - n_B(x), p(t, x) - p_B(x))^T$ ist Lösung von (5) gemäß Definition 1.

(P9) Für jedes $t \in (0, T)$ genügt $\varphi(t, x)$ der 1. Gleichung von (1) im Sinne der Beziehung (4).

Bemerkung 1: Diese Definition impliziert in Verbindung mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, daß die Lösung von (1)—(3) als stetig in $[0, T) \times \overline{D}$ aufgefaßt werden kann.

3. Einige a-priori-Abschätzungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß im Fall nichtnegativer Anfangsbedingungen u_0 jede Lösung $u(x)$ von (5) zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in (0, T)$ dieses Vorzeichen beibehält und daß die L_2-Norm von $u(t, \cdot)$ für $t \to T$ beschränkt bleibt. Wir präzisieren zunächst noch den Begriff des nichtnegativen Elementes aus dem Raum $W_2^1(D, \mathbf{R}^2)$.

Definition 3: Die Funktion $v \in W_2^1(D, \mathbf{R}^2)$ heißt *nichtnegativ*, wenn sie mittels einer Folge punktweise nichtnegativer Funktionen $\{v^{(i)}\} \subset C^{0,1}(\overline{D}, \mathbf{R}^2)$ im Sinne des $W_2^1(D, \mathbf{R}^2)$ approximiert werden kann (vgl. [6]).

Folgerung 4: *Ist* $v \in W_2^1(D, \mathbf{R}^2)$ *nichtnegativ, so gilt* $v(x) \geqq 0$ *fast überall auf* B.

Satz 1: *Es seien die Voraussetzungen* (A1)—(A3) *erfüllt und* $(\varphi, n, p)^T$ *sei eine Lösung der Aufgabe* (1)—(3). *Ferner gelte:*

(A7) $\bar{u} \geqq 0$ *auf* B_1 *und* $\tilde{\bar{u}} \geqq 0$ *auf* B_2.
(A8) $u_0 = (n_0, p_0)^T \geqq 0$.
(A9) $Q \in L_\infty(D)$.

Dann ist $u(t, \cdot) = (n(t, \cdot), p(t, \cdot))^T$ *zu jedem Zeitpunkt* $t \in (0, T)$ *nichtnegativ.*

Beweis: Wir zeigen $u(t) \geqq 0$ in jedem Intervall $[0, t_1] \subset [0, T)$. Aus der Bemerkung 1 ergibt sich dann die Behauptung. Es gelte also $0 < t_1 < T$ mit festem t_1. Wir betrachten nur die 2. und 3. Gleichung von (1) und fassen dabei φ als gegebene Funktion auf. Es sei

$$\Phi = \max_{[0,t_1]\times\bar{D}} |\nabla\varphi| \quad \text{sowie} \quad P = \sqrt{2} \max_{[0,t_1]\times\bar{D}} |u|.$$

Zunächst führen wir (nach [12]) die neuen abhängigen Größen $n = v\,\mathrm{e}^{rt}$ und $p = w\,\mathrm{e}^{rt}$ ein. Die Konstante r soll der Ungleichung

$$r \cdot \min\{1, \delta\} \geqq \frac{1}{2}\Phi^2 + \lambda^{-2}(P + \|Q\|_{L_\infty(D)})$$

genügen. Unter Ausnutzung der 1. Gleichung von (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} v_t &= \Delta v - \nabla v \cdot \nabla\varphi - (r - \lambda^{-2}(p - n + Q))\, v - \beta\,\mathrm{e}^{-rt} S(v\,\mathrm{e}^{rt}, w\,\mathrm{e}^{rt}, \lambda), \\ w_t &= \delta^{-1}\Delta w + \delta^{-1}\nabla w \cdot \nabla\varphi - (r + \delta^{-1}\lambda^{-2}(p - n + Q))\, w \\ &\quad - \beta\,\mathrm{e}^{-rt} S(v\,\mathrm{e}^{rt}, w\,\mathrm{e}^{rt}, \lambda), \qquad (t, x) \in (0, t_1] \times D. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren jetzt die 1. Gleichung davon skalar im Sinne des $L_2(D)$ mit $v^- = \min\{0, -v\}$ und schätzen ab:

$$\begin{aligned} (v_t, v^-) &= -\int_D \nabla v \cdot \nabla v^-\,dx - \int_{B_2} (b_n v - \tilde{\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-rt})\, v^-\,d\sigma \\ &\quad - \int_D v^-\,\nabla\varphi \cdot \nabla v\,dx - \int_D (r - \lambda^{-2}(p - n + Q))\, v v^-\,dx \\ &\quad - \beta\,\mathrm{e}^{-rt} \int_D S v^-\,dx \\ &= \int_D (\nabla v^-)^2\,dx + \int_{B_2} \left(b_n (v^-)^2 + \tilde{\bar{n}}\,\mathrm{e}^{-rt}\, v^-\right) d\sigma \\ &\quad + \int_D v^-\,\nabla\varphi \cdot \nabla v^-\,dx + \int_D (r - \lambda^{-2}(p - n + Q))\,(v^-)^2\,dx \\ &\quad - \beta\,\mathrm{e}^{-rt} \int_D S v^-\,dx \\ &\geqq \int_D (\nabla v^-)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_D \left((\nabla\varphi)^2 (v^-)^2 + (\nabla v^-)^2\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_D \Phi^2 (v^-)^2\,dx \geqq \frac{1}{2}\int_D (\nabla v^-)^2\,dx \geqq 0. \end{aligned}$$

Somit gewinnen wir die Beziehung $(v_t^-, v^-) \leqq 0$. Integration über $[0, t]$ mit $t \in (0, t_1]$, ergibt $\|v^-(t, \cdot)\|^2_{L_2(D)} \leqq 0$, woraus unmittelbar $v^-(t, \cdot) \equiv 0$, also $n(t, \cdot) \geqq 0$ folgt. Die analoge Behandlung der 2. Gleichung nach Multiplikation mit w^- liefert $p(t, \cdot) \geqq 0$ ∎

Satz 2: *Es seien die Voraussetzungen* **(A1)**—**(A3)** *sowie* **(A7)**—**(A9)** *erfüllt. Mit*

(A10) $\tilde{\tilde{\varphi}} \equiv 0$

gilt dann für $t \in (0, T)$ *die Abschätzung* $\|u - u_B\|_X \leqq C_1 \exp(C_2 t)$, *wobei* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *nicht von* t *und der Lösung* $(\varphi, n, p)^T$ *abhängen.*

Beweis: Wir multiplizieren die 2. und 3. Gleichung von (1) skalar mit $n(t, \cdot) - n_B$ bzw. $p(t, \cdot) - p_B$ und schätzen ab (K bezeichnet im weiteren eine positive Konstante, die an verschiedenen Stellen verschiedene Werte annehmen kann):

$$\begin{aligned}\big(n - n_B, (n - n_B)_t\big)_{L_2(D)} &= (n - n_B, n_t)_{L_2(D)} = -a_n(n - n_B, n - n_B)\\ &+ \int_D (n - n_B)\, \nabla\varphi \cdot \nabla(n - n_B)\, dx + \int_D n_B\, \nabla\varphi \cdot \nabla(n - n_B)\, dx\\ &+ \int_D (n - n_B)\, \Delta n_B\, dx - \beta \int_D S(n, p, \lambda)\,(n - n_B)\, dx\\ &= -a_n(n - n_B, n - n_B) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

Wir bewerten nun die Integrale I_2 bis I_4. Es gilt zunächst

$$I_2 \leqq \|n_B\|_{L_\infty(D)}\, \|\varphi\|_{W_2^1(D)}\, \|n - n_B\|_{W_2^1(D)} \leqq \frac{1}{2K_a}\, \|n_B\|^2_{L_\infty(D)}\, \|\varphi\|^2_{W_2^1(D)} + \frac{K_a}{2}\, \|n - n_B\|^2_{W_2^1(D)}.$$

Hierbei bezeichnet K_a die Koerzivitätskonstante der Bilinearform a auf Y. Die weitere Abschätzung von $\|\varphi\|_{W_2^1(D)}$ unter Ausnutzung der 1. Gleichung von (1) in Verbindung mit der Voraussetzung (A2)/3 führt nach einigen einfachen Umformungen zu

$$I_2 \leqq \frac{K}{\lambda^4}\,(H^2(t) + 1) + \frac{K_a}{2}\, \|n - n_B\|^2_{W_2^1(D)} \quad \text{mit}$$

$$H^2(t) = \frac{1}{2}\,\big(\|n(t, \cdot) - n_B\|^2_{L_2(D)} + \delta\, \|p(t, \cdot) - p_B\|^2_{L_2(D)}\big).$$

Ferner ist $I_3 \leqq K\big(H^2(t) + 1\big)$. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}I_4 &= -\beta \int_D \frac{np - \gamma_1\lambda^4}{n + \vartheta p + \gamma_2\lambda^2}\,(n - n_B)\, dx\\ &\leqq \frac{\beta\gamma_1\lambda^2}{\gamma_2} \int_D n\, dx + \beta \int_D \frac{np - \gamma_1\lambda^4}{n + \vartheta p + \gamma_2\lambda^2}\, n_B\, dx \leqq K\big(H^2(t) + 1\big).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Koerzivität von a_n läßt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|n - n_B\|^2_{L_2(D)} &\leqq I_1 + \frac{K}{\lambda^4}\big(H^2(t) + 1\big)\\ &= \frac{1}{2} \int_D \nabla\varphi \cdot \nabla(n - n_B)^2\, dx + \frac{K}{\lambda^4}\big(H^2(t) + 1\big)\end{aligned}$$

angeben. Eine gleichartige Bewertung gibt es auch für $\big(p - p_B, (p - p_B)_t\big)_{L_2(D)}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|p - p_B\|^2_{L_2(D)} \leqq -\frac{1}{2\delta} \int_D \nabla\varphi \cdot \nabla(p - p_B)^2\, dx + \frac{K}{\lambda^4}\,(H^2(t) + 1).$$

Wir multiplizieren nun diese Ungleichung mit δ und addieren die neue Ungleichung mit der vorangegangenen für $d\,\|n - n_B\|^2_{L_2(D)}/2\,dt$. Das ergibt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}H^2(t) \leqq \frac{1}{2}\int\limits_D \nabla\varphi\cdot\nabla[(n-n_B)^2-(p-p_B)^2]\,dx + \frac{K}{\lambda^4}\left(H^2(t)+1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_D \Delta\varphi[(n-n_B)^2-(p-p_B)^2]\,dx + \frac{K}{\lambda^4}\left(H^2(t)+1\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\int\limits_D (p-n+Q)\,[(n-n_B)^2-(p-p_B)^2]\,dx + \frac{K}{\lambda^4}\left(H^2(t)+1\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left\{\int\limits_D (p-n)(n^2-p^2)\,dx + \int\limits_D (p-n)(-2nn_B+n_B{}^2 + 2pp_B - p_B{}^2)\,dx + \int\limits_D Q[(n-n_B)^2-(p-p_B)^2]\,dx\right\} + \frac{K}{\lambda^4}\left(H^2(t)+1\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2\lambda^2}\left\{\int\limits_D (p-n)(-2nn_B+n_B{}^2+2pp_B-p_B{}^2)\,dx + \int\limits_D Q[(n-n_B)^2-(p-p_B)^2]\,dx\right\} + \frac{K}{\lambda^4}\left(H^2(t)+1\right).$$

Es ist jetzt leicht einzusehen, daß zusammenfassend die Beziehung $dH^2(t)/2dt \leqq K\lambda^{-4}\left(H^2(t)+1\right)$ gilt. Nach Integration über $[0,t]\subset[0,T)$ erhalten wir $H^2(t) \leqq H^2(0) + K\lambda^{-4}\left(T + \int\limits_0^t H^2(s)\,ds\right)$. Aus dem Lemma von Gronwall und Bellmann folgt nun die Behauptung ∎

4. Schwache Lösbarkeit der Aufgabe

Die nächsten beiden Sätze beinhalten Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problemes (1)—(3) gemäß Definition 2. Ausgehend von einem Resultat lokalen Charakters bezüglich der Variablen t (Satz 3) wird in Satz 4 unter Hinzunahme weiterer Voraussetzungen die Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung auf das ursprünglich gegebene Intervall $(0, T)$ gefolgert.

Satz 3: *Es seien die Voraussetzungen* (A1)—(A4) *erfüllt. Dann besitzt das Differentialgleichungssystem* (1) *mit den Anfangs- und Randbedingungen* (2)—(3) *für eine hinreichend kleine Zahl* $T_0 > 0$ *eine eindeutige Lösung*

$$(\varphi, n, p)^T \in C([0, T_0), W_2{}^2(D)) \times C([0, T_0), W_2{}^2(D, \mathbf{R}^2)).$$

Beweis: Zunächst wählen wir eine Zahl $r > 0$ und realisieren (A5) durch

$$U = (-1, T) \times \{v \in X^\alpha : \|u_0 - v\|_{X^\alpha} < r\} = (-1, T) \times B(u_0, r, X^\alpha).$$

Wir zeigen, daß $F(t, v)$ die Voraussetzung (**A6**) erfüllt. Die lokale Hölder-Stetigkeit in t ist wegen (**A3**)/1 offensichtlich. Wir bemerken, daß Translationen von v und F um feste Elemente aus X^α bzw. X keinen Einfluß auf die Eigenschaft der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F bezüglich v haben, solange F wohldefiniert ist. Aus diesem Grunde betrachten wir im weiteren nur homogene Randbedingungen für $u(t, x) = (n(t, x), p(t, x))^T$. Es können auch für $\varphi(t, x)$ homogene Randbedingungen angesetzt werden. Mit C bezeichnen wir im folgenden verschiedene, von (t, x) sowie von v, $w \in B(u_0, r, X^\alpha)$ unabhängige positive Konstanten. Wir betrachten die Summanden der ersten Komponente $F_1(t, v)$ von $F(t, v)$ einzeln:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla v_1 \cdot \nabla\varphi_G[v] - \nabla w_1 \cdot \nabla\varphi_G[w]\|_{L_2(D)} \\
&\leqq \sum_{i=1}^{d} \left[\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right\|_{L_2(D)} \left\|\frac{\partial(\varphi_G[v] - \varphi_G[w])}{\partial x_i}\right\|_{L_4(D)} \right. \\
&\quad \left. + \left\|\frac{\partial(v_1 - w_1)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(D)} \left\|\frac{\partial\varphi_G[w]}{\partial x_i}\right\|_{L_4(D)}\right] \\
&\leqq \sum_{i=1}^{d} \left[\|v_1\|_{W_2^1(D)} \|\varphi_G[v] - \varphi_G[w]\|_{W_4^1(D)} + \|v_1 - w_1\|_{W_2^1(D)} \|\varphi_G[w]\|_{W_4^1(D)}\right] \\
&\leqq C\left[\|v_1\|_{W_2^1(D)} \|\varphi_G[v] - \varphi_G[w]\|_{W_2^2(D)} + \|v_1 - w_1\|_{W_2^1(D)} \|\varphi_G[w]\|_{W_2^2(D)}\right] \\
&\leqq C\lambda^{-2}[\|v_1\|_{W_2^1(D)} \|v_1 - w_1 - (v_2 - w_2)\|_{L_2(D)} + \|v_1 - w_1\|_{W_2^1(D)} \\
&\quad \times \|w_1 - w_2 - Q\|_{L_2(D)}] \leqq C\lambda^{-2}[\|u_0\|_{X^\alpha} + r + \|Q\|_{L_2(D)}] \, \|v - w\|_{X^\alpha}.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden gilt die folgende Abschätzungskette:

$$\begin{aligned}
&\|v_1 \Delta\varphi_G[v] - w_1 \Delta\varphi_G[w]\|_{L_2(D)} \leqq \lambda^{-2}[\|v - w\|_{L_\infty(D,\mathbf{R}^2)} \|Q\|_{L_2(D)} \\
&\quad + \sqrt{2}\, \|v\|_{L_\infty(D,\mathbf{R}^2)} \|v - w\|_{L_2(D,\mathbf{R}^2)} + \sqrt{2}\, \|v - w\|_{L_\infty(D,\mathbf{R}^2)} \|w\|_{L_2(D,\mathbf{R}^2)}] \\
&\leqq C\lambda^{-2}[\|Q\|_{L_2(D)} + \|u_0\|_{X^\alpha} + r] \, \|v - w\|_{X^\alpha}.
\end{aligned}$$

Nun überprüfen wir noch die lokale Lipschitz-Stetigkeit von S:

$$\begin{aligned}
&\|S(v_1, v_2, \lambda) - S(w_1, w_2, \lambda)\|_{L_2(D)} \\
&\leqq \gamma_2^{-2}\lambda^{-4} \, \|(v_1^+ v_2^+ - \gamma_1\lambda^4)(w_1^+ + \vartheta w_2^+ + \gamma_2\lambda^2) \\
&\quad - (w_1^+ w_2^+ - \gamma_1\lambda^4)(v_1^+ + \vartheta v_2^+ + \gamma_2\lambda^2)\|_{L_2(D)} \\
&\leqq \gamma_2^{-2}\lambda^{-4}[(\|v_1 v_2\|_{L_\infty(D)} + \gamma_1\lambda^4) \, \|w_1^+ - v_1^+ + \vartheta(w_2^+ - v_2^+)\|_{L_2(D)} \\
&\quad + \|v_1^+ v_2^+ - w_1^+ w_2^+\|_{L_2(D)} (\|v_1\|_{L_\infty(D)} + \vartheta \, \|v_2\|_{L_\infty(D)} + \gamma_2\lambda^2)] \\
&\leqq C\lambda^{-4}(\|u_0\|_{X^\alpha} + r)^2 \, \|v - w\|_{X^\alpha}.
\end{aligned}$$

Die gleichen Abschätzungen gelten offensichtlich auch für die zweite Komponente $F_2(t, v)$ von $F(t, v)$. Insgesamt erhalten wir die Beziehung

$$\|F(t, v) - F(t, w)\|_X \leqq K(u_0, r) \, \|v - w\|_{X^\alpha}.$$

Damit genügt das Problem (5) allen Bedingungen, die die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u = (n, p)^T$ absichern (vgl. [5: Th. 3.3.3]) ∎

Satz 4: *Es seien die Voraussetzungen* (**A1**)—(**A3**) *sowie* (**A7**)—(**A10**) *erfüllt. Dann besitzt die Aufgabe* (1)—(3) *für beliebiges* $T > 0$ *eine eindeutige Lösung*

$$(\varphi, n, p)^T \in C([0, T], W_2^2(D)) \times C([0, T], W_2^2(D, \mathbf{R}^2)).$$

Beweis: Offensichtlich ist F beschränkt, d. h. abgeschlossene und beschränkte Mengen $V \subset (-1, \infty) \times X^\alpha$ werden in beschränkte Mengen $F(V) \subset X$ überführt. Es bezeichne u die nach Satz 3 existierende lokale Lösung in $(0, T_0)$ mit $T_0 < T$. Wir zeigen, daß $F(t, u)$ der Beziehung

$$\|F(t, u)\|_X \leqq K(t) (1 + \|u\|_{X^\alpha}) \tag{6}$$

genügt, wobei K auf $[0, T_0]$ beschränkt ist. Dann folgt aus einer zu [5: Cor. 3.3.5] parallelen Argumentation die Behauptung. Wir betrachten wiederum nur die erste Komponente von $F(t, u)$:

$$\begin{aligned} &\|F_1(t, u)\|_{L_2(D)} \\ &\leqq \|\nabla u_1 \cdot \nabla \varphi\|_{L_2(D)} + \|u_1 \Delta \varphi\|_{L_2(D)} + \beta \|S(u_1, u_2, \lambda)\|_{L_2(D)} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Die Terme I_1, I_2, I_3 werden nun einzeln abgeschätzt. Es ist

$$I_1 \leqq C\lambda^{-2}\left(\exp (C_2 t) + \lambda^2 \|\varphi_B(t, \cdot)\|_{W_2^2(D)} + \|Q\|_{L_2(D)}\right) \|u\|_{X^\alpha}.$$

Für I_2 gilt die gleiche Bewertung. Schließlich ist

$$I_3 \leqq C\lambda^{-2}\left(\exp (C_2 t) \|u\|_{X^\alpha} + \gamma_1 \lambda^4\right).$$

Eine gleichartige Abschätzung läßt sich auch für $F_2(t, u)$ angeben. Die Zusammenfassung liefert eine Beziehung vom Typ (6) ∎

5. Regularität der Lösung

Wir wollen jetzt einige Voraussetzungen aus Abschnitt 2 verschärfen, um die Existenz einer hinreichend glatten, d. h. klassischen Lösung der Aufgabe (1)–(3) zu sichern. Generell gelte $0 \leqq \gamma < 2(\alpha - 3/4)$. Wir stellen folgende Forderungen:

(A1*) $u_0 \in M^* = \{v \in C^{2+\gamma}(\bar{D}, \mathbf{R}^2) : v = \tilde{u}$ auf B_1, $\nu \cdot \nabla v + Pv = \tilde{\tilde{u}}$ auf $B_2\}$.

(A2*) 1. $b_n, b_p \in C^1(\bar{B}_2)$.
2. $b_n(x) \geqq 0$ und $b_p(x) \geqq 0$ auf B_2.
3. B_1, B_2, b_n, b_p seien so beschaffen, daß die Voraussetzung (A2)/3 erfüllt ist und aus $f \in C^\gamma(\bar{D})$ die Eigenschaft $G_\varphi[f] \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$ resultiert.
4. Ferner sei der Lösungsoperator G ein Isomorphismus zwischen $L_q(D, \mathbf{R}^2)$ und $W_q^2(D, \mathbf{R}^2)$, $q \in [2, 6]$, welcher außerdem Elemente von $C^\gamma(\bar{D}, \mathbf{R}^2)$ in die Klasse $C^{2+\gamma}(\bar{D}, \mathbf{R}^2)$ überführt.

(A3*) 1. Es gebe eine Funktion $\varphi_B \in C^\varrho((-1, T], C^{2+\gamma}(\bar{D}))$, $\varrho \in (0, 1)$, mit $\varphi_B = \tilde{\varphi}$, $(t, x) \in [0, T] \times B_1$, und $\nu \cdot \nabla \varphi_B = \tilde{\tilde{\varphi}}$, $(t, x) \in [0, T] \times B_2$.
2. Falls $\tilde{u} \not\equiv 0$ auf B_1 oder $\tilde{\tilde{u}} \not\equiv 0$ auf B_2 ist, so existiere eine Funktion $u_B \in M^*$.

(A4*) $Q = Q(\cdot, \lambda) \in C^\gamma(\bar{D})$.

Satz 5: *Es seien die Voraussetzungen* (A1*)–(A4*) *erfüllt und es sei* $(\varphi, n, p)^T$ *Lösung der Aufgabe* (1)–(3). *Dann ist* $(\varphi, n, p)^T$ *eine klassische Lösung, d. h.*

$$(\varphi, n, p)^T \in C([0, T], C^{2+\gamma}(\bar{D})) \times C^1((0, T], C^{2+\gamma}(\bar{D}, \mathbf{R}^2)).$$

Beweis: Wie bereits bei Satz 3 brauchen wir nur den Fall homogener Randbedingungen zu betrachten. Es läßt sich zeigen, daß $du/dt \in X^\alpha$ gilt und daß die Abbildung $t \mapsto du/dt$ stetig ist [5: Th. 3.5.2]. Außerdem liegt die Einbettung $X^\alpha \hookrightarrow C^\gamma(\bar{D}, \mathbf{R}^2)$ vor [5: Th. 1.6.1]. Es sei im weiteren $t \in (0, T)$. Aus (P3) folgt $\|F_1(t, u)\|_{L_4(D)} < \infty$.

Gleiches gilt auch für $F_2(t, u)$. Folglich haben wir $Au = F(t, u) - du/dt \in L_6(D, \mathbf{R}^2)$, woraus sich wegen (A2*)/4 $u \in W_6^2(D, \mathbf{R}^2)$ ergibt. Also gilt auch $\nabla n, \nabla p \in C^\gamma(\overline{D}, \mathbf{R}^2)$. Wegen $X^\alpha \hookrightarrow C^\gamma(\overline{D}, \mathbf{R}^2)$ erhalten wir $u \in C^{2+\gamma}(\overline{D}, \mathbf{R}^2)$. Unter Ausnutzung von (A2*)/3 gilt weiter $\varphi \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$. Ebenfalls aus (A2*)/3 ergibt sich die Stetigkeit von φ bezüglich t ∎

LITERATUR

[1] Васильева, А. Б., и В. Г. Стельмах: Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов: Ж. выч. мат. и мат. физ. **17** (1977), 339—348.

[2] Gajewski, H.: On existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the basic equations for carrier transport in semiconductors. ZAMM **65** (1985), 101—108.

[3] Gajewski, H., and K. Gröger: On the basic equations for carrier transport in semiconductors. Preprint P-MATH-39/84. Berlin: AdW der DDR, Institut für Mathematik 1984.

[4] Heinrich, J.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für verschiedene parabolische Anfangs-Randwertaufgaben im Sobolew-Raum. Dissertation A. Dresden: Technische Universität 1985.

[5] Henry, D.: Geometric theory of semilinear parabolic equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1981.

[6] Kinderlehrer, D. H., and G. Stampacchia: An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press 1980.

[7] Kluge, R., und S. Unger: Zum System partieller Differentialgleichungen des Ladungsträgertransports. Preprint P-MATH-10/85. Berlin: AdW der DDR, Institut für Mathematik 1985.

[8] Markowich, P. A., Ringhofer, Ch. A., Langer, E., and S. Selberherr: An asymptotic analysis of single-junction semiconductor devices. MRC Technical Summary Report 2527. Madison: Mathematics Research Center 1982.

[9] Mock, M. S.: An initial value problem from semiconductor device theory. SIAM J. Math. Anal. **5** (1974), 597—612.

[10] Mock, M. S.: Asymptotic behaviour of solutions of transport equations for semiconductor devices. J. Math. Anal. Appl. **49** (1975), 215—225.

[11] Mock, M. S.: Analysis of mathematical models of semiconductor devices. Dublin: Boole Press 1983.

[12] Seidman, T. I., and G. M. Troianiello: Time-dependent solutions of a nonlinear system arising in semiconductor theory. UMBC-Mathematics Research Report 83-6. Baltimore: University of Maryland 1983.

Manuskripteingang: 12. 06. 1985

VERFASSER:

Lutz Angermann
Sektion Mathematik der Technischen Universität
Mommsenstr. 13, DDR-8027 Dresden