

Zur Lösung des linearisierten Knickstab-Problems mit beschränkter Ausbiegung

HOÀNG XUÂN PHÚ

Es wird das Problem des Knickstabes in einem engen, streifenförmigen Kanal durch eine linearisierte Aufgabe ersetzt und letztere vollständig gelöst.

Проблема изгиба стержня в узком трубчатом канале заменяется линеаризованной задачей и последняя решается полностью.

The problem of rod capable of creasing under a load on its upper end and situated in a narrow strip-shaped channel is replaced by a linearized problem, which is the solved completely.

1. Einleitung

Wir betrachten einen elastischen homogenen Stab, der in einem engen, zweidimensionalen, streifenförmigen Kanal liegt. Die beiden Enden des Stabes liegen auf der Achse des Kanals, sie sind gelenkig gelagert. Die Frage lautet: Wie ist die absolut stabile Lage des Stabes, wenn er durch eine Kraft P gedrückt wird? Dieses Knickstab-Problem wurde schon von mehreren Autoren untersucht (wir werden noch im Abschnitt 4 darauf eingehen). Gewonnen wurden zum großen Teil relativ stabile Lagen, zum Teil auch absolut stabile Lagen, allerdings nur für kleine Kräfte P bzw. kleine Längen T (die Lage des Stabes ist (absolut) *stabil*, wenn die Gesamtenergie am kleinsten ist; wenn wir die Masse des Stabes und die Reibung vernachlässigen, dann ist diese Gesamtenergie gleich der Summe aus der Verformungsenergie und der potentiellen Energie). Nach P. FUNK [1] entspricht dieses Problem der folgenden Aufgabe der optimalen Steuerung:

$$\int_0^T \left(\frac{a^2}{2} u^2(t) + \cos x_1(t) \right) dt \rightarrow \text{Min!} \quad (1)$$

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \sin x_1, |x_2| \leq \alpha, x_2(0) = x_2(T) = 0,$$

wobei T die Länge des Stabes, $x_1(t)$ sein Neigungswinkel bez. der Kanalachse im Punkt t (Bogenmaß), $x_2(t)$ der Abstand des Stabpunktes t zur Kanalachse, 2α die Breite des Kanals und $a^2 = \beta/P$ mit β als Biegesteifigkeit des Stabes ist; x_1 und x_2 sind stetig, u ist rechtsseitig stetig und stetig in T .

Grundsätzlich kann man über das Pontrjaginsche Maximumprinzip notwendige Optimalitätsbedingungen für die Lösung von (1) formulieren. Es ist aber nicht zu erwarten, in geschlossener Darstellung daraus diese optimale Lösung berechnen zu können. Deshalb wird statt (1) die folgende linearisierte Aufgabe untersucht:

$$I(x_1, x_2, u; T) := \int_0^T \left(\frac{a^2}{2} u^2 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dt \rightarrow \text{Min!} \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_1, |x_2| \leq \alpha, x_2(0) = x_2(T) = 0.$$

Dieser Übergang ist dadurch möglich, weil

$$\max \{|x_1^*(t)| : 0 \leq t \leq T\} \rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0$$

gilt, wobei (x_1^*, x_2^*, u^*) ein optimaler Prozeß von (1) ist (vgl. [2]).

2. Das Pontrjaginsche Maximumprinzip für das linearisierte Problem

Für die Aufgabe (2) lautet die Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi_1, \xi_2, v, q_1, q_2, \lambda) = q_1 v + q_2 \xi_1 - \lambda \left(\frac{a^2}{2} v^2 - \frac{1}{2} \xi_1^2 \right).$$

Nach dem Pontrjaginschen Maximumprinzip gilt

Satz 1 [4]: Sei (x_1, x_2, u) ein optimaler Prozeß zur Aufgabe (2). Dann existieren Zahlen $\lambda_0 \geq 0$ und $l_0, l_1 \in \mathbf{R}$, zwei auf $\{t \in [0, T] \mid x_2(t) = +\alpha\}$ bzw. $\{t \in [0, T] \mid x_2(t) = -\alpha\}$ konzentrierte, nichtnegative reguläre Maße μ_1 und μ_2 sowie zwei Funktionen p_1 und p_2 derart, daß diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden und folgendes gilt:

$$a) \quad p_1(t) = -\int_0^t (p_2(\tau) + \lambda_0 x_1(\tau)) d\tau, \quad p_1(T) = 0,$$

$$p_2(t) = l_0 + \int_{(0,t)} d\mu_1 - \int_{(0,t)} d\mu_2, \quad p_2(T) = l_1;$$

$$b) \quad H(t, x_1(t), x_2(t), u(t), p_1(t), p_2(t), \lambda_0) \\ = \sup_v H(t, x_1(t), x_2(t), v, p_1(t), p_2(t), \lambda_0) \text{ f. ü. in } [0, T].$$

Wir können zeigen, daß $\lambda_0 > 0$ ist (vgl. [2]). Deshalb kann $\lambda_0 = 1$ angesetzt werden. Demzufolge haben wir nun

$$p_1(t) = -\int_0^t (p_2(\tau) + x_1(\tau)) d\tau, \quad p_1(T) = 0, \\ p_2(t) = l_0 + \int_{(0,t)} d\mu_1 - \int_{(0,t)} d\mu_2, \quad p_2(T) = l_1 \quad (3)$$

und

$$H_v(t, x_1, x_2, u, p_1, p_2, 1) = p_1(t) - a^2 u(t) = 0$$

fast überall in $[0, T]$, weil $H(t, x_1, x_2, v, p_1, p_2, 1)$ für alle t eine streng konkave Funktion in v ist. Aus der Stetigkeit von p_1 (wegen (3)), der rechtsseitigen Stetigkeit von u auf $[0, T]$ und der Stetigkeit von u in T folgt weiterhin für alle $t \in [0, T]$

$$\dot{x}_1(t) = u(t) = -\frac{1}{a^2} p_1(t) = -\frac{1}{a^2} \int_0^t (p_2(\tau) + x_1(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

Um zu zeigen, daß die Untersuchung überhaupt sinnvoll ist, geben wir noch einen Existenzsatz an.

Satz 2 [2]: Die Aufgabe 2 besitzt mindestens einen optimalen Prozeß.

3. Lösung des linearisierten Problems (2)

Zur Lösung von (2) brauchen wir das folgende Lemma, dessen Beweis sehr einfach ist (und deshalb nicht geführt wird), für die Aufgabe (1) aber sehr aufwendig ist.

Lemma 1: Sei (x_1, x_2, u) ein optimaler Prozeß zur Aufgabe (2). Dann gilt $x_1(z) = 0$ für alle $z \in [0, T]$ mit $|x_2(z)| = \alpha$.

Des weiteren benötigen wir die folgende

Definition: Sei $(\tau, \varrho) \subset (0, T)$, $|x_2(t)| = \alpha$ für alle $t \in [\tau, \varrho]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existiere ein $t' \in (\tau - \varepsilon, \tau)$ mit $|x_2(t')| < \alpha$ sowie ein $t'' \in (\varrho, \varrho + \varepsilon)$ mit $|x_2(t'')| < \alpha$. Dann heißt τ *Aufsprungstelle*, ϱ *Absprungstelle*, jedes $t \in (\tau, \varrho)$ *Verweilstelle* und (τ, ϱ) *Verweilintervall*.

3.1 Untersuchung optimaler Prozesse im Inneren des Zustandsbereiches

Wir untersuchen jetzt ein Intervall

$$(\tau_1, \tau_2) \subset (0, T) \text{ mit } |x_2(t)| < \alpha \text{ für alle } t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Da die Maße μ_1 und μ_2 auf dem Rande ($|x_2| = \alpha$) konzentriert sind, ist p_2 nach (3) in diesem Intervall konstant, d. h. wegen der linksseitigen Stetigkeit von p_2 (vgl. [4: Kap. 5]) gilt

$$p_2(t) = p_2(\tau_1 + 0) = \lim_{t \downarrow \tau_1} p_2(t) \text{ für } t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Durch Einsetzen in (2) und (4) ergibt sich für $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b}{a} \cos\left(\frac{t}{a} + c\right), \\ x_1(t) &= b \sin\left(\frac{t}{a} + c\right) - p_2(\tau_1 + 0), \\ x_2(t) &= x_2(\tau_1) - ab \left[\cos\left(\frac{t}{a} + c\right) - \cos\left(\frac{\tau_1}{a} + c\right) \right] - p_2(\tau_1 + 0)(t - \tau_1), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei b und c vom Intervall (τ_1, τ_2) abhängige Konstanten sind. Für das Zielintegral auf diesem Intervall erhalten wir durch partielle Integration unter Berücksichtigung von $\dot{x}_2 = x_1$

$$\begin{aligned} \bar{I}(x_1, x_2, u; \tau_1, \tau_2) &:= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{a^2}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} x_1^2(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} p_2(\tau_1 + 0) (x_2(\tau_2) - x_2(\tau_1)) \\ &\quad + u(\tau_2) x_1(\tau_2) - u(\tau_1) x_1(\tau_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Nun untersuchen wir vier verschiedene Lagemöglichkeiten von (τ_1, τ_2) :

Fall 1: $(\tau_1, \tau_2) = (z_j, z_{j+1})$ mit $|x_2(z_j)| = |x_2(z_{j+1})| = \alpha$. Dann haben wir entsprechend (5) für $t \in [z_j, z_{j+1}]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b_j}{a} \cos\left(\frac{t}{a} + c_j\right), \\ x_1(t) &= b_j \sin\left(\frac{t}{a} + c_j\right) - p_2(z_j + 0), \\ x_2(t) &= x_2(z_j) - ab_j \left[\cos\left(\frac{t}{a} + c_j\right) - \cos\left(\frac{z_j}{a} + c_j\right) \right] \\ &\quad - p_2(z_j + 0)(t - z_j). \end{aligned} \quad (7)$$

Nach Lemma 1 gilt $x_1(z_j) = x_1(z_{j+1}) = 0$. Folglich ist

$$b_j \sin\left(\frac{z_j}{a} + c_j\right) = b_j \sin\left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j\right) = p_2(z_j + 0).$$

Hierin muß $b_j \neq 0$ sein, sonst ist $p_2(z_j + 0) = 0$ und damit $x_2(t) = x_2(z_j) = \pm \alpha$ für alle $t \in (z_j, z_{j+1})$. Deshalb folgt

$$\sin\left(\frac{z_j}{a} + c_j\right) = \sin\left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j\right). \quad (8)$$

Diese Gleichung liefert eine Bedingung für c_j in Abhängigkeit von z_j und z_{j+1} . Wegen $x_1(z_j) = x_1(z_{j+1}) = 0$ folgt aus (6)

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = \frac{1}{2} p_2(z_j + 0) (x_2(z_{j+1}) - x_2(z_j)). \quad (9)$$

Fall 2: $(\tau_1, \tau_2) = (0, z_1)$ mit $|x_2(z_1)| = \alpha$.

Wie oben ist wegen $u(0) = 0$ (vgl. (4)), $x_1(z_1) = 0$ und $x_2(0) = 0$ für $t \in [0, z_1]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b_0}{a} \cos\left(\frac{t}{a} + c_0\right), \\ x_1(t) &= b_0 \sin\left(\frac{t}{a} + c_0\right) - p_2(0), \\ x_2(t) &= -ab_0 \cos\left(\frac{t}{a} + c_0\right) - p_2(0)t \end{aligned} \quad (10)$$

und $\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_1) = p_2(0) x_2(z_1)/2$.

Fall 3: $(\tau_1, \tau_2) = (z_m, T)$ mit $|x_2(z_m)| = \alpha$.

Dann gilt analog für $t \in [z_m, T]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b_m}{a} \cos\left(\frac{t}{a} + c_m\right), \\ x_1(t) &= b_m \sin\left(\frac{t}{a} + c_m\right) - p_2(z_m + 0), \\ x_2(t) &= x_2(z_m) - ab_m \left[\cos\left(\frac{t}{a} + c_m\right) - \cos\left(\frac{z_m}{a} + c_m\right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

und $\bar{I}(x_1, x_2, u; z_m, T) = -p_2(z_m + 0) x_2(z_m)/2$.

Fall 4: $(\tau_1, \tau_2) = (0, T)$.

Wegen $u(0) = u(T) = 0$ (vgl. (3) und (4)) und $x_2(0) = x_2(T) = 0$ folgt dann aus (6)

$$I(x_1, x_2, u; T) = \bar{I}(x_1, x_2, u; 0, T) = 0. \tag{12}$$

3.2 Abhängigkeit des optimalen Prozesses (x_1, x_2, u) von $u(z_1)$

Wir untersuchen nun die Gestalt eines optimalen Prozesses (x_1, x_2, u) in Abhängigkeit vom Wert der Steuerung an der ersten Aufsprungstelle z_1 , d. h. $|x_2(z_1)| = \alpha$ und $|x_2(t)| < \alpha$ für $t \in (0, z_1)$, natürlich unter der Voraussetzung, daß ein $z \in (0, T)$ mit $|x_2(z)| = \alpha$ existiert. Im weiteren werden sämtliche Auf- und Absprungstellen des optimalen Prozesses mit z_1, z_2, \dots, z_m bezeichnet, wobei $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_m < T$ gilt. Das folgende Lemma besagt, daß die optimale Kurve x_2 in allen Auf- und Absprungstellen den gleichen Krümmungsbetrag hat.

Lemma 2: *Es gilt $u^2(z_1) = \dots = u^2(z_m)$. Im Falle $u(z_1) \neq 0$ ist jede Aufsprungstelle zugleich eine Absprungstelle.*

Beweis: Falls $u(z_j) \neq 0$ für ein $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ist, muß z_j sowohl Auf- als auch Absprungstelle sein. Deshalb gilt

$$|x_2(t)| < \alpha \quad \text{für} \quad \begin{cases} t \in (z_{j-1}, z_j), \text{ falls } j \geq 2 \\ t \in (z_j, z_{j+1}), \text{ falls } j \leq m - 1. \end{cases}$$

Also genügen (z_{j-1}, z_j) und (z_j, z_{j+1}) Fall 1 und es folgt aus (8)

$$\cos^2\left(\frac{z_{j-1}}{a} + c_{j-1}\right) = \cos^2\left(\frac{z_j}{a} + c_{j-1}\right)$$

und

$$\cos^2\left(\frac{z_j}{a} + c_j\right) = \cos^2\left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j\right).$$

Wegen (7) gilt weiterhin $u^2(z_{j-1}) = u^2(z_j) = u^2(z_{j+1})$. Folglich sind $u(z_{j-1})$ (falls $j \geq 2$) und $u(z_{j+1})$ (falls $j \leq m - 1$) ungleich Null. Deshalb kann die Untersuchung auf gleiche Weise in beiden Richtungen bis $j = 2$ und $j = m - 1$ fortgesetzt werden. Dadurch entsteht $u^2(z_1) = \dots = u^2(z_m) \neq 0$, und jedes z_1, \dots, z_m ist sowohl Auf- als auch Absprungstelle. Ist dagegen $u(z_1) = \dots = u(z_m) = 0$, so gilt offensichtlich $u^2(z_1) = \dots = u^2(z_m) = 0$ ■

3.2.1 Der Fall $u(z_1) = 0$

Wir untersuchen zuerst ein beliebiges Intervall (z_j, z_{j+1}) von Fall 1. Da nach Lemma 2 $u(z_j) = u(z_{j+1}) = 0$ ist, so folgt aus (7)

$$\cos\left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j\right) = \cos\left(\frac{z_j}{a} + c_j\right) \quad \text{und} \quad p_2(z_j + 0) = -\frac{x_2(z_{j+1}) - x_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \tag{13}$$

und aus (8) und (9) weiterhin

$$z_{j+1} - z_j = 2ka\pi,$$

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\frac{1}{4ka\pi} (x_2(z_{j+1}) - x_2(z_j))^2.$$

Hierin ist $x_2(z_j) = -x_2(z_{j+1})$ und $k = 1$ zu zeigen:

a) Bei $x_2(z_j) \neq -x_2(z_{j+1})$, also $x_2(z_j) = x_2(z_{j+1})$, wäre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ mit

$$\bar{x}_2(t) = \begin{cases} x_2(t), & t \in [0, z_j] \\ x_2(z_j) - \frac{x_2(z_j)}{ka\pi} \left[a \cos \left(\frac{t - z_j}{a} + \frac{\pi}{2} \right) - (t - z_j) \right], & t \in (z_j, z_{j+1}] \\ -x_2(t), & t \in (z_{j+1}, T] \end{cases}$$

$(\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \bar{u} = \bar{u}_1)$ zulässig bez. der Aufgabe (2) und sogar besser als (x_1, x_2, u) , denn es gilt nach der Konstruktion, (9) und (13)

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_j) = \bar{I}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; 0, z_j),$$

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_{j+1}, T) = \bar{I}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; z_{j+1}, T),$$

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = 0, \bar{I}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; z_j, z_{j+1}) = -\alpha^2/ka\pi < 0$$

und damit $I(x_1, x_2, u; T) > I(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; T)$, im Widerspruch zur Optimalitätsvoraussetzung von (x_1, x_2, u) . Also muß $x_2(z_j) = -x_2(z_{j+1})$ und damit $I(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\alpha^2/ka\pi$ sein.

b) Bei $k > 1$ wäre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ mit

$$\bar{x}_2(t) = \begin{cases} x_2(t), & t \in [0, z_j] \\ \bar{x}_2(z_{ji}) - \frac{\bar{x}_2(z_{ji})}{a\pi} \left[a \cos \left(\frac{t - z_{ji}}{a} + \frac{\pi}{2} \right) - (t - z_{ji}) \right], & t \in (z_{ji}, z_{j+1}], \\ |x_2(t)| = |x_2(t)| & t \in (z_{j+1}, T], \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, k, \\ j = 1, \dots, k, \end{matrix}$$

wobei $z_{j1} := z_j, z_{jk+1} := z_{j+1}, z_{ji+1} - z_{ji} = 2a\pi$ und $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \bar{u} = \bar{u}_1$ ist, ein besserer Prozeß. Analog wie oben kann man

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\frac{\alpha^2}{ka\pi}, \quad \bar{I}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; z_j, z_{j+1}) = -\frac{k\alpha^2}{a\pi}$$

und damit $I(x_1, x_2, u; T) > I(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}; T)$ zeigen, im Widerspruch zur Optimalitätsvoraussetzung von (x_1, x_2, u) . Also muß $k = 1$, damit $z_{j+1} - z_j = 2a\pi$ und $\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\alpha^2/a\pi$ sein.

Analog wie im Intervall (z_j, z_{j+1}) läßt sich

$$z_1 = a\pi, x_2(t) = \frac{x_2(z_1)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t}{a} + t \right) \quad \text{für } t \in [0, z_1]$$

und $\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_1) = -\alpha^2/2a\pi$ sowie

$$z_m = T - a\pi, x_2(t) = -\frac{x_2(z_m)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t - T}{a} + t - T \right) \quad \text{für } t \in [z_m, T]$$

und $\bar{I}(x_1, x_2, u; z_m, T) = -\alpha^2/2a\pi$ zeigen. Damit haben wir

Lemma 3: Sei (x_1, x_2, u) ein optimaler Prozeß zur Aufgabe (2) mit $u(z_1) = 0$ und

$$|x_2(z_1)| = |x_2(z_j)| = |x_2(z_{j+1})| = |x_2(z_m)| = \alpha,$$

$$|x_2(t)| < \alpha \quad \text{für } t \in [0, z_1) \cup (z_j, z_{j+1}) \cup (z_m, T].$$

Dann gilt

$$z_1 = T - z_m = \frac{1}{2} (z_{j+1} - z_j) = a\pi,$$

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_1) = \bar{I}(x_1, x_2, u; z_m, T) = \frac{1}{2} \bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\frac{\alpha^2}{2a\pi}$$

und

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{x_2(z_1)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t}{a} + t \right) & \text{für } t \in [0, z_1], \\ -\frac{x_2(z_m)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t-T}{a} + t - T \right) & \text{für } t \in [z_m, T], \end{cases}$$

$$x_1(t) = \dot{x}_2(t) \text{ und } u(t) = \dot{x}_1(t) \text{ für } t \in [0, T].$$

Folgerung 1: Die Anzahl der Aufsprungstellen des optimalen Prozesses (x_1, x_2, u) mit $u(z_1) = 0$ (und $T \geq 2a\pi$) ist gleich $[T/2a\pi]$ ($[y]$ – ganzer Teil von y) und es gilt $\bar{I}(x_1, x_2, u; T) = -(\alpha^2/a\pi) [T/2a\pi]$.

Beweis: Auf jedem Verweilintervall ist das Zielintegral gleich Null, während es auf jedem Intervall (z_j, z_{j+1}) von Fall 1 gleich $-\alpha^2/a\pi < 0$ ist. Deshalb muß die Anzahl der Aufsprungstellen möglichst groß sein. Wegen $z_1 + (T - z_m) = z_{j+1} - z_j = 2a\pi$ ist $[T/2a\pi]$ eine obere Schranke für diese Anzahl, die auch angenommen werden kann. Deshalb ist die Anzahl der Aufsprungstellen gleich $[T/2a\pi]$. Die zweite Behauptung folgt direkt aus der ersten und Lemma 3 ■

3.2.2 Der Fall $u(z_1) \neq 0$

Nach Lemma 2 muß jede Auf- zugleich eine Absprungstelle, d. h.

$$|x_2(z_1)| = \dots = |x_2(z_m)| = \alpha, |x_2(t)| < \alpha \text{ für } t \in [0, z_1) \cup (z_1, z_2) \cup \dots \cup (z_m, T]$$

sein. Also entsprechen alle Intervalle $(z_1, z_2), \dots, (z_{m-1}, z_m)$ Fall 1, $(0, z_1)$ Fall 2 und (z_m, T) Fall 3.

Lemma 4: (x_1, x_2, u) sei ein optimaler Prozeß zur Aufgabe (2) mit $u(z_1) \neq 0$, wobei z_1 die erste Aufsprungstelle ist. Dann gilt für $j = 1, \dots, m - 1$

a) $x_2(z_{j+1}) = -x_2(z_j)$ und $u(z_{j+1}) = -u(z_j)$,

b) $z_1 = T - z_m = (z_{j+1} - z_j)/2$,

c) $\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_1) = \bar{I}(x_1, x_2, u; z_m, T)$

$$= \frac{1}{2} \bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\frac{1}{2z_1} (\alpha^2 + a^2 x_2(z_1) u(z_1)).$$

Beweis: a) Wäre $x_2(z_{j+1}) = x_2(z_j)$, dann könnte man wegen $u(z_j) u(z_{j+1}) > 0$ und Lemma 2 $u(z_j) = u(z_{j+1})$ und damit wegen (7)

$$\cos \left(\frac{z_j}{a} + c_j \right) = \cos \left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j \right) \text{ und } p_2(z_j + 0) = 0$$

zeigen. Aus $x_1(z_j) = x_1(z_{j+1}) = 0$ (vgl. Lemma 1) und (7) folgt

$$\sin \left(\frac{z_j}{a} + c_j \right) = \sin \left(\frac{z_{j+1}}{a} + c_j \right) = 0.$$

Folglich ist $z_{j+1} - z_j = 2k\pi$ für $k \geq 1$. Dann ist der in Abschnitt 3.2.1 definierte Prozeß $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ noch besser als (x_1, x_2, u) ; im Widerspruch zur Optimalitätsvoraus-

setzung von (x_1, x_2, u) . Also muß $x_2(z_{j+1}) = -x_2(z_j)$ und folglich $u(z_{j+1}) = -u(z_j)$ sein.

b) Aus $u(z_{j+1}) = -u(z_j)$, (7) und (8) folgt

$$c_j = -\frac{z_j + z_{j+1}}{2a} + k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \geq 0. \quad (14)$$

Durch Einsetzen in (7) entsteht

$$u(z_j) = -\frac{b_j}{a} \sin\left(-\frac{z_{j+1} - z_j}{2a} + k\pi\right), \quad (15)$$

$$p_2(z_j + 0) = b_j \cos\left(-\frac{z_{j+1} - z_j}{2a} + k\pi\right).$$

Weil $u(z_j) \neq 0$ ist, gilt

$$\frac{p_2(z_j + 0)}{u(z_j)} = a \cot \frac{z_{j+1} - z_j}{2a}. \quad (16)$$

Andererseits folgt aus (7) und Teil a) dieses Lemmas

$$p_2(z_j + 0) = \frac{2(x_2(z_j) + a^2 u(z_j))}{z_{j+1} - z_j}. \quad (17)$$

Dadurch haben wir $\frac{z_{j+1} - z_j}{2a} \cot \frac{z_{j+1} - z_j}{2a} = \frac{x_2(z_j)}{a^2 u(z_j)} + 1$. Das bedeutet nach a) für $j = 1, \dots, m-1$

$$\frac{z_{j+1} - z_j}{2a} \cot \frac{z_{j+1} - z_j}{2a} = \frac{x_2(z_1)}{a^2 u(z_1)} + 1. \quad (18)$$

Weiterhin muß $0 < z_{j+1} - z_j < 2a\pi$ für $j = 1, \dots, m-1$ sein, sonst existiert noch ein besserer Prozeß $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{u})$ mit

$$\hat{x}_2(t) = \begin{cases} x_2(t), & t \in [0, z_1] \\ x_2(z_1) - \frac{x_2(z_1)}{a\pi} \left[a \cos\left(\frac{t - z_1}{a} + \frac{\pi}{2}\right) - (t - z_1) \right], & t \in (z_1, z_1 + 2a\pi] \\ x_2(x_{i+1}), & t \in (z_i + 2a\pi, z_{i+1}] \\ x_2(t), & t \in (z_{i+1}, T], \end{cases}$$

wenn $z_{i+1} - z_i > 2a\pi$ für ein $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ist ($z_{i+1} - z_i = 2a\pi$ tritt wegen (15) und $u(z_1) \neq 0$ nicht ein). Weil die Gleichung

$$\frac{z}{2a} \cot \frac{z}{2a} = \frac{x_2(z_1)}{a^2 u(z_1)} + 1$$

im Intervall $(0, 2a\pi)$ genau eine Lösung \bar{z} besitzt, $(z_{j+1} - z_j) \in (0, 2a\pi)$ und nach (18) Lösung dieser Gleichung ist, gilt nun $z_{j+1} - z_j = \bar{z}$ für $j = 1, \dots, m-1$. Analog kann man

$$\frac{z_1}{a} \cot \frac{z_1}{a} = \frac{T - z_m}{a} \cot \frac{T - z_m}{a} = \frac{x_2(z_1)}{a^2 u(z_1)} + 1, \quad (19)$$

$$z_1, (T - z_m) \in (0, a\pi)$$

zeigen, woraus $z_1 = T - z_m = \bar{z}/2$ folgt.

c) Aus (9), (17), a) und b) folgt für $j = 1, \dots, m - 1$

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; z_j, z_{j+1}) = -\frac{1}{z_1} (\alpha^2 + a^2 u(z_1) x_2(z_1)).$$

Analog kann man anhand (10) und (11) zeigen

$$\bar{I}(x_1, x_2, u; 0, z_1) = \bar{I}(x_1, x_2, u; z_m, T) = -\frac{(\alpha^2 + a^2 u(z_1) x_2(z_1))}{2z_1} \blacksquare$$

Folgerung 2: Bei $u(z_1) \neq 0$ hat der optimale Prozeß (x_1, x_2, u) genau $T/2z_1$ Aufsprungstellen und es gilt

$$I(x_1, x_2, u; T) = -\frac{T\alpha^2}{2az_1} \frac{\cos \frac{z_1}{a}}{\frac{z_1}{a} \cos \frac{z_1}{a} - \sin \frac{z_1}{a}}.$$

Zum Nachweis benutze man die Lemmata 2 und 4 sowie (19).

Folgerung 3: Es ist $a\pi/2 \leq z_1 < a\pi$.

Beweis: Damit (x_1, x_2, u) optimal ist, muß $I(x_1, x_2, u; T) \leq 0$ sein, weil für den Prozeß (x_1', x_2', u') mit $x_1' = x_2' = u' = 0$ gilt $I(x_1', x_2', u'; T) = 0$. Im Falle $\cos(z_1/a) \neq 0$ ergibt Folgerung 2 dann

$$I(x_1, x_2, u; T) = -\frac{T\alpha^2}{2az_1} \left/ \left(\frac{z_1}{a} - \tan \frac{z_1}{a} \right) \right.$$

Also muß $z_1/a > \tan(z_1/a)$ und wegen (19) $a\pi/2 < z_1 < a\pi$ sein. Im Falle $\cos(z_1/a) = 0$ folgt unmittelbar aus (19) $z_1 = a\pi/2$ ■

Im folgenden Lemma wird die exakte Darstellung eines optimalen Prozesses angegeben, und wir werden sehen, daß die Struktur dieses Prozesses nur noch von z_1 und $x_2(z_1)$ abhängt.

Lemma 5: Jeder optimale Prozeß (x_1, x_2, u) zur Aufgabe (2) mit $u(z_1) \neq 0$ muß die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} u(t) &= \dot{x}_1(t) \text{ und } x_1(t) = \dot{x}_2(t), \\ x_2(t) &= (-1)^{j-1} \\ &\times \left\{ x_2(z_1) + B \left[a \left(\sin \frac{t - 2jz_1}{a} + \sin \frac{z_1}{a} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - (t - (2j - 1)z_1) \cos \frac{z_1}{a} \right] \right\} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{für } t \in \begin{cases} [(2j - 1)z_1, (2j + 1)z_1], & j = 1, 2, \dots, m - 1, \\ [0, z_1], & j = 0 \\ [(2m - 1)z_1, T], & j = m \end{cases}$$

$$\text{mit } B = x_2(z_1) \left/ \left(z_1 \cos \frac{z_1}{a} - a \sin \frac{z_1}{a} \right) \text{ und } m = \frac{T}{2z_1} \right.$$

Beweis: Anhand von (7), (14), (16), (19) und Lemma 4 kann man z_j, c_j, b_j und $p_2(z_j + 0)$ berechnen und dann in (7) einsetzen. Dadurch wird die Behauptung für $t \in [(2j - 1)z_1, (2j + 1)z_1]$ mit $j = 1, \dots, m - 1$ gezeigt. Die übrige Behauptung kann man ähnlich unter Anwendung von (10) und (11) beweisen ■

3.3 Bestimmung des optimalen Prozesses

Zuerst sei $T < a\pi$. Nach Lemma 4 und Folgerung 3 müßte $T \geq a\pi$ sein, falls es eine Aufsprungstelle gäbe. Deshalb existiert bei $T < a\pi$ keine Auf- und Absprungstelle. Anhand (5), $u(0) = u(T) = 0$ (vgl. (3) und (4)) und $x_2(0) = x_2(T) = 0$ kann man dann $b = 0$ und $p_2(0) = 0$ zeigen. Durch Einsetzen in (5) ergibt sich, daß (x_1, x_2, u) mit $x_1 = x_2 = u = 0$ der einzige Prozeß ist, der optimal sein kann. Nach Satz 2 ist er auch tatsächlich optimal.

Es sei nun $T = a\pi$. Hierbei kann der Fall $u(z_1) = 0$ wegen Lemma 3 nicht auftreten. Deshalb kann ein optimaler Prozeß nur die Form (5) für alle $t \in [0, T]$ oder (20) mit $z_1 = a\pi/2$ und $m = 1$ haben. Der Wert des Zielintegrals aller Prozesse der Form (5) für alle $t \in [0, T]$ ist wegen (12) gleich Null. Für den Prozeß der Form (20) ist dieser Wert wegen Folgerung 2 ebenso gleich Null. Nach Satz 2 sind deshalb alle solchen Prozesse optimal. Sie haben die gleiche Darstellung.

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 3: Für $T < a\pi$ hat die Aufgabe (2) genau einen optimalen Prozeß (x_1, x_2, u) , nämlich mit $x_1 = x_2 = u = 0$. Für $T = a\pi$ ist ein Prozeß genau dann optimal, wenn er die Form $x_2(t) = -ab \sin(t/a), x_1 = \dot{x}_2, u = \dot{x}_1, |b| \leq |a|$ hat.

Wir gehen nun zum Fall $T > a\pi$ über. Dann existiert immer ein Prozeß (x_1, x_2, u) der Form (20) mit $a\pi/2 < z_1 < a\pi$. Nach Folgerung 2 gilt $I(x_1, x_2, u; T) < 0$. Deshalb muß jeder optimale Prozeß eine Aufsprungstelle haben, sonst entspräche er Fall 4 und nach (12) wäre der Wert des Zielintegrals gleich Null. Man kann zeigen, daß jeder optimale Prozeß zu einer der beiden folgenden Klassen gehören muß:

- (P₀) Prozesse (x_{10}, x_{20}, u_0) mit $u_0(z_1) = 0$ und $T \neq 2ka\pi$.
- (P) Prozesse (x_{1m}, x_{2m}, u_m) der Form (20) mit $a\pi/2 \leq z_1 \leq a\pi$, die durch die Anzahl m ihrer Aufsprungstellen (bis auf Spiegelung an der t -Achse) eindeutig festgelegt und markiert sind.

Zu beachten ist, daß für einen Prozeß (x_{1m}, x_{2m}, u_m) aus P mit $z_1 = a\pi$ gilt $u(z_1) = 0$.

Nach Folgerungen 1 und 2 gilt für Prozesse (x_{1m}, x_{2m}, u_m) aus P

$$z_1 = \frac{T}{2m},$$

$$I(x_{1m}, x_{2m}, u_m; T) = -\frac{T\alpha^2}{2a} \cos \frac{z_1}{a} / z_1 \left(\frac{z_1}{a} \cos \frac{z_1}{a} - \sin \frac{z_1}{a} \right), \tag{21}$$

weshalb wir zum Vergleich verschiedener Prozesse die Funktion

$$E(t) = -\frac{T\alpha^2}{2a} \cos \frac{t}{a} / t \left(\frac{t}{a} \cos \frac{t}{a} - \sin \frac{t}{a} \right)$$

anwenden werden, für die offensichtlich $I(x_{1m}, x_{2m}, u_m; T) = E(z_1)$ gilt. Ferner definieren wir die Hilfsgrößen

$$z^* \in \left[\frac{a\pi}{2}, a\pi \right] : \frac{1}{2} \sin \frac{2z^*}{a} - \frac{z^*}{a} \cos \frac{2z^*}{a} = 0,$$

$$m_1 = \left[\frac{T}{2z^*} \right], \bar{z} = \frac{T}{2m_1} \quad \text{und} \quad m_2 = m_1 + 1, z = \frac{T}{2m_2}$$

([y] — ganzer Teil von y; $z < z^* < \bar{z}$ und $z^* \approx 0,7151468a\pi$).

Lemma 6: E ist in $[a\pi/2, z^*]$ streng monoton fallend, in $[z^*, a\pi]$ streng monoton wachsend und z^* ist die absolute Minimalstelle von E innerhalb $[a\pi/2, a\pi]$.

Lemma 7: Wenn ein Prozeß (x_{10}, x_{20}, u_0) aus P_0 optimal ist, so muß $\bar{z} > a\pi$ sein.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Wegen $z < z^* < \bar{z}$ ist dann $z^* \leq \bar{z} \leq a\pi$ und für den Prozeß $(x_{1m_1}, x_{2m_1}, u_{m_1})$ gilt wegen (21) und Lemma 6 $I(x_{1m_1}, x_{2m_1}, u_{m_1}; T) = E(\bar{z}) \leq E(a\pi)$. Ferner, nach Definition der Funktion E gilt wegen $T \neq 2ka\pi$

$$E(a\pi) = -\frac{\alpha^2}{a\pi} \frac{T'}{2a\pi} < -\frac{\alpha^2}{a\pi} \left[\frac{T}{2a\pi} \right],$$

deshalb nach Folgerung 1 $I(x_{1m_1}, x_{2m_1}, u_{m_1}; T) \leq E(a\pi) < I(x_{10}, x_{20}, u_0; T)$, im Widerspruch zur Optimalität von (x_{10}, x_{20}, u_0) ■

Lemma 8: Wenn ein Prozeß (x_{10}, x_{20}, u_0) aus P_0 optimal ist, so hat er genau eine Aufsprungstelle $z_1 = a\pi$ und genau eine Absprungstelle $z_2 = T - a\pi$ und es gilt $I(x_{10}, x_{20}, u_0; T) = -\alpha^2/a\pi$.

Beweis: Nach Lemma 7 ist $\bar{z} > a\pi$ und deshalb

$$T > 2m_1 a\pi = 2a\pi \left[\frac{T}{2z^*} \right] > 2a\pi \left(\frac{T}{2z^*} - 1 \right), \text{ d. h. } T < \frac{2a\pi}{\frac{a\pi}{z^*} - 1} < 5,1a\pi.$$

Im Falle $4a\pi \leq T < 5,1a\pi$ gilt nach Folgerung 1 $I(x_{10}, x_{20}, u_0; T) = -2\alpha^2/a\pi$ und aus (21), der Definition von E und Lemma 6 folgt $I(x_{13}, x_{23}, u_3; T) < -24\alpha^2/a\pi$, im Widerspruch zur Optimalität von (x_{10}, x_{20}, u_0) . Also muß $T < 4a\pi$ sein. Nach Folgerung 1 gilt nun die Behauptung des Lemmas ■

Dieses Lemma besagt, daß (z_1, z_2) das einzige Verweilintervall eines optimalen Prozesses aus P_0 ist. Also hat jeder solche Prozeß nach Lemma 3 die Form

$$x_{20}(t) = \begin{cases} \frac{x_{20}(a\pi)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t}{a} + t \right), & t \in [0, a\pi] \\ x_{20}(a\pi), & t \in [a\pi, T - a\pi] \\ -\frac{x_{20}(a\pi)}{a\pi} \left(a \sin \frac{t - T}{a} + t - T \right), & t \in [T - a\pi, T], \end{cases} \quad (22)$$

$$|x_2(a\pi)| = \alpha, \quad x_{10} = \dot{x}_{20} \quad \text{und} \quad u_0 = \dot{x}_{10}.$$

Lemma 9: Wenn ein Prozeß $(x_{1m}, x_{2m}; u_m)$ aus P optimal ist, so muß $m = m_1$ oder $m = m_2$ sein.

Beweis: Wegen $m_2 = m_1 + 1$ kann $m \neq m_1$ und $m \neq m_2$ nur bei $m > m_2$ oder $m < m_1$ sein. Bei $m > m_2$ gilt wegen (21) und Folgerung 3 $a\pi/2 \leq z_1 < z$ und demzufolge ergibt sich aus Lemma 6 $I(x_{1m}, x_{2m}, u_m; T) = E(z_1) > I(x_{1m_1}, x_{2m_1}, u_{m_1}; T)$, im Widerspruch zur Optimalität von (x_{1m}, x_{2m}, u_m) . Analog, bei $m < m_1$ ist $I(x_{1m}, x_{2m}, u_m; T) > I(x_{1m_1}, x_{2m_1}, u_{m_1}; T)$, ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung ■

Nun wenden wir die Lemmata 7–9 zur Bestimmung der optimalen Prozesse an. Dabei wird die folgende Konstante T_1 benutzt:

$$T_1 \in (2a\pi, 4a\pi) \text{ mit } \tan \frac{T_1}{4a} - \frac{T_1}{4a} + 2\pi = 0 \quad (T_1 \approx 2,278814a\pi). \quad (23)$$

Im weiteren werden zwei bez. der t -Achse symmetrische Prozesse identifiziert, weil die entsprechenden Werte des Zielintegrals gleich sind. In diesem Sinne sind die Wörter „einzige“ und „genau“ zu verstehen.

Satz 4: Bei

- a) $T \in (a\pi, 2a\pi]$ ist (x_{11}, x_{21}, u_1) aus \mathbf{P} der einzige optimale Prozeß der Aufgabe (2),
- b) $T \in (2a\pi, T_1)$ ist (x_{10}, x_{20}, u_0) mit (22) der einzige optimale Prozeß der Aufgabe (2),
- c) $T > T_1$ ist (x_{10}, x_{20}, u_0) nicht optimal.

Beweis: a): Ist ein Prozeß (x_{10}, x_{20}, u_0) aus \mathbf{P}_0 optimal, so gilt wegen $T \neq 2ka\pi$ und $z_1 = T - z_2 = a\pi$ die Ungleichung $T > 2a\pi$. Deshalb muß für $T \in (a\pi, 2a\pi]$ jeder optimale Prozeß aus \mathbf{P} sein, etwa (x_{1m}, x_{2m}, u_m) . Wegen $m = T/2z_1$ und $a\pi/2 \leq z_1 \leq a\pi$ muß $m = 1$ sein (m könnte für $T = 2a\pi$ gleich 2 sein, aber wegen $I(x_{12}, x_{22}, u_2; 2a\pi) = 0$ ist (x_{12}, x_{22}, u_2) nicht optimal.)

b) und c): Nach Folgerung 3 und Lemma 9 kann bei $T \in (2a\pi, T_1)$ nur (x_{10}, x_{20}, u_0) oder (x_{12}, x_{22}, u_2) optimal sein. Aus

$$\frac{\partial I(x_{12}, x_{22}, u_2; T)}{\partial T} < 0 \text{ und } I(x_{12}, x_{22}, u_2; T_1) = I(x_{10}, x_{20}, u_0; T_1)$$

folgt

$$I(x_{12}, x_{22}, u_2; T) \begin{cases} > I(x_{10}, x_{20}, u_0; T) & \text{für } T \in (2a\pi, T_1) \\ < I(x_{10}, x_{20}, u_0; T) & \text{für } T > T_1. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Behauptungen ■

Satz 5: Für $T > T_1$ hat die Aufgabe (2) genau einen oder genau zwei optimale Prozesse, nämlich (x_{1m}, x_{2m}, u_m) oder (x_{1m}, x_{2m}, u_m) . Bei $\bar{z} > a\pi$ ist (x_{1m}, x_{2m}, u_m) und bei $\bar{z} < a\pi/2$ ist (x_{1m}, x_{2m}, u_m) der einzige optimale Prozeß.

Zum Beweis dieses Satzes werden Folgerung 3, Lemma 9 und Satz 4 angewandt ■

Zur Abrundung der Theorie wollen wir noch einen Satz unter Verweis auf [2] angeben. Dabei werden die wie folgt eindeutig definierten Größen benutzt:

$$T_2 \in (3a\pi, 4a\pi), \quad T_j \in (2jz^*, 2(j+1)z^*) \text{ für } j = 3, 4, \dots,$$

$$G_k(T_k) = 0 \text{ für } k = 2, 3, \dots,$$

$$G_k(T) := k \left(\frac{T}{2a(k+1)} - \tan \frac{T}{2a(k+1)} \right) - (k+1) \left(\frac{T}{2ak} - \tan \frac{T}{2ak} \right).$$

Satz 6: Sei $k \geq 1$. Bei $T \in (T_k, T_{k+1})$ ist $(x_{1k+1}, x_{2k+1}, u_{k+1})$ der einzige optimale Prozeß von (2) und bei $T = T_{k+1}$ hat (2) genau zwei optimale Prozesse, nämlich $(x_{1k+1}, x_{2k+1}, u_{k+1})$ und $(x_{1k+2}, x_{2k+2}, u_{k+2})$.

Beispiele

1. $T = 2,2a\pi$: Wegen $2,2a\pi \in (2a\pi, T_1)$ ist (x_{10}, x_{20}, u_0) nach Satz 4 der einzige optimale Prozeß von (2) (vgl. Abb. 1).

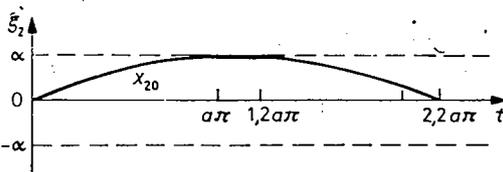


Abb. 1

2. $T = T_2$: Nach Satz 6 hat die Aufgabe (2) genau zwei optimale Prozesse, nämlich (x_{12}, x_{22}, u_2) und (x_{12}, x_{23}, u_3) (vgl. (22) und Abb. 2).

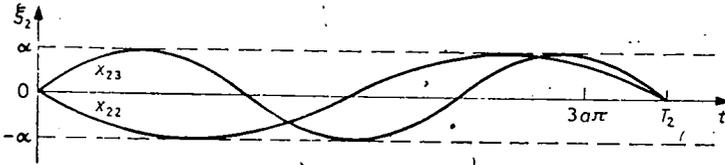


Abb. 2

3. $T = 7,7a\pi$: Hier gilt $T > T_1$, $m_1 = 5$ und $m_2 = 6$. Deshalb können nach Satz 5 nur (x_{15}, x_{25}, u_5) oder (x_{16}, x_{26}, u_6) , optimal sein.

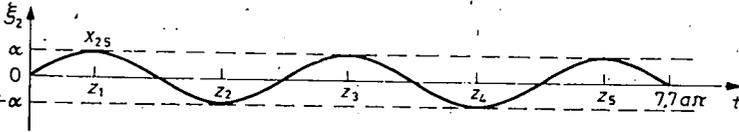


Abb. 3

Wegen

$$I(x_{15}, x_{25}, u_5; T) \approx -1,51 \frac{\alpha^2}{a} < -1,46 \frac{\alpha^2}{a} \approx I(x_{16}, x_{26}, u_6; T)$$

ist (x_{15}, x_{25}, u_5) der einzige optimale Prozeß von (2) (vgl. Abb. 3).

4. Diskussion

Damit die Ergebnisse besser interpretiert werden können, betrachten wir nun die Länge T des Stabes als fest vorgegeben und die belastende Kraft P als variabel. Entsprechend T_k sei $P_k = T_k^2 \beta / a^2 T^2$ ($k = 1, 2, \dots$). Nun besagen die oben erreichten Ergebnisse, daß im Falle

- a) $P < \beta \pi^2 / T^2$ (d. h. $T < a\pi$) der Knickstab auf der Achse des Kanals liegen bleibt.
- b) $P = \beta \pi^2 / T^2$ jede Kurve der Form $x_2(t) = -ab \sin(t/a)$, $t \in [0, T]$, und $|b| \leq \alpha/a$ eine stabile Lage des Knickstabes ist.
- c) $P \in (\beta \pi^2 / T^2, 4\beta \pi^2 / T^2]$ (d. h. $T \in (a\pi, 2a\pi]$) der Knickstab die Form von x_{21} und dabei nur einen Berührungspunkt mit dem Kanalrand besitzt.
- d) $P \in (4\beta \pi^2 / T^2, P_1)$ der Stab eine stabile Lage hat, nämlich x_{20} . Dabei gibt es einen Stababschnitt, der am Rand des Kanals anliegt. Die Länge dieses Abschnittes ist gleich $T - 2\sqrt{\beta/P} \pi$.
- e) $P = P_1$ der Stab genau zwei stabile Lagen hat, nämlich x_{20} und x_{22} .
- f) $P \in (P_{k-1}, P_k)$ ($k = 2, 3, \dots$) x_{2k} die einzige stabile Lage des Stabes ist. Dabei hat er k Berührungsstellen mit dem Kanalrand. Obwohl sich die Form des Stabes bei zunehmender Kraft ändert, bleibt die Anzahl der Berührungsstellen erhalten.
- g) $P = P_k$ ($k = 2, 3, \dots$) der Stab genau zwei stabile Lagen hat, nämlich x_{2k} und x_{2k+1} .

Schließlich wollen wir noch ein wenig auf andere einschlägige Arbeiten eingehen. E. HÖLDER [3] hatte im Prinzip eine notwendige Bedingung für den Übergang des Knickstabes von der geradlinigen Form zu einer anderen Form gefunden, jedoch noch nicht gezeigt, daß $T = a\pi$ sein muß. Als Anwendung der Lösungsverzweigung bei Variationsgleichungen betrachtete E. MIERSEMANN [7] das Knickstabproblem. Dabei ging es um relativ stabile Lagen für $T \in [2a\pi, 4a\pi]$. Für ein solches T zeigte er, daß (x_{10}, x_{20}, u_0) ein lokal optimaler Prozeß, d. h. x_{20} eine relativ stabile Lage des Stabes ist. H. LINK [5] stellte unter Ausnutzung einiger notwendiger Optimalitätsbedingungen mögliche Lagen des Knickstabes ebenfalls für $T \in [2a\pi, 4a\pi]$ zusammen. Einige der von ihm angegebenen Lösungen ergeben keine stabile Lage. M. SCHREITER [8] hatte unter Anwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips für $T \in [0, 4a\pi]$ stabile Lagen des

Knickstabes gefunden, jedoch mit ungenügender Begründung. Wir haben in dieser Arbeit für alle T optimale Prozesse von (2) erreicht, die stabilen Lagen des Knickstabes entsprechen.

Für den Anwender dürfte die physikalische Interpretation von p_2 von großem Interesse sein. Diese Größe gibt an, wie groß die vom Knickstab auf die Wand des Kanals ausgeübte Kraft ist. Zur Verdeutlichung betrachten wir einen optimalen Prozeß $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ des nichtlinearisierten Problems (1) (d. h. dieser Prozeß entspricht einer realen stabilen Lage des Knickstabes), und zwar im letzten Abschnitt $[z, T]$:

$$|\bar{x}_2(z)| = \alpha \quad \text{und} \quad |\bar{x}_2(t)| < \alpha \quad \text{für} \quad t \in (z, T).$$

In einer stabilen Lage muß das Momentengleichgewicht gelten. Daraus folgt

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{a^2} \bar{x}_2(t) + \frac{F(z)}{\beta} \int_z^T \cos \bar{x}_1(\tau) d\tau,$$

wobei $F(z)$ der Betrag derjenigen Kraft ist, die vom Knickstab auf die Kanalwand an der Stelle $t = z$ ausgeübt wird. Andererseits ergibt sich durch Anwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips auf das Problem (1)

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{a^2} \bar{x}_2(t) + p_2(z + 0) \int_z^T \cos \bar{x}_1(\tau) d\tau.$$

Also muß $p_2(z + 0) = F(z)/\beta$ gelten. Hieraus können wir ganz deutlich die physikalische Bedeutung von p_2 ablesen.

LITERATUR

- [1] FUNK, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in der Physik und Technik. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1962.
- [2] HOÀNG XUÂN PHÚ: Methoden zur Lösung von Aufgaben der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.
- [3] HÖLDER, E.: Stabknickung als funktionale Verzweigung und Stabilitätsproblem. Dt. Luftfahrtforsch. (1940), 1799—1819.
- [4] IOFFE, A. D., und V. M. TICHOMIROV: Theorie der Extremalaufgaben. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.
- [5] LINK, H.: Über den geraden Knickstab mit begrenzter Durchbiegung. Ing.-Archiv 22 (1954), 237—250.
- [6] MARGUERRE, K.: Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. ZAMM 18 (1938), 73—75.
- [7] MIERSEMANN, E.: Zur Lösungsverzweigung bei Variationsgleichungen mit einer Anwendung auf den Knickstab mit begrenzter Durchbiegung. Math. Nachr. 102 (1981), 7—15.
- [8] SCHREITER, M.: Zur Knickstabilität des Stabes mit begrenzter Ausbiegung und verwandte Steuerprobleme. Diplomarbeit. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1975.

Manuskripteingang: 18. 06. 1985

VERFASSER:

Dr. HOÀNG XUÂN PHÚ

Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität

Karl-Marx-Platz, DDR-7010 Leipzig

Zukünftig: Institute of Mathematics (Viện toán học)

P. O. Box 631 Bo Ho

Hanoi, Vietnam