Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (4) 1987, S. 363–369

Universale Rettungskurven II[1])

R. Klötzler und S. Pickenhain

Es wird nachgewiesen, daß die im Teil I unter speziellen Strukturannahmen gefundene optimale Rettungskurve auch ohne diese Annahmen optimal ist.

Доказывается, что кривая оптимальность которой в части I была показана при специальных структурных предположениях, оказывается и оптимальной без этих предположений.

It is proved, that the optimal live-saving line, founded in Part I under special structural assumptions, is also optimal without these assumptions.

1. Einleitung

Im Teil I dieser Arbeit (vgl. [3]) wurde das folgende Problem aufgeworfen und erörtert:

Wie muß eine ebene Kurve $\mathfrak{C}^*$ kleinster Länge beschaffen sein, damit man von jedem Startpunkt A eines beliebigen Bereichs $\mathfrak{B}$ der Dicke Δ_0 längs der an A angesetzten und beliebig gedrehten Kurve $\mathfrak{C}^*$ den Rand $\partial\mathfrak{B}$ erreicht?

Die geometrische Vordiskussion dieses Problems erbrachte zunächst den Sachverhalt, daß $\mathfrak{C}^*$ die kürzeste aller jener *universalen Rettungskurven* $\mathfrak{C}$ ist, deren konvexe Hülle $\operatorname{conv}\mathfrak{C}$ die Dicke $\Delta(\operatorname{conv}\mathfrak{C}) \geqq \Delta_0$ besitzt. Die weitere analytische Untersuchung erfolgte im Teil I unter den Hypothesen, daß $\mathfrak{C}^*$ keine mehrfachen Punkte besitzt (Hypothese 1) und in einer Halbebene zur Verbindungsgeraden ihres Anfangs- und Endpunktes A bzw. Z verläuft (Hypothese 2). Es ergab sich daraus eine bis auf Kongruenz eindeutige Lösung $\mathfrak{C}^*$, die aus zwei (kongruenten) Seiten eines speziellen gleichschenkligen Yamanouti-Dreiecks besteht. Die Länge von $\mathfrak{C}^*$ erwies sich als $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*) = (2{,}27829\ldots)\,\Delta_0$. In dem vorliegenden Teil II wird nachgewiesen, daß $\mathfrak{C}^*$ auch im Vergleich zu allen anderen universalen Rettungskurven $\mathfrak{C}$, die nicht den obigen Hypothesen genügen, kleinste Länge besitzt.

2. Weitere Eigenschaften optimaler Rettungskurven

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften optimaler universaler Rettungskurven $\mathfrak{C}_0$ einer Dicke $\Delta(\mathfrak{C}_0) \geqq \Delta_0$ zusammengestellt, ohne von den Hypothesen 1 und 2 Gebrauch zu machen. Nach den Hilfssätzen 1 und 2 von Teil I und der dort definierten Breite $B(\varphi)$ von $\mathfrak{C}$ in Richtung φ lautet das Optimierungsproblem der kürzesten uni-

---

[1]) Teil I dieser Arbeit erschien in H. 1 (1986), 27–38 dieser Zeitschrift.

versalen Rettungskurve $\mathfrak{C}$ der Darstellung $x = x(t)$ auf $[0, 1]$[2]):

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L}(\mathfrak{C}) \to \text{Min} \\ \text{unter der Nebenbedingung} \\ B(\varphi) = \max\limits_{t\in[0,1]} x^{\mathrm{T}}(t)\, \mathfrak{e}(\varphi) + \max\limits_{t\in[0,1]} x^{\mathrm{T}}(t)\, \mathfrak{e}(\varphi+\pi) \geqq \Delta_0 \\ \text{für alle } \varphi \in [0,\pi] \text{ mit } \mathfrak{e}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Wir stellen nun eine Reihe von Eigenschaften optimaler Lösungen x_0 zu (1) und damit optimaler Rettungskurven $\mathfrak{C}_0$ der Darstellung $x = x_0(t)$ über $[0, 1]$ auf.

Eigenschaft 1: *Es gilt* $\Delta(\mathfrak{C}_0) = \Delta_0$.

Beweis: Wäre $\Delta(\mathfrak{C}_0) = \Delta' > \Delta_0$, so bilden wir $\tilde{\mathfrak{C}}$ der Darstellung $\tilde{x} = (\Delta_0/\Delta')\, x_0$. Dafür ist nach Definition der Dicke Δ gemäß Teil I $\Delta(\tilde{\mathfrak{C}}) = (\Delta_0/\Delta')\, \Delta(\mathfrak{C}_0) = \Delta_0$ und $\mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{C}}) = (\Delta_0/\Delta')\, \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0) < \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0)$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von $\mathfrak{C}_0$ ∎

Zur Vereinfachung der Schreibweise einiger nachfolgender Beweisschritte führen wir die folgende Bezeichnung ein.

Definition: Sind $a, b \in [0, 1]$, so ist $\mathfrak{C}_0[a, b]$ jener orientierte Teilbogen von $\mathfrak{C}_0$, der aus der Punktmenge $\{x_0(t) \mid t \in [a, b]\}$ besteht und von $x_0(a)$ nach $x_0(b)$ durchlaufen wird.

Eigenschaft 2: *Es gilt* $x_0(0) \neq x_0(1)$.

Beweis: Wir nehmen an, diese Eigenschaft ist nicht erfüllt. Dann diskutieren wir folgende zwei sich ergänzende Fälle.

Fall a: $x_0(0) = x_0(1) \in \operatorname{int} \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$. Hierzu existiert offensichtlich ein so kleines $\varepsilon > 0$, daß auch noch die Teilbögen $\mathfrak{C}_0[1-\varepsilon, 1]$ und $\mathfrak{C}_0[0, \varepsilon]$ vollständig in $\operatorname{int} \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$ liegen. Somit gilt für den Teilbogen $\mathfrak{C}_0[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ sowohl $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0[\varepsilon, 1-\varepsilon]) > \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0)$ als auch $\operatorname{conv} \mathfrak{C}_0 = \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Auf Grund der letztgenannten Eigenschaft wäre nach Hilfssatz 2 von Teil I auch $\mathfrak{C}_0[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ eine Rettungskurve; sie hätte eine kleinere Länge als $\mathfrak{C}_0$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von $\mathfrak{C}_0$. Der Fall a kann also gar nicht auftreten.

Fall b: $x_0(0) = x_0(1) \in \partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$. Wir legen dann durch $x_0(0) = x_0(1)$ eine Stützgerade $\mathfrak{g}$ an $\operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$. Somit wäre $\mathfrak{C}_0$ eine Rettungskurve, die in einer Halbebene der „Verbindungsgeraden" $\mathfrak{g}$ von Anfangs- und Endpunkt $x_0(0)$ bzw. $x_0(1)$ verläuft. Nach Satz 2 von Teil 1 ist deshalb $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0) \geqq \mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*)$. Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nach der Anmerkung 1 zu Satz 2 dann und nur dann, wenn $(\partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0) \setminus \overline{x_0(0)\, x_0(1)} = \mathfrak{C}^*$ ist. Diese Eigenschaft ist aber hier nicht erfüllt, weil $x_0(0) = x_0(1)$ ist und $\mathfrak{C}^*$ keine geschlossene Kurve bildet. Die so verbleibende Beziehung $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0) > \mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*)$ widerspricht aber der vorausgesetzten Optimalität von $\mathfrak{C}_0$. Fall b kann also auch nicht eintreten ∎

Analog zu Fall a bestätigt man leicht auch die folgende Eigenschaft.

Eigenschaft 3: *Es gilt* $x_0(0), x_0(1) \in \partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$.

---

[2]) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir dabei stets verlangen, daß $x(t)$ in keinem noch so kleinen Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ mit $\alpha < \beta$ konstant ist.

3. Zur optimalen Breite eines Systems von Partialsummen

Gegeben sei eine n-gliedrige reelle Zahlenfolge $a = \{a_i\}_{i=1}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \neq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0. \tag{2}$$

Wir fassen diese als einen Zyklus auf, indem a_1 als Nachfolger zu a_n angesehen wird. Wir sprechen genau dann von einem *Vorzeichenwechsel* in a, wenn in dem Zyklus a eine Teilkette $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k$ existiert mit $a_i = 0$ für $i = j+1, \ldots, k-1$ und $a_j a_k < 0$. Wir bilden zu a die Menge aller ihrer Partialsummen

$$A = A(a) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \mid k = 1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{3}$$

Unter der *Breite* $B(A(a))$ dieser Menge des $\mathbf{R}^1$ verstehen wir (in Analogie zu (1)) die Zahl

$$B(A(a)) = \operatorname*{Max}_{k \leq n} \sum_{i=1}^{k} a_i - \operatorname*{Min}_{l \leq n} \sum_{i=1}^{l} a_i = \operatorname*{Max}_{k,l \leq n, l<k} \left| \sum_{i=l+1}^{k} a_i \right|. \tag{4}$$

Durch Anwendung einer Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$ auf die Glieder von a entsteht $\pi a = \{a_{i_j}\}_{j=1}^n$ und die zugeordnete Partialsummen-Menge

$$\pi A := A(\pi a) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \mid k = 1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{5}$$

Wir studieren nun die Optimierungsaufgabe, unter allen obigen Permutationen π jene zu finden, für die $B(\pi A)$ maximal ist, d. h.,

$$B(\pi A) \to \operatorname*{Max}_{\pi}. \tag{6}$$

Wir fügen zunächst einen einfachen Hilfssatz ein, der das Verhalten von $B(\pi A)$ schon etwas aufklärt.

Hilfssatz 1: *Mit* $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n-1 & n \\ 2 & 3 \ldots n & 1 \end{pmatrix}$ *gilt* $B(\pi_0 A) = B(A)$.

Beweis: Wegen (2) ist bei Anwendung der Permutation π_0

$$\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right) - a_1 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} = a_1 - a_1.$$

Daher ist

$$\operatorname*{Max}_{k \leq n} \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} = \operatorname*{Max}_{k \leq n} \sum_{i=1}^{k} a_i - a_1 \text{ und } \operatorname*{Min}_{k \leq n} \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} = \operatorname*{Min}_{k \leq n} \sum_{i=1}^{k} a_i - a_1.$$

Damit erhalten wir unmittelbar aus (4) die Behauptung ∎

Satz 1: *Zum Optimierungsproblem* (6) *ist eine Permutation* π *dann und nur dann optimal, wenn die Folge* πa *(zyklisch aufgefaßt) genau* 2 *Vorzeichenwechsel besitzt.*

Beweis: *Hinlänglichkeit:* Es habe $\pi^* a$ genau zwei Vorzeichenwechsel. Dann hat natürlich auch $\pi_0{}^m \pi^* a =: a^0$ mit $a^0 = \{a_i{}^0\}_{i=1}^n$ genau zwei Vorzeichenwechsel für beliebiges $m \in \mathbf{N}$ und infolge Hilfssatz 1 ist $B(\pi^* A) = B(\pi_0{}^m \pi^* A)$. Wir können hierbei stets ein solches m finden, daß in der Folge a^0 zuerst nichtnegative Glieder und anschließend nur nichtpositive Glieder auftreten; sagen wir also etwa $a_1^0, \ldots, a_\varkappa^0 \geqq 0$ und $a_{\varkappa+1}^0, \ldots, a_n^0 \leqq 0$. Wegen (2) ist

$$\sum_{i=1}^{\varkappa} a_i^0 = -\sum_{i=\varkappa+1}^{n} a_i^0 = L \quad \text{mit} \quad 2L := \sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0$$

und nach (4) und (5) gilt $B(\pi_0{}^m\pi^*A) = B(\pi^*A) = L$. Andererseits ist für jede beliebige andere Permutation π nach (4) und (5)

$$B(\pi A) = \underset{k,l\leqq n,l<k}{\operatorname{Max}} \left| \sum_{j=l+1}^{k} a_{i_j} \right| \leqq \operatorname{Max} \left(\sum_{i=1}^{\varkappa} a_i^0, -\sum_{i=\varkappa+1}^{n} a_i^0 \right) = L. \tag{7}$$

Daher ist für beliebige π die Ungleichung $B(\pi A) \leqq L = B(\pi^*A)$ erfüllt, also π^* optimal.

Notwendigkeit: Wir nehmen an, π ist optimal. Dann müßte nach (7) ein k und $l < k$ existieren mit

$$\left| \sum_{j=l+1}^{k} a_{i_j} \right| = \operatorname{Max} \left(\sum_{i=1}^{\varkappa} a_i^0, -\sum_{i=\varkappa+1}^{n} a_i^0 \right) = L.$$

Das heißt, es gilt entweder

$$\sum_{j=l+1}^{k} a_{i_j} = \sum_{i=1}^{\varkappa} a_i^0 \quad \text{oder} \quad \sum_{j=l+1}^{k} a_{i_j} = \sum_{i=\varkappa+1}^{n} a_i^0. \tag{8}$$

Die erste Bedingung von (8) kann offenbar nur dann gelten, wenn in ihrer linken Summe keine negativen Glieder, aber sämtliche positiven Glieder von a^0 auftreten. Die zweite Bedingung von (8) kann offenbar nur dann gelten, wenn in ihrer linken Summe keine positiven Glieder, aber sämtliche negativen Glieder von a^0 auftreten. Beide Fälle bedeuten, daß in πa genau zweimal ein Vorzeichenwechsel auftritt ∎

Nunmehr erweitern wir die vorangegangenen Untersuchungen auf Vektorfolgen des $\mathbf{R}^2$. Das heißt, wir betrachten eine fest vorgegebene n-gliedrige Folge $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^n$ von Vektoren $\mathfrak{a}_i \in \mathbf{R}^2$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{a}_i| \neq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = 0.$$

Wir bilden wiederum zu $\mathfrak{a}$ die Menge aller ihrer Partialsummen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a}) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i \mid k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Als Breite $B(\mathfrak{A}, \varphi)$ von $\mathfrak{A}$ (oder seiner konvexen Hülle $\operatorname{conv} \mathfrak{A}$) in Richtung φ erhalten wir dann nach (1)

$$B(\mathfrak{A}, \varphi) = \underset{k\leqq n}{\operatorname{Max}} \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i^{\mathsf{T}} \mathfrak{e}(\varphi) - \underset{l\leqq n}{\operatorname{Min}} \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{a}_i^{\mathsf{T}} \mathfrak{e}(\varphi).$$

In sinngemäßer Übertragung der Aufgabe (6) betrachten wir jetzt das Optimierungsproblem, unter allen Permutationen π jene zu finden, für die die Breite von $\pi\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\pi\mathfrak{a})$ in Richtung φ maximal ist. Das bedeutet, wir studieren

$$B(\pi\mathfrak{A}, \varphi) \to \underset{\pi}{\operatorname{Max}} \quad \text{für} \quad \varphi \in [0, \pi]. \tag{9}$$

Satz 2: *Zum Optimierungsproblem* (9) *ist eine Permutation* π *dann und nur dann optimal für sämtliche* $\varphi \in [0, \pi]$, *wenn die Folge der Vektoren von* $\pi\mathfrak{a}$ *aneinandergeheftet im* $\mathbf{R}^2$ *einen geschlossenen Polygonzug ohne mehrfache Punkte* $\mathfrak{C}$ *-bildet, der zugleich Rand von* conv $\mathfrak{C}$ *ist.*

Beweis: *Hinlänglichkeit:* Es erfülle $\pi^*\mathfrak{a}$ die genannten Forderungen. Dann besitzt die Zahlenfolge $(\pi^*\mathfrak{a})^{\mathrm{T}} \mathfrak{e}(\varphi)$ genau zwei Vorzeichenwechsel für beliebige Winkel $\varphi \in [0, \pi]$. Außerdem erfüllt $a = (\pi^*\mathfrak{a})^{\mathrm{T}} \mathfrak{e}(\varphi)$ die Voraussetzung (2). Damit ist nach Satz 1 mit diesem a die Permutation π^* optimal bezüglich (6) für sämtliche φ und damit auch optimal bezüglich (9).

Notwendigkeit: Wir nehmen an, π sei optimal für sämtliche $\varphi \in [0, \pi]$, ohne jedoch für den zugeordneten Polygonzug $\mathfrak{C}$ die im Satz 2 genannten Eigenschaften zu bedingen. Dann tritt stets einer der drei nachstehenden Fälle auf:

Fall 1: Auf ∂ conv $(\pi\mathfrak{A})$ gibt es eine Seite $\overline{PQ}$, die von $\mathfrak{C}$ gar nicht durchlaufen wird.

Fall 2: Auf ∂ conv $(\pi\mathfrak{A})$ gibt es eine Seite $\overline{PQ}$, die doppelt von $\mathfrak{C}$ durchlaufen wird.

Fall 3: Auf $\mathfrak{C}$ gibt es ein Streckenstück $\overline{PQ} \subset$ int conv $\mathfrak{C}$.

Im Fall 1 wählen wir $\mathfrak{e}(\varphi)$ orthogonal zu $\overline{PQ}$. $\mathfrak{g}_1$ sei die Stützgerade an conv $(\pi\mathfrak{A})$, welche durch P und Q hindurchgeht, $\mathfrak{g}_2$ sei ihre parallele Stützgerade an conv $(\pi\mathfrak{A})$. Dann betrachten wir den kleinsten Teilpolygonzug von $\mathfrak{C}$, der von einem Punkte R_- außerhalb $\mathfrak{g}_2$ startet, durch einen Berührungspunkt R von $\mathfrak{g}_2$ mit conv $(\pi\mathfrak{A})$ verläuft und in einem Punkt R_+ außerhalb $\mathfrak{g}_2$ endet. An diesem Teilpolygonzug seien als erzeugende Summanden von $\pi\mathfrak{a}$ die aufeinanderfolgenden Vektoren $\mathfrak{a}_{i_{r_-}}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_{r_+}}$ beteiligt. Die gleichen Überlegungen führen wir jetzt zu $\mathfrak{g}_1$ durch: Wir betrachten den kleinsten Teilpolygonzug von $\mathfrak{C}$, der von einem Punkt P_- außerhalb $\mathfrak{g}_1$ startet, durch P verläuft und in einem Punkt P_+ außerhalb $\mathfrak{g}_1$ endet; an ihm seien von $\pi\mathfrak{a}$ die aufeinanderfolgenden Vektoren $\mathfrak{a}_{i_{p_-}}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_{p_+}}$ beteiligt. Schließlich konstruieren wir noch den kleinsten Teilpolygonzug von $\mathfrak{C}$, der von einem Punkt Q_- außerhalb $\mathfrak{g}_1$ startet, durch Q verläuft und in einem Punkt Q_+ außerhalb von $\mathfrak{g}_1$ endet; an ihm seien von $\pi\mathfrak{a}$ die aufeinanderfolgenden Vektoren $\mathfrak{a}_{i_{q_-}}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_{q_+}}$ beteiligt. Auf Grund unserer Voraussetzung sind diese drei Teilfolgen verschieden und jede von ihnen erzeugt in den Zahlenfolgen

$$\mathfrak{a}_{i_{r_-}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi), \ldots, \mathfrak{a}_{i_{r_+}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi); \qquad \mathfrak{a}_{i_{p_-}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi), \ldots, \mathfrak{a}_{i_{p_+}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi); \qquad \mathfrak{a}_{i_{q_-}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi), \ldots, \mathfrak{a}_{i_{q_+}}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi)$$

je einen Vorzeichenwechsel. π kann somit nach Satz 1 nicht optimal bezüglich (6) mit $a = \mathfrak{a}^{\mathrm{T}}\mathfrak{e}(\varphi)$ sein, also auch nicht optimal bezüglich (14) zu jedem ausgewählten φ. Wir haben somit einen Widerspruch erhalten.

In den Fällen 2 und 3 besitzt $\mathfrak{C}$ (abgesehen vom Anfangs- und Endpunkt) mehrfache Punkte, insbesondere Kreuzungspunkte seiner Strecken. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir von vornherein annehmen, daß diese Kreuzungspunkte zu $\pi\mathfrak{A}$ gehören; andernfalls läßt sich durch geeignete Zerlegung der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ in eine Summe gleichorientierter Vektoren diese gewünschte Situation (bei vergrößertem n) erzielen. Nach einem bekannten Satz der Graphentheorie (vgl. etwa [1: S. 124]) läßt sich der Zyklus $\mathfrak{C}$ als Summe endlich vieler Elementarzyklen $\mathfrak{C}_\nu$ (die also keine mehrfachen Punkte haben — abgesehen vom Anfangs- und Endpunkt) darstellen:

$$\mathfrak{C} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathfrak{C}_\nu \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C}_\nu \cap \mathfrak{C}_{\nu+1} \neq \varnothing \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, N-1.$$

Jeder dieser Elementarzyklen $\mathfrak{C}_\nu$ hat eine Knotengesamtheit, die aus einer Teilkette hintereinanderstehender Glieder der Folge $\pi\mathfrak{A}$ besteht und aus einer Teilfolge $\mathfrak{a}^{(\nu)}$

von Vektoren aus $\mathfrak{a}$ additiv erzeugt wird, deren Summe der Nullvektor ist. Ist zu diesen Elementarzyklen für ein bestimmtes ν die Eigenschaft $\mathfrak{C}_\nu \neq \partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_\nu$ erfüllt, so führt die im Fall 1 durchgeführte Schlußweise — eingeschränkt auf $\mathfrak{C}_\nu$ — zum Nachweis von drei Vorzeichenwechseln für $\pi\mathfrak{a}$, also zu einem Widerspruch zur Optimalität von π. Ist aber für alle $\nu = 1, \ldots, N$ stets $\mathfrak{C}_\nu = \partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_\nu$, so greifen wir uns zwei aufeinanderfolgende dieser Elementarzyklen heraus, $\mathfrak{C}_\nu$ und $\mathfrak{C}_{\nu+1}$, und eine gemeinsame Stützgerade $\mathfrak{g}_1$ an $\operatorname{conv} \mathfrak{C}_\nu$ und $\operatorname{conv} \mathfrak{C}_{\nu+1}$ mit den Berührungspunkten $P \in \mathfrak{C}_\nu$ und $Q \in \mathfrak{C}_{\nu+1}$ (P und Q können auch zusammenfallen). Die zu $\mathfrak{g}_1$ parallele Stützgerade $\mathfrak{g}_2$ an $\operatorname{conv} (\mathfrak{C}_\nu \cup \mathfrak{C}_{\nu+1})$ berührt diese Menge in einem Punkt $R \in \mathfrak{C}_\nu \cup \mathfrak{C}_{\nu+1}$. Hiermit führt die oben im Fall 1 angewandte Beweistechnik (in strikter Anlehnung an die dort gewählte Bezeichnung) erneut zur Aufdeckung von drei Vorzeichenwechseln für $\pi\mathfrak{a}$, also zu einem Widerspruch zur Optimalität von π ∎

4. Der Optimalitätsnachweis für $\mathfrak{C}^*$

In diesem Abschnitt verifizieren wir die am Schluß der Einleitung angekündigte Optimalitätsaussage.

Satz 3: *Es sei $\mathfrak{C}_0$ eine optimale universale Rettungskurve zu vorgegebener Dicke Δ_0. Dann gilt* $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0) = \mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*)$.

Beweis: Auf Grund der Optimalität von $\mathfrak{C}_0$ mit der Parameterdarstellung $x = x_0(t)$ auf $[0, 1]$ gilt $A := x_0(0) \neq Z := x_0(1)$ nach Eigenschaft 2. Nach Eigenschaft 3 sind $A, Z \in \partial \operatorname{conv} \mathfrak{C}_0$. Infolge der Rektifizierbarkeit von $\mathfrak{C}_0$ existiert eine Folge von orientierten Polygonzügen $\mathfrak{P}_k$ von A nach Z mit der Parameterdarstellung $x = x_k(t)$ auf $[0, 1]$, so daß die Folge der x_k gleichmäßig gegen x_0 konvergiert. Damit gilt neben

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{L}(\mathfrak{P}_k) = \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0) \tag{10}$$

auch

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{P}_k) = \Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{C}_0) = \Delta_0 \tag{11}$$

(vgl. z. B. [4]). Wir ergänzen $\mathfrak{P}_k$ durch Hinzunahme der orientierten Strecke $\overrightarrow{ZA}$ zu einem geschlossenen orientierten Polygonzug $\overline{\mathfrak{P}}_k$. Er setze sich gemäß Durchlaufsinn durch Aneinanderheften der Vektoren der Folge $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^n$ mit $n = n(k)$, $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{ZA}$ zusammen. Geordnet nach dem Durchlaufsinn von $\overline{\mathfrak{P}}_k$ läßt sich die Folge seiner Knotenpunkte mit den Bezeichnungen von Abschnitt 3 durch die Punktfolge $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ erfassen. Durch Permutieren der Glieder von $\mathfrak{a}$ erzeugen wir nun eine solche Folge $\pi\mathfrak{a}$, daß deren Glieder (Vektoren), ihrer Anordnung gemäß aneinandergeheftet, einen geschlossenen Polygonzug $\overline{\mathfrak{Q}}_k$ erzeugen, der zugleich Rand von $\operatorname{conv} \overline{\mathfrak{Q}}_k$ ist. Nach Satz 2 ist $\Delta(\operatorname{conv} \overline{\mathfrak{Q}}_k) \geqq \Delta(\operatorname{conv} \overline{\mathfrak{P}}_k)$ bzw. mit $\mathfrak{Q}_k := \overline{\mathfrak{Q}}_k \setminus \overrightarrow{ZA}$

$$\Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{Q}_k) \geqq \Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{P}_k). \tag{12}$$

Außerdem ist nach Konstruktion

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{Q}_k) = \mathfrak{L}(\mathfrak{P}_k). \tag{13}$$

Nach dem Blaschkeschen Auswahltheorem (vgl. [2: § 18]) existiert zur Bereichsfolge $\{\operatorname{conv} \mathfrak{Q}_k\}$ eine Teilfolge $\{\operatorname{conv} \mathfrak{Q}_{k'}\}$, die im Sinne der Hausdorff-Metrik gegen einen konvexen ebenen Bereich $\mathfrak{B}_0$ konvergiert. Wegen (13) und $\overline{\mathfrak{Q}}_{k'} = \partial (\operatorname{conv} \mathfrak{Q}_{k'})$ hat dies gleichzeitig zur Folge

$$\lim_{k'\to\infty} \mathfrak{L}(\overline{\mathfrak{Q}}_{k'}) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{L}(\overline{\mathfrak{P}}_{k'}) = \mathfrak{L}(\partial\mathfrak{B}_0)$$

und mit $\tilde{\mathfrak{C}}_0 := \partial\mathfrak{B}_0 \setminus \overrightarrow{ZA}$ wegen (10)

$$\mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{C}}_0) = \lim_{k'\to\infty} \mathfrak{L}(\mathfrak{Q}_{k'}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0).$$

Aus (11) und (12) resultiert ferner

$$\Delta(\operatorname{conv} \tilde{\mathfrak{C}}_0) = \lim_{k'\to\infty} \Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{Q}_{k'}) \geqq \lim_{k'\to\infty} \Delta(\operatorname{conv} \mathfrak{P}_{k'}) = \Delta_0.$$

Somit wäre auch $\tilde{\mathfrak{C}}_0$ eine universale Rettungskurve von gleicher Länge wie $\mathfrak{C}_0$. Da aber $\tilde{\mathfrak{C}}_0$ nach Konstruktion die eingangs genannten Hypothesen 1 und 2 erfüllt, muß $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*) \leqq \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{C}}_0) = \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0)$ sein. Infolge der vorausgesetzten Optimalität von $\mathfrak{C}_0$ kann aber nur $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^*) = \mathfrak{L}(\mathfrak{C}_0)$ gelten ∎

LITERATUR

[1] Berge, C., und A. Ghouila-Houri: Programme, Spiele, Transportnetze. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969.
[2] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig: Teubner-Verlag 1916.
[3] Klötzler, R.: Universale Rettungskurven I. Z. Anal. Anw. 5 (1986) 27–38.
[4] Klötzler, R., und M. Roth: Zur Länge einer ebenen geschlossenen Kurve und des Randes ihrer konvexen Hülle. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig (im Druck).

Manuskripteingang: 10. 06. 1986

VERFASSER:

Prof. Dr. Rolf Klötzler und Dr. Sabine Pickenhain
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz, DDR-7010 Leipzig