Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (5) 1987, S. 385–407

Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei hyperbolischen Differentialgleichungssytemen in statischen Raum-Zeiten[1])

R. Illge

Die bekannten notwendigen Bedingungen für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei der selbstadjungierten skalaren Wellengleichung, den Maxwellschen Gleichungen und der Weyl-Gleichung werden in statischen Raum-Zeiten mit Hilfe des Spinorkalküls ausgewertet. Ein Ergebnis ist, daß in Riemannschen Räumen, deren metrischer Tensor statisch und deren Weyl-Spinor vom Petrov-Typ D ist, das Huygenssche Prinzip nicht gilt. Genügen zwei der drei betrachteten Gleichungstypen dem Huygensschen Prinzip in einer statischen Raum-Zeit, so verschwindet deren Konformkrümmungstensor.

Изучаются уже известные необходимые условия для справедливости принципа Гюйгенса для самосопряженного скалярного волнового уравнения, для уравнений Максвелла и уравнения Вейля в статических пространствах-временах с помощью спинорного исчисления. Один результат таков, что в пространствах Римана, которые имеют статический метрический тензор и тензор Вейля типа Петрова D, принцип Гюйгенса не справедлив. Если два из трёх рассмотренных типов уравнений удовлетворяют принципу Гюйгенса в статическом пространстве-времени, то тензор конформной кривизны исчезает.

The already known necessary conditions for the validity of Huygens' principle for the self-adjoint scalar wave equation, for Maxwell's and Weyl's equations are examined in static space-times by the help of the spinor calculus. One result is, that Huygens' principle does not hold in Riemannian spaces, whose metric tensor is static and whose Weyl spinor is of Petrov type D. If two of the three considered types of equations satisfy Huygens' principle in a static space-time, then the conformal curvature tensor vanishes.

1. Einleitung

Für hyperbolische Differentialgleichungssysteme in Riemannschen Räumen (M_4, g), deren Metrik g die Signatur $(+---)$ hat, ist das Cauchysche Anfangswertproblem sachgemäß. Das Abhängigkeitsgebiet der Lösung im Punkte $x \in M_4$ ist im allgemeinen derjenige Teil der Anfangsfläche S, der im Innern des charakteristischen Konoids $C(x)$ liegt [1, 6, 8, 21, 31, 34]. Hängt die Lösung eines jeden Cauchy-Problems in einem beliebigen Punkt x nur von den Anfangsdaten und deren Ableitungen auf $C(x) \cap S$ ab, so gilt für die betrachtete Differentialgleichung das *Huygenssche Prinzip* [8]. Der Integrationstheorie für hyperbolische Differentialgleichungen ist zu entnehmen, daß das Huygenssche Prinzip genau dann gilt, wenn der Schweifterm der Fundamentallösung der entsprechenden Gleichung verschwindet [1, 6, 8, 21, 31]. Dieses notwendige und hinreichende Kriterium gestattet es jedoch noch nicht, die huygensschen Differentialgleichungen durch Bedingungen für ihre Koeffizienten zu charakterisieren, da die Fundamentallösungen in der Regel nicht explizit bestimmbar sind.

---

[1]) Diese Arbeit umfaßt einen Teil der Dissertation A des Verfassers.

In vorliegender Arbeit betrachten wir insbesondere folgende konforminvariante Typen hyperbolischer Differentialgleichungssysteme: Die (formal) selbstadjungierte skalare *Wellengleichung*

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j u - \frac{R}{6}\,u = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

die homogenen *Maxwellschen Gleichungen*

$$d\omega = 0, \qquad \delta\omega = 0 \tag{1.2}$$

für eine alternierende Differentialform ω vom Grade 2 und die *Weyl-Gleichung*

$$\nabla^{A\dot{X}}\nu_A = 0 \qquad (A = 1, 2;\ \dot{X} = \dot{1}, \dot{2}). \tag{1.3}$$

Die einzigen bisher bekannten Metriken, für die bei (1.1)—(1.3) das Huygenssche Prinzip gilt, sind die konformflachen und die zu „plane-wave"-Metriken (siehe z. B. [24]) konformen Metriken [5, 7, 13, 20, 23, 29, 31].

Aus den notwendigen und hinreichenden Kriterien wurden in [2, 14, 20, 28] für die Wellengleichung, in [6, 29] für die Maxwellschen Gleichungen und in [31] für die Weyl-Gleichung die folgenden expliziten notwendigen Bedingungen für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips hergeleitet:

$$C_{ij} = 0, \qquad TS(\overset{1}{N}_{i_1i_2i_3i_4} - \lambda\overset{2}{N}_{i_1i_2i_3i_4}) = 0\,^{2)}, \tag{1.4}$$

wobei $\lambda = 4/3$ für die Wellengleichung, $\lambda = 16/5$ für die Maxwellschen Gleichungen und $\lambda = 13/8$ für die Weyl-Gleichung gilt.[3] Mit Hilfe dieser Bedingungen wurde in [7, 13, 20, 29, 31] gezeigt, daß es innerhalb der konform-rekurrenten, der (2,2)-zerlegbaren, der zentralsymmetrischen, der „plane-fronted-wave"-Metriken und der Metriken mit $\nabla_k R_{ij} = 0$ nur die konformflachen und die „plane-wave"-Metriken gibt, für die (1.1), (1.2) oder (1.3) huygenssch ist. Vollständig gelöst ist das Hadamardsche Problem der Bestimmung aller huygensschen Metriken für Gleichungen der Form (1.1), falls die Unbekannte u ein nichtskalares Spintensorfeld ist [25, 33].

Wir befassen uns mit der Auswertung der Gleichungen (1.4) in statischen Raum-Zeiten. Wegen der Konforminvarianz von (1.1)—(1.3) sowie der in (1.4) auftretenden Tensoren genügt es, die sogenannten (1,3)-zerlegbaren Räume, deren Metrik g in einem geeigneten Koordinatensystem die Gestalt

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \tilde{g}_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \tag{1.5}$$

mit von x^0 unabhängigen Koeffizienten $\tilde{g}_{\mu\nu}$ besitzt, zu betrachten. $\tilde{g}$ wird als positiv definite Metrik eines Riemannschen Raumes $(M_3, \tilde{g})$ aufgefaßt. Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bezüglich dieser (1,3)-zerlegbaren Metriken liegen bisher eine Reihe von Teilresultaten vor. In [3] und [29] wurde gezeigt, daß aus $C_{00} = 0$ und $\tilde{\nabla}^\mu\tilde{\nabla}_\mu\tilde{R} \geqq 0$ bzw. $TS(\overset{2}{N}_{0000}) = 0$ und $\tilde{R} \geqq 0$ das Verschwinden des Konformkrümmungstensors des Raumes (M_4, g) folgt. Werden gewisse, physikalisch sinnvolle globale Eigenschaften von (M_4, g) vorausgesetzt, so gilt das Huygenssche Prinzip ebenfalls nur in konformflachen Räumen [6]. Ferner wurden in [4, 22] Verfahren

[2]) Der Bachsche Tensor C und die Tensoren $\overset{1}{N}$, $\overset{2}{N}$ werden in Kapitel 3 definiert. Mit TS bezeichnen wir den symmetrischen, spurfreien Anteil des eingeklammerten Tensors.

[3]) Für die Gleichung (1.1) wurde in [20] eine weitere notwendige Bedingung mit sechs Indizes ermittelt. Diese wird aber von uns nicht benutzt.

angegeben, wie man bei der Wellengleichung in statischen Raum-Zeiten notwendige Bedingungen für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips direkt (d. h. ohne Verwendung der für beliebige Raum-Zeiten gültigen Bedingungen (1.4), deren Herleitung einen enormen Rechenaufwand erfordert) als Differentialgleichungen für die Krümmungstensoren des dreidimensionalen Raumes $(M_3, \bar{g})$ ableiten kann.

Wir werden den Spinorkalkül als wesentliches Hilfsmittel zur Auswertung der Gleichungen (1.4) benutzen, wobei insbesondere einige der in [9, 10] enthaltenen Resultate über die Krümmungsspinoren statischer Metriken zur Anwendung kommen. In Kapitel 2 werden deshalb die wichtigsten, hier benötigten Aussagen über Spinoren in statischen Raum-Zeiten zusammengestellt. Im Kapitel 3 werden die Spinoräquivalente des Bachschen Tensors und die Tensoren $\overset{p}{TS}(N)$ $(p = 1, 2)$ hergeleitet, die sich ohne Mühe auf die eingeschränkten $SU(2)$-Spinoren (siehe [9, 10]) umrechnen lassen. Wir erhalten auf diese Weise recht übersichtliche notwendige Bedingungen für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips in statischen Raum-Zeiten in Gestalt eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung, das nur den Weyl-Spinor und die skalare Krümmung enthält. Bei der Auswertung dieses Systems werden folgende Hauptresultate erzielt[4]):

— Die Gleichungen (1.4) haben in statischen Raum-Zeiten, deren Konformkrümmungstensor vom Petrov-Typ D ist, für $\lambda \neq -4$ keine Lösung. Daraus folgt insbesondere, daß für die skalare Wellengleichung (1.1), die Maxwellschen Gleichungen (1.2) und die Weyl-Gleichung (1.3) innerhalb dieser Klasse von Metriken das Huygenssche Prinzip nicht gilt.

— Verschwinden in (1.4) die Tensoren $\overset{p}{TS}(N)$ $(p = 1, 2)$ einzeln, so ist eine statische Metrik g genau dann Lösung dieses Gleichungssystems, wenn (M_4, g) konformflach ist. Insbesondere gilt: Für zwei der drei Gleichungen (1.1)—(1.3) gilt in statischen Raum-Zeiten das Huygenssche Prinzip dann und nur dann, wenn der Konformkrümmungstensor verschwindet.

— Die (1,3)-zerlegbare Metrik g (1.5) genüge der Voraussetzung (V 2) von Kapitel 6. Das System (1.4) hat dann für $0 \leq \lambda < 4$ keine Lösung g, deren Konformkrümmungstensor vom Petrov-Typ I oder D ist und (V 2) erfüllt. Es folgt somit insbesondere, daß für die skalare Wellengleichung (1.1), die Maxwellschen Gleichungen (1.2) und die Weyl-Gleichung (1.3) in Raum-Zeiten, deren (1,3)-zerlegbare Metrik Voraussetzung (V 2) genügt, das Huygenssche Prinzip genau dann gilt, wenn der Konformkrümmungstensor verschwindet.

Im Kapitel 7 wird gezeigt, daß die statischen zylindersymmetrischen Metriken und die Metriken mit

$$d\bar{s}^2 = e^{2\varphi}\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right), \qquad \varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$$

(V 2) erfüllen.[5]) Mit Hilfe des in [3] bewiesenen Satzes, daß ein Raum (M_4, g) mit einer Metrik der Gestalt (1.5) genau dann konformflach ist, wenn $(M_3, \bar{g})$ ein Raum konstanter Krümmung ist, lassen sich die Koeffizienten huygensscher Gleichungen bei statischen Metriken explizit bestimmen; dies wird an einem Beispiel demonstriert.

---

[4]) Unsere Betrachtungen sind lokaler Natur. Die Raum-Zeit kann deshalb auf eine Koordinatenumgebung eines Punktes $x \in M_4$ eingeschränkt werden.

[5]) Uns ist aus der Literatur keine statische Metrik bekannt, die der Voraussetzung 2 nicht genügt und die nicht in einer der obengenannten Klassen enthalten ist, für die das Hadamardsche Problem der Bestimmung aller huygensschen Metriken bereits gelöst ist.

2. Spinoren in (1,3)-zerlegbaren Räumen

Alle nachfolgend ausgeführten Rechnungen und Überlegungen sind lokaler Natur. Eine Riemannsche Raum-Zeit (M_4, g) heißt (1,3)-*zerlegbar*, wenn sie ein zeitartiges, kovariant konstantes Vektorfeld v besitzt. Das Koordinatensystem $\{x^i \mid i = 0, 1, 2, 3\}$ sei so gewählt, daß $v^i = \delta_0{}^i$ und

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \tilde{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

gilt, wobei die Koeffizienten $\tilde{g}_{\mu\nu}$ von x^0 unabhängig seien [10]. Wir fassen $\tilde{g}_{\bar{\mu}\nu}$ als die kovarianten Koordinaten des (positiv definiten) metrischen Tensors eines dreidimensionalen Riemannschen Raumes $(M_3, \tilde{g})$ auf (vgl. [10]) und bezeichnen alle Größen, die sich auf $(M_3, \tilde{g})$ beziehen, mit $\sim$ über dem Kernbuchstaben. Wir benutzen alle in [9, 10] eingeführten Bezeichnungen, legen aber die für das Anliegen vorliegender Arbeit wichtigsten Definitionen und Resultate daraus kurz dar:

Wie üblich seien $\sigma^i{}_{A\dot{X}}$ die *Verbindungsgrößen*, ε_{AB} und $\varepsilon_{\dot{X}\dot{Y}}$ die *Fundamentalspinoren*, ψ_{ABCD} der *Weyl-Spinor* mit

$$\left.\begin{aligned} &C_{ijke} \leftrightarrow \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\psi_{ABCD} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}} \\ &\frac{1}{2}\left(R_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij}R\right) \leftrightarrow \Phi_{AB\dot{X}\dot{Y}} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

und $\Lambda = -R/24$. Wegen der Gestalt (2.1) der Metrik g gilt

$$\sigma_{0A\dot{X}}\sigma_{0B}{}^{\dot{X}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{AB}. \tag{2.3}$$

Die symmetrischen, auf M_3 *eingeschränkten Verbindungsgrößen* $\tilde{\sigma}_{\mu AB}$ werden definiert durch $\tilde{\sigma}_{\mu AB} = \sqrt{2}\,\sigma_{\mu A\dot{X}}\sigma_{0B}{}^{\dot{X}}$. Es sei

$$\xi^+_{A_1\cdots A_r} = \left(\sqrt{2}\right)^r \sigma_{0A_1}{}^{\dot{X}_1} \cdots \sigma_{0A_r}{}^{\dot{X}_r}\bar{\xi}_{\dot{X}_1\cdots\dot{X}_r}$$

der zu $\xi_{A_1\ldots A_r}$ *adjungierte Spinor*. Jeder 1-Spinor $\eta_A \neq 0$ kann so normiert werden, daß das Paar $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine *Basis* im Spinorraum bildet mit

$$\varepsilon_{AB} = \eta_A\eta_B{}^+ - \eta_A{}^+\eta_B. \tag{2.4}$$

Der Übergang zu jeder neuen Basis $\{\eta_A', \eta_A'^+\}$ wird durch eine SU(2)-Transformation vermittelt. $\tilde{\nabla}$ sei die mit den eingeschränkten Verbindungsgrößen vertauschbare *kovariante Ableitung* und $\tilde{\nabla}_{AB} = \tilde{\sigma}^\mu{}_{AB}\tilde{\nabla}_\mu$. Bezüglich einer Basis $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ definieren wir die Differentialoperatoren D, δ und $\bar{\delta}$ gemäß

$$D = \eta^A\eta^{+B}\tilde{\nabla}_{AB}, \qquad \delta = -\eta^A\eta^B\tilde{\nabla}_{AB}, \qquad \bar{\delta} = \eta^{+A}\eta^{+B}\tilde{\nabla}_{AB}. \tag{2.5}$$

$\tilde{A}_{AB}$, $\tilde{B}_{AB}$ und $\tilde{C}_{AB}$ seien die *eingeschränkten Spinoren des Zusammenhanges* zur Basis $\{\eta_A, \eta_B{}^+\}$. Für diese gilt

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_{AB}\eta_C = \tilde{A}_{AB}\eta_C + \tilde{B}_{AB}\eta_C{}^+, \qquad \tilde{\nabla}_{AB}\eta_C{}^+ = \tilde{C}_{AB}\eta_C - \tilde{A}_{AB}\eta_C{}^+, \\ &\tilde{A}_{AB} = \eta^{+C}\tilde{\nabla}_{AB}\eta_C, \qquad \tilde{B}_{AB} = -\eta^C\tilde{\nabla}_{AB}\eta_C, \qquad \tilde{C}_{AB} = \eta^{+C}\tilde{\nabla}_{AB}\eta_C{}^+, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$\tilde{A}_{AB} = \tilde{A}^+_{AB}, \qquad \tilde{C}_{AB} = \tilde{B}^+_{AB}. \tag{2.7}$$

Als *eingeschränkte Newman-Penrose-Koeffizienten* bezeichnen wir die Skalare

$$\begin{aligned} &\tilde{\tau} = \tilde{A}_{AB}\eta^A\eta^B, \qquad \tilde{\varepsilon} = \tilde{A}_{AB}\eta^A\eta^{+B}, \\ &\tilde{\sigma} = \tilde{B}_{AB}\eta^A\eta^B, \qquad \tilde{\varkappa} = \tilde{B}_{AB}\eta^A\eta^{+B}, \qquad \tilde{\varrho} = \tilde{B}_{AB}\eta^{+A}\eta^{+B}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aus (2.7) ergibt sich

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = -\bar{\varepsilon}, \qquad \bar{\bar{\tau}} = \tilde{A}_{AB}\eta^{+A}\eta^{+B},$$
$$\bar{\bar{\varrho}} = \tilde{C}_{AB}\eta^A\eta^B, \qquad -\bar{\bar{\varkappa}} = \tilde{C}_{AB}\eta^A\eta^{+B}, \qquad \bar{\bar{\sigma}} = \tilde{C}_{AB}\eta^{+A}\eta^{+B}.$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion h gelten die *Kommutatorrelationen*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\, h &= \bar{\bar{\tau}}\,\delta h - \bar{\tau}\bar{\delta} h + (\bar{\bar{\varrho}} - \bar{\varrho})\, Dh, \\ (D\delta - \delta D)\, h &= (2\bar{\varepsilon} - \bar{\bar{\varrho}})\,\delta h + \bar{\sigma}\bar{\delta} h - 2\bar{\varkappa} Dh. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ist $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Basis im Spinorraum, so ergeben sich mit den gemäß

$$\begin{aligned} &\psi_0 = \psi_{ABCD}\eta^A\eta^B\eta^C\eta^D, \qquad \psi_1 = \psi_{ABCD}\eta^A\eta^B\eta^C\eta^{+D}, \ldots, \\ &\psi_4 = \psi_{ABCD}\eta^{+A}\eta^{+B}\eta^{+C}\eta^{+D} \end{aligned} \tag{2.10}$$

definierten Skalaren $\psi_0, \ldots, \psi_4$ die folgenden *Ricci-Identitäten* für die eingeschränkten Newman-Penrose-Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} &D\bar{\tau} + \delta\bar{\varepsilon} - 2\bar{\varepsilon}(\bar{\varkappa} + \bar{\tau}) + \bar{\sigma}(\bar{\bar{\tau}} - \bar{\bar{\varkappa}}) + \bar{\bar{\varrho}}(\bar{\tau} - \bar{\varkappa}) &&= -\psi_1 \\ &\frac{1}{2}(\bar{\delta}\bar{\tau} + \delta\bar{\bar{\tau}}) + \bar{\varepsilon}(\bar{\bar{\varrho}} - \bar{\varrho}) - 2\bar{\tau}\bar{\bar{\tau}} + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\varrho}\bar{\bar{\varrho}}) &&= -\psi_2 + \Lambda \\ &D\bar{\sigma} + \delta\bar{\varkappa} - 2\bar{\varkappa}(\bar{\varkappa} - \bar{\tau}) + \bar{\sigma}(\bar{\varrho} + \bar{\bar{\varrho}} - 4\bar{\varepsilon}) &&= \psi_0 \\ &\frac{1}{2}(\delta\bar{\varrho} + \bar{\delta}\bar{\sigma}) + \bar{\varkappa}(\bar{\bar{\varrho}} - \bar{\varrho}) - 2\bar{\sigma}\bar{\bar{\tau}} &&= \psi_1 \\ &-D\bar{\varrho} + \bar{\delta}\bar{\varkappa} - \bar{\varrho}^2 - \bar{\sigma}\bar{\bar{\sigma}} - 2(\bar{\varkappa}\bar{\bar{\varkappa}} + \bar{\varkappa}\bar{\bar{\tau}}) &&= \psi_2 + 2\Lambda. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Für die Skalare $\psi_0, \ldots, \psi_4$ gilt ferner

$$\psi_4 = \bar{\psi}_0, \qquad \psi_3 = -\bar{\psi}_1, \qquad \psi_2 = \bar{\psi}_2, \tag{2.12}$$

was gleichbedeutend mit $\psi^+_{ABCD} = \psi_{ABCD}$ ist. Zwischen den *Krümmungsspinoren* (1,3)-zerlegbarer Metriken besteht folgender Zusammenhang:

$$2\Phi_{AB\dot{X}\dot{Y}}\sigma_{0E}{}^{\dot{X}}\sigma_{0F}{}^{\dot{Y}} = \psi_{ABEF} + \Lambda(\varepsilon_{AE}\varepsilon_{BF} + \varepsilon_{AF}\varepsilon_{BE}). \tag{2.13}$$

Daraus ergibt sich zwischen dem Ricci-Tensor des Raumes $(M_3, \tilde{g})$ und dem Weyl-Spinor der Beziehung

$$\psi_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R}\right)\tilde{\sigma}^{\mu}_{AC}\tilde{\sigma}^{\nu}_{BD}. \tag{2.14}$$

Weiterhin wird in [9, 10] gezeigt: Der Weyl-Spinor einer statischen Raum-Zeit ist vom Petrov-Typ I, D oder 0. Ist ψ_{ABCD} vom Typ D, so gibt es eine Basis $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$, für die

$$\psi_{ABCD} = 6\psi_2\eta_{(A}\eta_B\eta_C{}^+\eta_{D)}{}^+ \quad \text{mit} \quad \psi_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \tag{2.15}$$

gilt. Die Basis ist in diesem Fall nur bis auf eine Phasentransformation der Gestalt $\eta_A \to e^{i\varphi}\eta_A$ eindeutig bestimmt. Ist der Weyl-Spinor vom Petrov-Typ I, so gibt es eine Spinbasis $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ mit

$$\psi_{ABCD} = \psi_0(\eta_A\eta_B\eta_C\eta_D + \eta_A{}^+\eta_B{}^+\eta_C{}^+\eta_D{}^+) + 6\psi_2\eta_{(A}\eta_B\eta_C{}^+\eta_{D)}{}^+, \tag{2.16}$$

wobei $\psi_0, \psi_2 \in \mathbf{R}$ und $\psi_0 \neq 0$, $\psi_0 \neq \pm 3\psi_2$ gilt. Die Spinoren $\eta_A, \eta_A{}^+$ mit den Eigenschaften (2.15) bzw. (2.16) heißen *Normalspinoren*. Durch Differentiation von (2.16) erhält man bei Beachtung von (2.6)

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{EF}\psi_{ABCD} = {} & (\tilde{\nabla}_{EF}\psi_0 + 4\psi_0\tilde{A}_{EF})\,\eta_A\eta_B\eta_C\eta_D + (\psi_0\tilde{B}_{EF} + 3\psi_2\tilde{C}_{EF})\,4\eta_{(A}\eta_B\eta_C\eta_{D}{}^{+)} \\ & + (\tilde{\nabla}_{EF}\psi_2)\,6\eta_{(A}\eta_B\eta_C{}^+\eta_D{}^{+)} \\ & + (\psi_0\tilde{C}_{EF} + 3\psi_2\tilde{B}_{EF})\,4\eta_{(A}\eta_B{}^+\eta_C{}^+\eta_D{}^{+)} + (\tilde{\nabla}_{EF}\psi_0 - 4\psi_0\tilde{A}_{EF})\,\eta_A{}^+\eta_B{}^+\eta_C{}^+\eta_D{}^+ .\end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus den *Bianchi-Identitäten* ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Ableitungen der Krümmungsspinoren:

$$\tilde{\nabla}^{CD}\psi_{ABCD} = -2\tilde{\nabla}_{AB}\Lambda; \tag{2.18}$$

ist $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Basis aus Normalspinoren, so ist dies gleichwertig zu dem System

$$\left.\begin{aligned} -\bar{\delta}\psi_0 + \delta\psi_2 + 2\delta\Lambda &= -2(2\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\varkappa}})\,\psi_0 + 6\bar{\varkappa}\psi_2 \\ 2(D\Lambda - D\psi_2) &= (\bar{\sigma} + \bar{\bar{\sigma}})\,\psi_0 + 3(\bar{\varrho} + \bar{\bar{\varrho}})\,\psi_2 . \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Schließlich werden in [9, 10] noch folgende für das Weitere nützliche Beziehungen hergeleitet:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{2}\sigma_{0F}{}^{\dot{X}}\,\nabla_{E\dot{X}}\psi_{ABCD} &= \tilde{\nabla}_{EF}\psi_{ABCD} \\ 2\sigma_{0H}{}^{\dot{Y}}\,\sigma_{0F}{}^{\dot{X}}\,\nabla_{G\dot{Y}}\nabla_{E\dot{X}}\psi_{ABCD} &= \tilde{\nabla}_{GH}\tilde{\nabla}_{EF}\psi_{ABCD} \\ -4\sqrt{2}\sigma_{0F}{}^{\dot{X}}\,\sigma_{0A_1}{}^{\dot{W}_1}\ldots\sigma_{0A_4}{}^{\dot{W}_4}\,\nabla_{E\dot{X}}\bar{\psi}_{\dot{W}_1\dot{W}_2\dot{W}_3\dot{W}_4} &= \tilde{\bar{\nabla}}_{EF}\psi_{A_1A_2A_3A_4} \\ 8\sigma_{0H}{}^{\dot{Y}}\,\sigma_{0F}{}^{\dot{X}}\,\sigma_{0A_1}{}^{\dot{W}_1}\ldots\sigma_{0A_4}{}^{\dot{W}_4}\,\nabla_{G\dot{Y}}\nabla_{E\dot{X}}\bar{\psi}_{\dot{W}_1\dot{W}_2\dot{W}_3\dot{W}_4} &= \tilde{\nabla}_{GH}\tilde{\nabla}_{EF}\psi_{A_1A_2A_3A_4} . \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

3. Spinorielle Form der notwendigen Bedingungen

Die in den notwendigen Bedingungen (1.4) für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips auftretenden Tensoren sind wie folgt definiert (siehe z. B. [30]):

$$\left.\begin{aligned} C_{ij} &= \nabla^k\nabla_{[k}L_{i]j} + \frac{1}{2}\,C^k{}_{ij}{}^lL_{kl} \qquad (\textit{Bachscher Tensor}), \\ \overset{1}{N}_{i_1i_2i_3i_4} &= \nabla^kC^l{}_{i_1i_2}{}^m\nabla_kC_{li_3i_4m} - 4C^k{}_{i_1i_2}{}^l[2\nabla_kS_{i_3i_4l} + C_{ki_3i_4}{}^mL_{lm}] \\ &\quad + 16S_{i_1i_2k}S_{i_3i_4}{}^k \\ \overset{2}{N}_{i_1i_2i_3i_4} &= 2\nabla_{i_1}C^k{}_{i_2i_3}{}^lS_{ki_4l} + C^k{}_{i_1i_2}{}^l[2\nabla_{i_3}S_{kli_4} - C_k{}^m{}_{li_3}L_{mi_4}] \\ &\quad + 2S_{i_1i_2k}S_{i_3i_4}{}^k \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

wobei gilt

$$L_{ij} := -R_{ij} + \frac{1}{6}\,g_{ij}R \quad \text{und} \quad S_{ijk} := \nabla_{[k}L_{j]i} = \nabla_lC^l{}_{ikj}.$$

Die Berechnung des Spinoräquivalents des symmetrischen, spurfreien Anteils eines Tensors wird durch den folgenden Satz wesentlich vereinfacht (siehe [13]; dieser Satz ist eine Anwendung der in [19] bewiesenen Tatsache, daß jeder Spinor gleich dem symmetrischen Spinor modulo Produkten des Fundamentalspinors mit Spinoren niedrigerer Stufe ist).

Satz 1: *Es sei T ein r-stufiger Tensor mit*

$$T_{i_1\cdots i_r} \leftrightarrow T_{A_1\cdots A_r \dot{X}_1\cdots \dot{X}_r}.$$

Dann gilt

$$TS(T_{i_1\cdots i_r}) \leftrightarrow T_{(A_1\cdots A_r)(\dot{X}_1\cdots \dot{X}_r)}.$$

Mittels (2.2) kann man nun die Spinoräquivalente der Tensoren (3.1) direkt berechnen. Die $TS(\overset{p}{N})$ $(p = 1, 2)$ zugeordneten Spinoren erhält man dann nach Satz 1[6]). Es ergibt sich folgendes Resultat, wobei wir vereinbaren, daß im folgenden über Indizes mit Subindizes und gleichem Kernbuchstaben stets zu symmetrisieren ist:

$$C_{ij} \leftrightarrow C_{AB\dot{X}\dot{Y}}$$
$$= \nabla_A{}^{\dot{Z}}\nabla_B{}^{\dot{W}}\overline{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}} + \nabla_{\dot{X}}{}^G\nabla_{\dot{Y}}{}^H\psi_{ABGH} + \overline{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}\Phi_{AB}{}^{\dot{W}\dot{Z}} + \psi_{ABGH}\varphi^{GH}{}_{\dot{X}\dot{Y}},$$

$$TS(\overset{1}{N}_{i_1i_2i_3i_4}) \leftrightarrow \overset{1}{N}_{A_1A_2A_3A_4\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}$$
$$= 8\psi^B{}_{A_1A_2A_3}\nabla_{B\dot{X}_1}\nabla^{\dot{Y}}_{A_4}\overline{\psi}_{\dot{Y}\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4} + 8\overline{\psi}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3}\nabla_{A_1\dot{Y}}\nabla^B_{\dot{X}_4}\psi_{BA_2A_3A_4}$$
$$+ 2\nabla_{B\dot{Y}}\psi_{A_1A_2A_3A_4}\nabla^{B\dot{Y}}\overline{\psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4} - 32\nabla^B_{\dot{X}_1}\psi_{BA_2A_3A_4}\nabla^{\dot{Y}}_{A_1}\overline{\psi}_{\dot{Y}\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}$$
$$- 16\psi^B{}_{A_1A_2A_3}\overline{\psi}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3}\Phi_{BA_4\dot{Y}\dot{X}_4} - 16\Lambda\psi_{A_1A_2A_3A_4}\overline{\psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4},$$

$$TS(\overset{2}{N}_{i_1i_2i_3i_4}) \leftrightarrow \overset{2}{N}_{A_1A_2A_3A_4\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}$$
$$= 2\psi^B{}_{A_1A_2A_3}\nabla_{A_4\dot{X}_1}\nabla_B{}^{\dot{Y}}\overline{\psi}_{\dot{Y}\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4} + 2\overline{\psi}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3}\nabla_{A_1\dot{X}_4}\nabla^B_{\dot{Y}}\overline{\psi}_{BA_2A_3A_4}$$
$$+ 2\nabla_{A_1\dot{Y}}\overline{\psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}\nabla^{B\dot{Y}}\psi_{BA_2A_3A_4} + 2\nabla_{B\dot{X}_1}\psi_{A_1A_2A_3A_4}\nabla^{B\dot{Y}}\overline{\psi}_{\dot{Y}\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}$$
$$- 4\varphi^B{}_{A_1A_2A_3}\overline{\psi}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3}\Phi_{BA_4\dot{Y}\dot{X}_4} + 4\Lambda\psi_{A_1A_2A_3A_4}\overline{\psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2\dot{X}_3\dot{X}_4}.$$

Definition 1: Es sei T ein r-stufiger Tensor in M_4 und

$$T_{i_1\cdots i_r} \leftrightarrow \xi_{A_1\cdots A_r\dot{X}_1\cdots\dot{X}_r}.$$

Der Spinor

$$\overset{*}{\xi}_{A_1\cdots A_rB_1\cdots B_r} = \left(-\sqrt{2}\right)^r \sigma_{0B_1}{}^{\dot{X}_1} \cdots \sigma_{0B_r}{}^{\dot{X}_r}\xi_{A_1\cdots A_r\dot{X}_1\cdots\dot{X}_r} \tag{3.2}$$

heißt *$*$-Äquivalent* von T.

Bemerkung: Aus (3.2) und (2.3) folgt

$$\overset{*}{\xi}_{A_1\cdots A_rB_1\cdots B_r} = 0 \Leftrightarrow \xi_{A_1\cdots A_r\dot{X}_1\cdots\dot{X}_r} = 0.$$

Die Berechnung der $*$-Äquivalente der Tensoren (3.1) ist bei Verwendung der schon früher hergeleiteten Beziehungen (2.13) und (2.20) sehr einfach. Die Verjüngungen über die punktierten Indizes werden hierbei mittels (2.3) „aufgelöst". Man erhält vermöge der letzten Beziehung von (2.20) und (2.3) zum Beispiel

$$2\sigma_{0C}{}^{\dot{X}}\sigma_{0D}{}^{\dot{Y}}\nabla_A{}^{\dot{Z}}\nabla_B{}^{\dot{W}}\overline{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}} = 2\sigma_{0C}{}^{\dot{X}}\sigma_{0D}{}^{\dot{Y}}\varepsilon^{\dot{Z}\dot{R}}\varepsilon^{\dot{W}\dot{S}}\nabla_{A\dot{R}}\nabla_{B\dot{S}}\overline{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}$$
$$= 8\sigma_{0C}{}^{\dot{X}}\sigma_{0D}{}^{\dot{Y}}\sigma_{0E}{}^{\dot{Z}}\sigma_0{}^{E\dot{R}}\sigma_{0F}{}^{\dot{W}}\sigma_0{}^{F\dot{S}}\nabla_{A\dot{R}}\nabla_{B\dot{S}}\overline{\psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}} = \tilde{\nabla}_A{}^E\tilde{\nabla}_B{}^F\psi_{FCDE}.$$

---

[6]) Der Bachsche Tensor C_{ij} (3.1) ist bereits symmetrisch und spurfrei (siehe z. B. [30]).

Insgesamt ergeben sich folgende Resultate:

$$C^*_{ABCD} = \tilde{\nabla}_A{}^E\tilde{\nabla}_B{}^F\psi_{CDEF} + \tilde{\nabla}_C{}^E\tilde{\nabla}_D{}^F\psi_{ABEF} + 2\psi_{AB}{}^{EF}\psi_{CDEF} + 4\Lambda\psi_{ABCD}, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} &= 8\psi^A{}_{K_1K_2K_3}\tilde{\nabla}_{AL_1}\tilde{\nabla}^B_{K_4}\psi_{BL_2L_3L_4} + 8\psi^A{}_{L_1L_2L_3}\tilde{\nabla}_{AK_1}\tilde{\nabla}^B_{L_4}\psi_{BK_2K_3K_4} \\ &\quad + 2\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{K_1K_2K_3K_4}\tilde{\nabla}^{AB}\psi_{L_1L_2L_3L_4} - 32\tilde{\nabla}^A_{L_1}\psi_{AK_2K_3K_4}\tilde{\nabla}^B_{K_1}\psi_{BL_2L_3L_4} \\ &\quad - 16\psi^A{}_{K_1K_2K_3}\psi^B{}_{L_1L_2L_3}\psi_{K_4L_4AB} \\ &\quad - 32\Lambda\psi_{K_1K_2K_3K_4}\psi_{L_1L_2L_3L_4} + 32\Lambda\psi_{K_1K_2K_3L_4}\psi_{L_1L_2L_3K_4},\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} &= 2\psi^A{}_{K_1K_2K_3}\tilde{\nabla}_{K_4L_1}\tilde{\nabla}_A{}^B\psi_{BL_2L_3L_4} + 2\psi^A{}_{L_1L_2L_3}\tilde{\nabla}_{L_4K_1}\tilde{\nabla}_A{}^B\psi_{BK_2K_3K_4} \\ &\quad + 2\tilde{\nabla}_{K_1A}\psi_{L_1L_2L_3L_4}\tilde{\nabla}^{AB}\psi_{BK_2K_3K_4} + 2\tilde{\nabla}_{L_1A}\psi_{K_1K_2K_3K_4}\tilde{\nabla}^{AB}\psi_{BL_2L_3L_4} \\ &\quad - 4\psi^A{}_{K_1K_2K_3}\psi^B{}_{L_1L_2L_3}\psi_{K_4L_4AB} + 8\Lambda\psi_{K_1K_2K_3L_4}\psi_{L_1L_2L_3K_4}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Definition 2: $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ seien diejenigen Mengen aller (1,3)-zerlegbaren Metriken g, für die die skalare Wellengleichung (1.1), die Maxwellschen Gleichungen (1.2) bzw. die Weyl-Gleichung (1.3) huygenssch sind. Weiterhin sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{H}_3 \quad \text{und} \quad \hat{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2) \cup (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_3) \cup (\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_3).$$

Folgerung 1: *Nach* (1.4) *und Bemerkung* 1 *gilt für* $g \in \mathfrak{h}$

$$\left.\begin{aligned} &C^*_{ABCD} = 0 \\ &\overset{1}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} - \lambda\overset{2}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} = 0 \quad \mathit{mit} \quad \lambda \in \left\{\frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \frac{13}{8}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

und für $g \in \hat{\mathfrak{h}}$

$$\left.\begin{aligned} &C^*_{ABCD} = 0 \\ &\overset{1}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} = \overset{2}{N}{}^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Bevor mit der systematischen Auswertung dieser beiden Systeme begonnen wird, wollen wir noch zeigen, wie sich mit Hilfe des bereitgestellten Apparates leicht bereits bekannte Beziehungen ableiten lassen. Dazu überschieben wir zunächst die Bachschen Gleichungen $C^*_{ABCD} = 0$ mit $\varepsilon^{AC}\varepsilon^{BD}$; es ergibt sich bei Beachtung der Bianchi-Identität (2.18)

$$\tilde{\nabla}^{AB}\tilde{\nabla}_{AB}\Lambda = \frac{1}{2}\,\psi_{ABCD}\psi^{ABCD}. \tag{3.8}$$

Aus (2.14) ist zu entnehmen, daß dies zu der von P. Günther [3: S. 19] entdeckten Beziehung

$$\frac{1}{3}\,\tilde{\nabla}^{\mu}\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{R} + \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\,\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R}\right)\left(\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}\right) = 0$$

äquivalent ist.[7]) Ist $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Basis im Spinorraum, so erhält man bei Beachtung von (2.10) und (2.12)

$$\tilde{\nabla}^{AB}\tilde{\nabla}_{AB}\Lambda = \psi_0\bar{\psi}_0 + 4\psi_1\bar{\psi}_1 + 3\psi_2{}^2, \tag{3.9}$$

woraus direkt zu entnehmen ist, daß aus $\tilde{\nabla}^{AB}\tilde{\nabla}_{AB}\Lambda = 0$ das Verschwinden des Weyl-Spinors folgt. Ist speziell $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Basis aus Normalspinoren, so ergibt sich — verwendet man [10: (8.30) und (8.32)] — die folgende, zu (3.8) äquivalente Differentialgleichung für die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 des Ricci-Tensors $\tilde{R}_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\nabla}^{AB}\tilde{\nabla}_{AB}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2.$$

Es sei nun $g \in \overset{2}{\mathfrak{H}}$. Wir überschieben die Gleichung $N^*_{K_1K_2K_3K_4L_1L_2L_3L_4} = 0$ mit $\varepsilon^{K_1L_1} \ldots \varepsilon^{K_4L_4}$ (man beachte hierbei die Symmetrisierung!); es ergibt sich

$$\frac{3}{2}\,\psi^{ABCD}\,C^*_{ABCD} - 8\Lambda\psi_{ABCD}\psi^{ABCD} - 4\tilde{\nabla}_A{}^B\psi_{BCDE}\tilde{\nabla}_F{}^A\psi^{CDEF} = 0.$$

Wegen des Verschwindens des Bachschen Tensors erhält man daraus

$$\Lambda\psi_{ABCD}\psi^{ABCD} = -\frac{1}{2}\,\tilde{\nabla}_A{}^B\psi_{BCDE}\tilde{\nabla}_F{}^A\psi^{CDEF}. \tag{3.10}$$

Das ist zu der von V. Wünsch [29: S. 34] hergeleiteten Beziehung äquivalent. Bei Verwendung einer Normalspinorbasis kann man sich auch direkt davon überzeugen, daß die rechte Seite von (3.10) negativ definit ist. Somit folgt aus (3.10) für $\Lambda \geqq 0$ das Verschwinden des Weyl-Spinors.

Zur Auswertung der Bedingungen (3.6) bzw. (3.7) benutzen wir die von E. T. Newman und R. Penrose [16] eingeführte Methode: Die Gleichungen werden mit geeignet zu wählenden Basisspinoren η_A, $\eta_A{}^+$ überschoben, um auf diese Weise Differentialgleichungen für skalare Funktionen zu erhalten. Dabei erweist sich die folgende *Dyadenschreibweise* als zweckmäßig: Alle freien Indizes, die mit η^A überschoben werden, werden durch ein $-$ ersetzt; beim Überschieben mit η^{+A} setzen wir ein $+$ an die Stelle des Index, z. B. $C^*_{+---} := \eta^{+A}\eta^B\eta^C\eta^D C^*_{ABCD}$. Da Differentiation und Überschiebung nicht vertauschbar sind, vereinbaren wir bei dieser Schreibweise, daß die Überschiebung immer nach der Differentiation erfolgt. Jedoch können Verjüngungen mit ε^{AB} „herausgezogen" und anschließend vermittels (2.4) aufgelöst werden. Man erhält z. B. bei Verwendung von (2.4), (2.17), (2.8) und (2.5) für eine Normalspinorbasis $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+--} &:= \eta^A\eta^{+B}\eta^C\eta^D\tilde{\nabla}_A{}^G\psi_{GBCD} = \eta^A\eta^{+B}\eta^C\eta^D\varepsilon^{GH}\tilde{\nabla}_{AH}\psi_{GBCD}\\
&= \eta^A\eta^{+B}\eta^C\eta^D(\eta^G\eta^{+H} - \eta^{+G}\eta^H)\,\tilde{\nabla}_{AH}\psi_{GBCD} =: \tilde{\nabla}_{-+}\psi_{-+--} - \tilde{\nabla}_{--}\psi_{++--}\\
&= -(\psi_0\tilde{C}_{EF} + 3\psi_2\tilde{B}_{EF})\,\eta^E\eta^{+F} - \tilde{\nabla}_{EF}\psi_2\eta^E\eta^F = \psi_0\bar{\bar{\varkappa}} - 3\psi_2\bar{\varkappa} + \delta\psi_2.\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß beim Übergang $+ \to -$, $- \to +$ alle Terme dieser Gestalt in ihr Konjugiert-Komplexes übergehen (eventuell mit Vorzeichenwechsel, vgl. [9]). So ist zum Beispiel $\tilde{\nabla}_+{}^G\psi_{G-++} = \overline{\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+--}}$; mit Hilfe derartiger Beziehungen kann der in den folgenden Kapiteln erforderliche Rechenaufwand reduziert werden.

---

[7]) Man beachte zusätzlich $\tilde{\nabla}^{AB}\tilde{\nabla}_{AB} = -\tilde{\nabla}^\mu\tilde{\nabla}_\mu$ [10: (4.10)].

4. Petrov-Typ D des Weyl-Spinors

In [10, 11] wurde gezeigt, daß der Weyl-Spinor einer statischen Raum-Zeit stets vom Petrov-Typ I, D oder 0 ist. Ist ψ_{ABCD} vom Typ 0, so gilt bei (1.1)–(1.3) das Huygenssche Prinzip [2, 6, 31]. Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst den Fall, daß der Weyl-Spinor zur Metrik g (in einer offenen Menge) vom Petrov-Typ D ist.

Satz 2: *Das System* (3.6) *besitzt für* $\lambda \neq -4$ *keine Lösung* g, *deren Weyl-Spinor vom Petrov-Typ* D *ist.*

Folgerung 2: *Es sei* (M_4, g) *eine Raum-Zeit, deren metrischer Fundamentaltensor statisch und deren Konformkrümmungstensor vom Petrov-Typ* D *ist. Dann gilt für die skalare Wellengleichung* (1.1), *die Maxwellschen Gleichungen* (1.2) *und die Weyl-Gleichung* (1.3) *das Huygenssche Prinzip* *nicht*.

Beweis von Satz 2: Angenommen, das System (3.6) hat für $\lambda \in \mathbf{R}$ eine Lösung g, deren Weyl-Spinor vom Petrov-Typ D ist. $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ sei eine Basis aus Normalspinoren, es gelte also (2.15). Der Übersichtlichkeit wegen führen wir die Auswertung der Gleichungen (3.6) in Schritten **1–6** durch.

1. Zunächst überzeugt man sich anhand von (3.5), daß wegen (2.15) $\overset{2}{N}{}^{*}_{--------} = \overset{2}{N}{}^{*}_{++++----} = 0$ gilt. Zur Berechnung derjenigen Terme, die erste Ableitungen des Weyl-Spinors enthalten, ist es hierbei zweckmäßig, die Zerlegung (2.17) zu verwenden. Man beachte, daß bei Typ D-Metriken $\psi_0 \equiv 0$ gilt, so daß zum Beispiel alle Terme der Form $\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{----}$ und $\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{++++}$ verschwinden. Nach gleichen Überlegungen entnimmt man aus (3.4)

$$\overset{1}{N}{}^{*}_{--------} = -32(\tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A---})^2, \qquad \overset{1}{N}{}^{*}_{++++----} = -32\tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A+++}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B---}.$$

Aus (2.17) und (2.8) folgt

$$\tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A---} = 3\psi_2\tilde{\sigma}, \qquad \tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A+++}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B---} = (3\psi_2\bar{\tilde{\varkappa}})(3\psi_2\tilde{\varkappa}).$$

Berücksichtigt man all dies, so folgt aus (3.6) für $\lambda \in \mathbf{R}$ und $\psi_2 \neq 0$, daß $\tilde{\sigma} = \tilde{\varkappa} = 0$ ist.

2. Wir differenzieren $\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---}$ und erhalten mit (2.6)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{EF}(\eta^A\eta^B\eta^C\eta^D\tilde{\nabla}_A{}^G\psi_{GBCD}) \\
&= 4\tilde{A}_{EF}\eta^A\eta^B\eta^C\eta^D\tilde{\nabla}_A{}^G\psi_{GBCD} \\
&\qquad + 4\tilde{B}_{EF}\eta^{+A}\eta^B\eta^C\eta^D\tilde{\nabla}^G_{(A}\psi_{BCD)G} + \eta^A\eta^B\eta^C\eta^D\tilde{\nabla}_{EF}\tilde{\nabla}_A{}^G\psi_{GBCD}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Überschieben wir dies mit $\eta^E\eta^{+F}$, so folgt wegen $\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} = 0$ und $\tilde{\varkappa} = 0$, daß $\tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} = 0$ ist. Nun muß nach Folgerung 1 der Bachsche Tensor, insbesondere also die Komponente C^{*}_{----}, verschwinden. Berechnet man diese nach (3.3), so folgt $\tilde{\nabla}_{--}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+--} = 0$. Beachtet man all dies und $\tilde{\sigma} = \tilde{\varkappa} = 0$, so entnimmt man (3.4) und (3.5)

$$\overset{2}{N}{}^{*}_{+---+---} = 0, \qquad \overset{1}{N}{}^{*}_{+---+---} = -18(\tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A+--})^2 \tag{4.2}$$

(man beachte hier und im folgenden die Symmetrisierung!). Unter erneuter Verwendung von (2.17), (2.5) und $\tilde{\varkappa} = 0$ folgt schließlich aus (3.6) und (4.2) $\delta\psi_2 = 0$. Aus der ersten Bianchi-Identität von (2.19) ergibt sich dann noch $\delta\Lambda = 0$.

3. Da aus $\Lambda = \text{const}$ nach (3.9) $\psi_2 = 0$ folgen würde, muß es wegen $\delta\Lambda = 0$ einen Punkt (und folglich eine offene Menge) mit $D\Lambda \neq 0$ geben. Berücksichtigen wir

$\delta\Lambda = 0$ und $D\Lambda \neq 0$ in der ersten Kommutatorrelation von (2.9) für die Funktion Λ, so folgt $\tilde{\varrho} \in \mathbf{R}$. Der Spinor des Zusammenhanges $\tilde{B}_{AB}$ (und damit auch $\tilde{C}_{AB}$, siehe (2.7)) hat also nach den bisherigen Untersuchungen nur noch eine reelle Komponente, die nicht notwendig verschwindet.

4. Unter Beachtung von $\tilde{\varrho} \in \mathbf{R}$ und der zweiten Bianchi-Identität von (2.19) erhält man $\tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A++-} = -\tilde{\nabla}_+{}^A\psi_{A+--} = D\Lambda$ (alle anderen über ein Indexpaar verjüngten ersten Ableitungen des ψ-Spinors verschwinden wegen $\tilde{\sigma} = \tilde{\varkappa} = \delta\psi_2 = 0$). Durch Differentiation dieser sowie der Gleichungen $\tilde{\nabla}_+{}^A\psi_{A---} = \tilde{\nabla}_-{}^A\psi_{A+--} = 0$ ergibt sich bei erneuter Berücksichtigung der schon ermittelten Bedingungen an die Newman-Penrose-Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B+--} &= -DD\Lambda \\ \frac{1}{3}\tilde{\nabla}_{++}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B---} &= -\tilde{\nabla}_{++}\tilde{\nabla}_-{}^B\psi_{B+--} = \tilde{\varrho}D\Lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Man überzeugt sich nun schnell davon, daß von den Bachschen Gleichungen bei Berücksichtigung aller in den Schritten 1—3 ermittelten Bedingungen nur zwei noch nicht identisch erfüllt sind. Diese lauten bei Beachtung von (4.3)

$$\left.\begin{aligned} C^*_{++--} &= 6\tilde{\varrho}D\Lambda + 2DD\Lambda + 2\psi_2{}^2 + 4\Lambda\psi_2 = 0 \\ C^*_{+-+-} &= -2\tilde{\varrho}D\Lambda - 2DD\Lambda - 4\psi_2{}^2 + 4\Lambda\psi_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, so ergibt sich (3.9). Das System (4.4) ist äquivalent zu

$$DD\Lambda = -\frac{5}{2}\psi_2{}^2 + 4\Lambda\psi_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\varrho}D\Lambda = \frac{1}{2}\psi_2{}^2 - 2\Lambda\psi_2\,.$$

Es ist bemerkenswert, daß man hieraus durch Differentiation und anschließende Verwendung der Ricci- und Bianchi-Identitäten keine weitere Information gewinnen kann.

5. Bei Beachtung aller bisher ermittelten Bedingungen sind dem System (3.6) nur noch die beiden folgenden Gleichungen nicht identisch erfüllt:

$$\overset{1}{N}{}^*_{+++-+---} - \lambda\overset{2}{N}{}^*_{+++-+---} = 0, \tag{4.5}$$

$$\overset{1}{N}{}^*_{++--++--} - \lambda\overset{2}{N}{}^*_{++--++--} = 0. \tag{4.6}$$

Nach einiger Rechnung erhält man

$$\overset{2}{N}{}^*_{+++-+---} = 0 \quad \text{und} \quad \overset{1}{N}{}^*_{+++-+---} = 18(D\Lambda - \tilde{\varrho}\psi_2)^2,$$

woraus nach (4.5) $D\Lambda = \tilde{\varrho}\psi_2$ für beliebiges λ folgt. Auch diese Beziehung ergibt zusammen mit den zuvor erhaltenen noch keinen Widerspruch zu $\psi_2 \neq 0$. Es ist also unumgänglich, auch noch die letzte Gleichung (4.6) auszuwerten.

6. Es gilt bei Beachtung aller vorangegangenen Schritte

$$\overset{1}{N}{}^*_{++--++--} = 8\psi_2{}^3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{N}{}^*_{++--++--} = -2\psi_2{}^3,$$

also nach (4.6) $2(4 + \lambda)\,\psi_2{}^3 = 0$. Daraus folgt aber $\psi_2 = 0$ für $\lambda \neq -4$. Das System (3.6) besitzt also für $\lambda \neq -4$ keine statischen Metriken, deren Weyl-Spinor vom Petrov-Typ D ist, als Lösungen ∎

5. Petrov-Typ I des Weyl-Spinors und $g \in \hat{\mathfrak{h}}$

Ist der Weyl-Spinor zur Metrik g vom algebraisch allgemeinsten Typ I, so ist die Auswertung des Systems (3.6) wesentlich komplizierter als bei Typ D-Metriken und gelingt uns nur unter zusätzlichen Voraussetzungen. Wir betrachten deshalb zunächst den Fall, daß die Spinoren $\overset{1}{N}{}^*$, $\overset{2}{N}{}^*$ einzeln verschwinden.

Satz 3: *Eine (1,3)-zerlegbare Metrik g ist genau dann Lösung des Differentialgleichungssystems (3.7), wenn der zu g gehörende Weyl-Spinor verschwindet.*

Folgerung 3: *Ist (M_4, g) eine statische Raum-Zeit und gilt für zwei der Gleichungen (1.1)–(1.3) das Huygenssche Prinzip, so folgt $\psi_{ABCD} = 0$ und $C_{ijkl} = 0$.*

Beweis von Satz 3: g sei eine Lösung des Systems (3.7). Wir nehmen zunächst an, daß es einen Punkt $x \in M_4$ gibt, in dem der Weyl-Spinor zur Metrik g vom Petrov-Typ I ist. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann auch eine Umgebung $U(x)$, in welcher ψ_{ABCD} vom Typ I ist. $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ sei eine Basis aus Normalspinoren in $U(x)$, es gelte also (2.16). Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, noch einige Abkürzungen einzuführen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tilde{\nabla}_{+-}\psi_{----} &&= D\psi_0 - 4\psi_0\tilde{\varepsilon}\,,\\
\mathcal{B} &= 3\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{++--} - 2\tilde{\nabla}_{++}\psi_{+---} &&= 3D\psi_2 + 2\psi_0\bar{\tilde{\sigma}} + 6\psi_2\tilde{\varrho}\,,\\
\mathcal{C} &= 3\tilde{\nabla}_{--}\psi_{++--} - 2\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{+---} &&= -3\delta\psi_2 - 2\psi_0\bar{\tilde{\varkappa}} + 6\psi_2\tilde{\varkappa}\,,\\
\mathcal{D} &= \tilde{\nabla}_{++}\psi_{----} &&= \bar{\delta}\psi_0 - 4\psi_0\bar{\tilde{\tau}}\,,\\
\mathcal{E} &= \tilde{\nabla}_{--}\psi_{----} - 4\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{+++-} &&= -\delta\psi_0 - 4\psi_0\tilde{\tau} + 4\psi_0\tilde{\varkappa} - 12\psi_2\bar{\tilde{\varkappa}}\,,\\
\mathcal{F} &= \tilde{\nabla}_{--}\psi_{+---} &&= -\psi_0\bar{\tilde{\varrho}} - 3\psi_2\tilde{\sigma}\,.
\end{aligned}$$

Im folgenden gehen wir in Schritten **1–10** vor.

1. Wir betrachten die Linearkombinationen

$$\overset{1}{N}{}^*_{+---+---} - 4\overset{2}{N}{}^*_{+---+---}\,,$$

$$\overset{1}{N}{}^*_{+++-+---} - 4\overset{2}{N}{}^*_{+++-+---}\,,\qquad \overset{1}{N}{}^*_{++--++--} + 4\overset{2}{N}{}^*_{++--++--}\,.$$

Anhand von (3.4) und (3.5) überzeugt man sich davon, daß sich bei diesen sowohl die Terme, die zweite Ableitungen des Weyl-Spinors enthalten, als auch die Absolutglieder wegheben. Folglich enthalten diese Linearkombinationen nur Produkte von Termen der Gestalt $\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{CDEF}$. Nach Auflösung der Verjüngungen nach dem im Kapitel 3 beschriebenen Verfahren und nach geeignetem Zusammenfassen der Glieder liefern die Linearkombinationen für $g \in \hat{\mathfrak{h}}$

$$2\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2 - \mathcal{D}^2 = 0, \qquad \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}} + \mathcal{C}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{C}}\mathcal{D} = 0,$$

$$\mathcal{B}^2 + \bar{\mathcal{B}}^2 + 2\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} = 0.$$

Durch eine Reihe rein algebraischer Umformungen, insbesondere durch mehrmalige Anwendung der für alle komplexen Zahlen μ gültigen Ungleichung $|\mu + \bar{\mu}| \leqq |\mu^2 + 1|$, erhält man das äquivalente System

$$\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} = 0, \qquad \mathcal{C} + \mathcal{D} = 0, \qquad |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = |\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|, \qquad \mathcal{D}^2 = \mathcal{A}\mathcal{B}. \tag{5.1}$$

Setzen wir in die Gleichungen $\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{C} + \mathcal{D} = 0$ die Newman-Penrose-Koeffizienten gemäß der Definition ein, so erhalten wir bei Verwendung der Bianchi-Identitäten (2.19) die bemerkenswerten Beziehungen

$$D\psi_2 = -2D\Lambda \quad \text{und} \quad \delta\psi_2 = \delta\Lambda. \tag{5.2}$$

Wenden wir die erste Kommutatorrelation von (2.9) auf die Funktion $\Lambda - \psi_2$ an, so ergibt sich

$$(\bar{\tilde{\varrho}} - \tilde{\varrho})\, D\Lambda = (\bar{\tilde{\varrho}} - \tilde{\varrho})\, D\psi_2 = 0. \tag{5.3}$$

2. In der Linearkombination

$$(\overset{1}{N}{}^{*}_{+-------} - 4\overset{2}{N}{}^{*}_{+-------}) - (\overset{1}{N}{}^{*}_{+---++++} - 4\overset{2}{N}{}^{*}_{+---++++})$$

sind keine Absolutglieder und — wie man anhand von (3.4) und (3.5) nachprüft — keine Terme mit zweiten Ableitungen des Weyl-Spinors enthalten. Da dieser Ausdruck nach (3.7) verschwinden muß, erhält man

$$\bar{\mathcal{A}}\mathcal{C} + 3\mathcal{A}\mathcal{C} - 4\mathcal{A}\mathcal{D} - 3\bar{\mathcal{A}}\mathcal{D} + \mathcal{A}\bar{\mathcal{E}} - 3\mathcal{B}\bar{\mathcal{D}} + \mathcal{B}\mathcal{E} - 4\mathcal{C}\mathcal{F} + 4\mathcal{D}\bar{\mathcal{F}} = 0.$$

Weiterhin sind im Realteil von $\overset{1}{N}{}^{*}_{++------} + 4\overset{2}{N}{}^{*}_{++------}$ keine zweiten Ableitungen und keine Absolutglieder enthalten. Es ergibt sich

$$\mathrm{Re}\,(-5\mathcal{A}\bar{\mathcal{B}} - \mathcal{A}\mathcal{B} + 4\bar{\mathcal{B}}\mathcal{F} + 5\mathcal{C}\mathcal{D} - \bar{\mathcal{C}}\mathcal{E}) = 0.$$

Schließlich müssen $\overset{1}{N}{}^{*}_{--------}$ und $\overset{2}{N}{}^{*}_{--------}$ für $g \in \mathfrak{h}$ verschwinden. Folglich gilt nach (3.4) bzw. (3.5)

$$16\psi_0\tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}_{-}{}^{B}\psi_{B---} = 2\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{----}\tilde{\nabla}^{AB}\psi_{----} - 32(\tilde{\nabla}_{-}{}^{A}\psi_{A---})^2 - 16\psi_0{}^2\psi_2,$$

$$4\psi_0\tilde{\nabla}_{--}\tilde{\nabla}_{+}{}^{B}\psi_{B---} = 4\tilde{\nabla}_{A-}\psi_{----}\tilde{\nabla}^{AB}\psi_{B---} - 4\psi_0{}^2\psi_2 + 8\Lambda\psi_0{}^2.$$

Setzt man dies in die Gleichungen $\overset{1}{N}{}^{*}_{++++----} = 0$ bzw. $\overset{2}{N}{}^{*}_{++++----} = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\mathcal{A}^2 - \bar{\mathcal{A}}^2 - 8\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} - 8(\mathcal{A} - \mathcal{F})^2 - 8(\bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{F}})^2$$
$$+ 4\mathcal{A}\bar{\mathcal{F}} + 4\bar{\mathcal{A}}\mathcal{F} - 8\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \mathcal{D}\mathcal{E} + \bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{E}} = 0,$$
$$-4\mathcal{A}^2 - 4\bar{\mathcal{A}}^2 - 2\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + 4\mathcal{A}\mathcal{F} + 4\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{F}}$$
$$- 17\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + 4\mathcal{D}\mathcal{E} + 4\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} = 0.$$

3. Bis hierher wurden alle Beziehungen ohne jegliche Voraussetzung an den Weyl-Spinor hergeleitet. Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf $U(x)$. Wir nehmen zunächst an, daß in einem Punkt $\mathcal{A} \neq 0$ gilt; wegen der Stetigkeit aller betrachteten Funktionen gilt dies auch in einer offenen Teilmenge von $U(x)$. Aus (5.1) folgt dann, daß auch $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ nicht verschwinden dürfen. Auf rein algebraischem Wege sind dann aus den Gleichungen des Schrittes 2 folgende Gleichungen ableitbar:

$$\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}} = 0, \qquad \mathcal{E} = 3\bar{\mathcal{D}}, \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\,\mathcal{A}. \tag{5.4}$$

Aus $\mathcal{E} = 3\bar{\mathcal{D}}$ ergibt sich nach Definition von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{D}$

$$\delta\psi_0 = 2\psi_0\bar{\tau} + \psi_0\tilde{\varkappa} - 3\psi_2\bar{\tilde{\varkappa}} \tag{5.5}$$

und folglich

$$\mathcal{D} = (-2\bar{\bar{\tau}} + \bar{\bar{\varkappa}})\,\psi_0 - 3\psi_2\bar{\varkappa}; \tag{5.6}$$

beachtet man noch $\mathcal{E} = -\mathcal{D}$, so folgt

$$3\delta\psi_2 = -\bar{\delta}\psi_0. \tag{5.7}$$

4. Nach (5.4) und (5.1) sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ rein imaginär und haben den gleichen Betrag, also sind nur die beiden Fälle $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ oder $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$ und damit nach (5.4) $\mathcal{B} = 2\mathcal{F}$ oder $\mathcal{B} = -2\mathcal{F}$ möglich. Beide Fälle können nicht stetig ineinander übergehen, ohne daß $\mathcal{B}$ und damit $\mathcal{A}$ verschwindet. Da in unserem betrachteten Punkt $\mathcal{A} \neq 0$ gilt, gilt aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung dieses Punktes entweder $\mathcal{B} = 2\mathcal{F}$ oder $\mathcal{B} = -2\mathcal{F}$. Die hergeleiteten Beziehungen können also differenziert werden. Aus $\mathcal{B} = 2\mathcal{F}$ erhält man durch algebraische Umformungen bei Beachtung von (2.16) und $\mathcal{B} \neq 0$ zunächst $\bar{\sigma} = -\bar{\varrho}$, $\bar{\bar{\varrho}} = -\bar{\varrho}$ und $\bar{\varrho} \neq 0$; berücksichtigt man dies in (5.3), so folgt $D\psi_2 = DA = 0$. Mit Hilfe der vierten Ricci-Identität von (2.11), (5.6) und $\mathcal{D}^2 = \mathcal{A}\mathcal{B}$ erhalten wir weiterhin, daß auch $\bar{\varkappa}$ und $\bar{\tau}$ rein imaginär sein müssen. Dann folgt aber aus (5.5) und (5.7) $\delta(3\psi_2 - \psi_0) = 0$. Aus $\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}} = 0$ folgt unmittelbar $D\psi_0 = 0$, so daß sich schließlich $3\psi_2 - \psi_0 = \text{const}$ ergibt. Völlig analog erhält man $3\psi_2 + \psi_0 = \text{const}$ für den Fall $\mathcal{B} = -2\mathcal{F}$.

5. Wir betrachten nun die Transformation der Basisspinoren

$$\begin{aligned} \eta_A' &= \frac{-1+i}{2}(\eta_A + \eta_A{}^+), & \eta_A'^+ &= \frac{-1-i}{2}(-\eta_A + \eta_A{}^+), \\ \eta_A'' &= \frac{1+i}{2}(\eta_A + i\eta_A{}^+), & \eta_A''^+ &= \frac{1-i}{2}(i\eta_A + \eta_A{}^+). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Diese bewirken eine zyklische Vertauschung der den Spinoren $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ zugeordneten Basisvektoren $\bar{l}_\mu$, $\bar{a}_\mu$ und $\bar{b}_\mu$ (vgl. [9, 10]). Es gilt $\eta_A'\eta'^{+A} = \eta_A''\eta''^{+A} = 1$; folglich bilden $\{\eta_A', \eta_A'^+\}$ und $\{\eta_A'', \eta_A''^+\}$ eine Basis im Spinorraum. Durch Berechnen der Koeffizienten (2.10) überzeugt man sich davon, daß $\eta_A', \eta_A'^+$ und $\eta_A'', \eta_A''^+$ auch Normalspinoren sind. Es ergibt sich u. a.

$$\psi_0' = -\frac{1}{2}(\psi_0 + 3\psi_2) \quad \text{und} \quad \psi_0'' = -\frac{1}{2}(\psi_0 - 3\psi_2). \tag{5.9}$$

Wir hatten im vorigen Schritt festgestellt, daß unter der Voraussetzung $\mathcal{A} \neq 0$ eine der Beziehungen $3\psi_2 \mp \psi_0 = \text{const}$ notwendig aus dem System (3.7) folgt. Aus (5.9) ist nun ersichtlich, daß in beiden Fällen eine Normalspinorbasis existiert, bezüglich der $\psi_0 = \text{const}$ gilt. Im folgenden sei die entsprechende Transformation von (5.8) ausgeführt; der Übersichtlichkeit wegen werden die Striche wieder weggelassen. Von allen bisher ermittelten Beziehungen vermerken wir lediglich $\psi_0 = \text{const}$, wobei die Konstante wegen (2.16) und (5.9) von Null verschieden ist.

6. Bezüglich der neuen Normalspinorbasis können natürlich alle bisherigen Überlegungen wiederholt werden. Wäre wiederum $\mathcal{A} \neq 0$, so würden insbesondere die Beziehungen (5.7) und $D\psi_2 = 0$ und damit $\delta\psi_2 = D\psi_2 = 0$ folgen; mit (5.2) ergäbe sich schließlich $A = \text{const}$, woraus aber auch (3.8)[8] $\psi_{ABCD} = 0$ im Widerspruch zu $\mathcal{A} \neq 0$ folgen würde. Es muß also in der neuen Basis $\mathcal{A} = 0$ gelten.

[8]) An dieser Stelle werden innerhalb des Beweises von Satz 3 erstmalig die Bachschen Gleichungen verwendet.

7. Gilt $\mathcal{A} = 0$, so folgt aus den in den Schritten 1 und 2 ohne jegliche Voraussetzung hergeleiteten Beziehungen

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{E} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^2 + \bar{\mathcal{F}}^2 = 0. \tag{5.10}$$

Trägt man darin die Newman-Penrose-Koeffizienten gemäß Definition ein, so ergibt sich bei Berücksichtigung von $\psi_0 = \text{const}$ nach einfacher Rechnung $\delta\psi_2 = 0$ und – nach (5.2) – auch $\delta\Lambda = 0$. Da wiederum aus $D\Lambda = 0$ sofort $\psi_{ABCD} = 0$ folgen würde, muß also $D\Lambda \neq 0$ und folglich – wegen (5.3) – $\tilde{\varrho} \in \mathbf{R}$ gelten. Aus $\mathcal{B} = 0$ folgt dann $\tilde{\sigma} \in \mathbf{R}$, also ist $\mathcal{F} \in \mathbf{R}$ und damit $\mathcal{F} = 0$.

8. Aus $\mathcal{A} = 0$ und $\mathcal{F} = 0$ folgt nun $\tilde{\nabla}_{-}{}^{G}\psi_{G---} = 0$. Differenzieren wir diese Gleichung und überschieben mit $\eta^{E}\eta^{+F}$ (vgl. (4.1)), so ergibt sich (man beachte $\mathcal{C} = \mathcal{D} = 0$) $\tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}_{-}{}^{B}\psi_{B---} = 0$, woraus man schließlich $\overset{1}{N}{}^{*}_{-------} = -16\psi_0{}^2\psi_2 = 0$ ableitet. Daraus folgt jedoch – wie schon mehrfach demonstriert – $\psi_{ABCD} = 0$. Der seit Schritt 3 untersuchte Fall $\mathcal{A} \neq 0$ führt somit stets zum Widerspruch, denn verschwindet der Weyl-Spinor, so gilt natürlich (bezüglich jeder beliebigen Basis) $\mathcal{A} = 0$. Die Hypothese $\mathcal{A} \neq 0$ ist folglich fallenzulassen.

9. Anknüpfend an Schritt 2 bleibt jetzt nur noch der Fall zu untersuchen, daß schon an dieser Stelle $\mathcal{A} = 0$ in $U(x)$ gilt. Dies ist kein trivialer Spezialfall der bisherigen Betrachtungen, da sich hierbei keine Beziehung der Art $2\mathcal{F} = \pm\mathcal{B}$ ergibt, die ja wesentlich benutzt wurde. Aus $\mathcal{A} = 0$ folgen wie in Schritt 7 die Beziehungen (5.10); wegen $\psi_0 \neq 0$ gilt also

$$D\psi_0 = \tilde{\varepsilon} = 0 \quad \text{und} \quad \delta\psi_0 = 4\psi_0\tilde{\tau}. \tag{5.11}$$

Berücksichtigen wir dies in der zweiten Kommutatorrelation von (2.9) für die Funktion ψ_0, so ergibt sich $D\delta\psi_0 = 4\psi_0(\tilde{\sigma}\bar{\tilde{\tau}} - \tilde{\tau}\bar{\tilde{\varrho}})$. Andererseits kann $D\delta\psi_0$ durch Differentiation von $\delta\psi_0 = 4\psi_0\tilde{\tau}$ bei Verwendung der ersten Ricci-Identität von (2.11) direkt als $D\delta\psi_0 = 4\psi_0\big(\tilde{\sigma}(\bar{\tilde{\varkappa}} - \bar{\tilde{\tau}}) + \bar{\tilde{\varrho}}(\tilde{\varkappa} - \tilde{\tau})\big)$ berechnet werden. Der Vergleich beider Beziehungen ergibt $\tilde{\varkappa}\bar{\tilde{\varrho}} = \tilde{\sigma}(2\bar{\tilde{\tau}} - \bar{\tilde{\varkappa}})$ wegen $\psi_0 \neq 0$. Setzt man $\delta\psi_0 = 4\psi_0\tilde{\tau}$ in $\mathcal{E} = 0$ ein, so ergibt sich weiterhin $3\tilde{\varkappa}\psi_2 = -\psi_0(2\bar{\tilde{\tau}} - \bar{\tilde{\varkappa}})$. Wir nehmen zunächst $2\bar{\tilde{\tau}} - \bar{\tilde{\varkappa}} \neq 0$ an. Dann folgt $3\tilde{\sigma}\psi_2 = -\bar{\tilde{\varrho}}\psi_0$, also $\mathcal{F} = 0$. Im weiteren kann wie in Schritt 8 vorgegangen werden; es ergibt sich auch hier $\psi_{ABCD} = 0$. Trifft $2\bar{\tilde{\tau}} - \bar{\tilde{\varkappa}} \neq 0$ nicht zu, so sind nichttriviale Lösungen wiederum nur dann möglich, wenn es einen Punkt mit $\psi_2 \neq 0$ gibt. Dann folgt $\tilde{\varkappa} = 0$, also ist wegen $2\bar{\tilde{\tau}} - \bar{\tilde{\varkappa}} = 0$ auch $\tilde{\tau} = 0$. Folglich gilt nach (5.11) $\psi_0 = \text{const}$. Wir haben somit die gleichen Voraussetzungen wie in Schritt 7, können also wie dort fortfahren und erhalten schließlich auch in diesem Fall $\psi_{ABCD} = 0$.

10. Damit sind nun endgültig alle Möglichkeiten untersucht. Die Annahme, daß es einen Punkt $x \in M_4$ gibt, in dem der zur Lösung g gehörende Weyl-Spinor vom Petrov-Typ I ist, führte in jedem Fall zum Widerspruch. Folglich ist ψ_{ABCD} in ganz M_4 vom Typ D oder 0. Wäre nun der Weyl-Spinor in einem Punkt $x \in M_4$ vom Typ D, so müßte dies wiederum aus Stetigkeitsgründen in einer offenen Menge gelten. Dann wäre g aber auch Lösung von (3.6) für alle λ im Widerspruch zu Satz 2. Folglich ist der zur Lösung g gehörende Weyl-Spinor vom Petrov-Typ 0. Andererseits ist $\psi_{ABCD} = 0$ tatsächlich Lösung von (3.7). Satz 3 ist damit vollständig bewiesen ∎

6. Petrov-Typ I des Weyl-Spinors und $g \in \mathfrak{h}$

In diesem Kapitel wird die Lösungsmenge des Systems (3.6) für (1,3)-zerlegbare Metriken, die geeigneten Zusatzbedingungen genügen, bestimmt. Im folgenden Kapitel 7 wird gezeigt, daß diese von wichtigen Klassen statischer Metriken erfüllt werden. Man beachte, daß im Beweis des folgenden Satzes 4 aus (3.6) zunächst unter schwächeren Voraussetzungen, als sie in ihm formuliert sind, eine Reihe einschränkender Bedingungen an die Newman-Penrose-Koeffizienten hergeleitet werden.

Es sei g eine (1,3)-zerlegbare Metrik und $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Normalspinorbasis. Für g formulieren wir die folgende Voraussetzung[9])

(V2) $\quad \tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} = 0$ und $\tilde{\nabla}_{--}\psi_{+++-} \in \mathbf{R}$.

Diese ist äquivalent zur Bedingung

$$D\psi_0 - 4\psi_0\bar{\varepsilon} + \psi_0\bar{\bar{\varrho}} + 3\psi_2\bar{\sigma} = 0 \quad \text{und} \quad -\psi_0\bar{\sigma} - 3\psi_2\bar{\bar{\varrho}} \in \mathbf{R} \tag{6.1}$$

sowie zur Bedingung

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{l}^\varrho\tilde{a}^\mu\tilde{b}^\nu\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{R}_{\mu]\nu} = \tilde{a}^\varrho\tilde{b}^\mu\tilde{l}^\nu\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{R}_{\mu]\nu} = \tilde{b}^\varrho\tilde{l}^\mu\tilde{a}^\nu\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{R}_{\mu]\nu} = 0 \\ &(\tilde{l}^\varrho\tilde{a}^\mu\tilde{a}^\nu - \tilde{l}^\varrho\tilde{b}^\mu\tilde{b}^\nu)\,\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{R}_{\mu]\nu} = 0 \end{aligned}\right\},$$

in der $\tilde{l}_\mu$, $\tilde{a}_\mu$ und $\tilde{b}_\mu$ die paarweise orthogonalen normierten Eigenvektoren des Ricci-Tensors $\tilde{R}_{\mu\nu}$ bezeichnen (vgl. [9, 10]).

Satz 4: *Eine (1,3)-zerlegbare Metrik g, die der Voraussetzung* (V2) *genügt, ist genau dann Lösung des Systems* (3.6) *für $0 \leqq \lambda < 4$, wenn der zu g gehörende Weyl-Spinor verschwindet.*

Folgerung 4: *Ist g eine (1,3)-zerlegbare Metrik der Voraussetzung* (V2), *so gilt für die skalare Wellengleichung* (1.1), *die Maxwellschen Gleichungen* (1.2) *oder die Weyl-Gleichung* (1.3) *das Huygenssche Prinzip genau dann, wenn der Raum (M_4, g) konformflach ist.*

Beweis von Satz 4: g sei eine Lösung des Systems (3.6). Wie beim Beweis von Satz 3 nehmen wir zunächst an, daß es einen Punkt und folglich eine offene Menge gibt, in der der Weyl-Spinor zu g vom Petrov-Typ I ist. $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ sei eine Normalspinorbasis, es gelte also (2.16). Im folgenden gehen wir in Schritten 1—8 vor.

1. Wir betrachten die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} K^{(p)} = \operatorname{Re}\Big\{&-\frac{1}{2}\,\psi_2{}^2(\overset{p}{N}{}^*_{--------} + \overset{p}{N}{}^*_{++++----}) \\ &+ 2\psi_0\psi_2\overset{p}{N}{}^*_{++------} - \psi_0{}^2\overset{p}{N}{}^*_{++--++--}\Big\}, \qquad p = 1, 2. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.4) und (3.5) folgt, daß sich in $K^{(p)}$ diejenigen Terme, die zweite Ableitungen des Weyl-Spinors enthalten, sowie die Absolutglieder wegheben. Somit enthält $K^{(p)}$ nur Produkte von Termen der Gestalt $\tilde{\nabla}_{AB}\psi_{CDEF}$. Es ist $K^{(p)}$ die einzig mögliche Kombination von Komponenten der Spinoren $\overset{1}{N}{}^*$, $\overset{2}{N}{}^*$ und C^* mit dieser Eigenschaft. Nach aufwendigen Rechnungen ergibt sich

$$\begin{aligned} K^{(1)} = {} & \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} + 4(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{b}}) \\ & + (\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}})^2 + 4([\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}}] - [\mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}])^2 + 4([\mathfrak{c} - \bar{\mathfrak{c}}] - [\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}])^2, \\ K^{(2)} = {} & \frac{1}{4}\,\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{b}}) - \frac{1}{4}\,(\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}} - 2\bar{\mathfrak{b}}) \\ & + \frac{1}{4}\,(\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}})^2 + ([\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}}] - [\mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}])^2 - \frac{1}{4}\,([\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}}] - 2[\mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}])^2, \end{aligned}$$

[9]) Die schwächere Voraussetzung (V1), für die bereits eine Reihe von Teilaussagen abgeleitet werden kann, wird im Beweis von Satz 4 formuliert werden.

mit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \psi_2(-\tilde{\nabla}_{--}\psi_{----} - \tilde{\nabla}_{--}\psi_{++++}) + 2\psi_0\tilde{\nabla}_{--}\psi_{++--}\,,\\
\mathfrak{b} &= \psi_2(-\tilde{\nabla}_{--}\psi_{----} + \tilde{\nabla}_{--}\psi_{++++} - 2\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{+++-}) + 2\psi_0\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{+---}\,,\\
\mathfrak{c} &= \psi_2\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{----} - \psi_0\tilde{\nabla}_{+-}\psi_{++--}\,,\\
\mathfrak{d} &= \psi_2\tilde{\nabla}_{--}\psi_{+---} - \psi_0\tilde{\nabla}_{--}\psi_{+++-}\,.
\end{aligned}$$

Für $g \in \mathfrak{h}$ gilt nach (3.6) $K^{(1)} - \lambda K^{(2)} = 0$, woraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} + (4 - \lambda)(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{b}}) + \frac{\lambda}{4}(\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}} - 2\bar{\mathfrak{b}})\\
&+ \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)(\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}})^2 + (4 - \lambda)([\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}}] - [\mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}])^2\\
&+ \frac{\lambda}{4}([\mathfrak{c} + \bar{\mathfrak{c}}] - 2[\mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}])^2 + 4([\mathfrak{c} - \mathfrak{d}] - [\bar{\mathfrak{c}} - \bar{\mathfrak{d}}])^2 = 0. \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

2. Letztere Gleichung wurde ohne jegliche Voraussetzung an den Weyl-Spinor aus (3.6) hergeleitet. Ist nun $0 \leqq \lambda < 4$, so sind alle Summanden auf ihrer linken Seite nichtnegativ, mit Ausnahme des letzten. Die folgende zusätzliche Voraussetzung

(V1) Für die Metrik g gelte $\mathfrak{c} - \mathfrak{d} \in \mathbf{R}$

gewährleistet, daß dieser Summand verschwindet. Diese ist zu jeder der folgenden Bedingungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\psi_2\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} - \psi_0\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G++-} \in \mathbf{R},\\
&\operatorname{Im}\{2\psi_0\psi_2(\bar{\varrho} - 2\bar{\varepsilon}) + (3\psi_2{}^2 - \psi_0{}^2)\,\bar{\sigma}\} = 0, \qquad (6.3)\\
&\tilde{l}^\varrho\tilde{a}^\mu\tilde{b}^\nu\{\psi_2(\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{\tilde{R}}_{\mu]\nu} + \tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{R}_{\nu]\mu}) + \psi_0\tilde{\tilde{\nabla}}_{[\mu}\tilde{R}_{\nu]\varrho}\} = 0.
\end{aligned}$$

In letzterer bezeichnen $\tilde{l}_\mu$, $\tilde{a}_\mu$ und $\tilde{b}_\mu$ wiederum die Eigenvektoren des Ricci-Tensors $\tilde{R}_{\mu\nu}$.[10])

3. Für das Weitere wird angenommen, daß die Metrik g (**V1**) genügt. In (6.2) verschwindet dann der letzte Summand und die linke Seite dieser Gleichung wird für $\lambda \in [0, 4)$ positiv definit. Folglich muß jeder Summand einzeln verschwinden. Mit Hilfe von (2.17) ermittelt man zunächst

$$\mathfrak{a} = 2(\psi_2\delta\psi_0 - \psi_0\delta\psi_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\mathfrak{c} = \psi_2 D\psi_0 - \psi_0 D\psi_2\,.$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\operatorname{Re}\mathfrak{c}$ nach (6.2) verschwinden müssen, folgt daraus wegen $\psi_0 \neq 0$

$$\psi_2 = \alpha\psi_0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \text{const}. \qquad (6.4)$$

Auf dem gleichen Wege ergibt sich aus $\mathfrak{b} = 0$ und $\mathfrak{c} - \mathfrak{d} = 0$

$$4\alpha\bar{\tau} - 2\alpha\bar{\varkappa} + (1 - 3\alpha^2)\,\bar{\bar{\varkappa}} = 4\alpha\bar{\varepsilon} + 2\alpha\bar{\bar{\varrho}} + (1 - 3\alpha^2)\,\bar{\sigma} = 0. \qquad (6.5)$$

Weitere Informationen lassen sich nicht aus (6.2) gewinnen. Wäre $\alpha = 0$, so folgte aus (6.5) $\bar{\varkappa} = \bar{\sigma} = 0$; dann gilt aber nach der dritten Ricci-Identität von (2.11)

[10]) Uns ist keine Metrik bekannt, für die Voraussetzung (**V1**) nicht gilt. Ist z. B. der Weyl-Spinor vom Petrov-Typ D, so reduziert sich (**V1**) zu $\bar{\sigma} \in \mathbf{R}$; dies kann aber stets mit einer Phasentransformation $\eta_A \to e^{i\varphi}\eta_A$ erreicht werden. Folglich kann die Beziehung (6.1) auch als Ausgangspunkt für die Diskussion von Typ D-Metriken genommen werden.

$\psi_0 = 0$ und ψ wäre vom Typ D. Für das Folgende kann also $\alpha \neq 0$ angenommen werden; (6.5) ist dann äquivalent zu

$$4\bar{\tau} = 2\varkappa - \beta\bar{\bar{\varkappa}} \quad \text{und} \quad 4\bar{\varepsilon} = -2\bar{\bar{\varrho}} - \beta\bar{\sigma} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1-3\alpha^2}{\alpha}. \tag{6.6}$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß der Spinor des Zusammenhanges $\tilde{A}_{AB}$ bereits vollständig durch $\tilde{B}_{AB}$ bestimmt ist.

4. Zur besseren Übersicht führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$z_1 = \tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}_-{}^B\psi_{B---}, \qquad z_2 = \tilde{\nabla}_{--}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B---}, \qquad z_3 = \tilde{\nabla}_{--}\tilde{\nabla}_-{}^B\psi_{B+--},$$
$$z_4 = \tilde{\nabla}_{+-}\tilde{\nabla}^+{}_B\psi_{B+--}, \qquad z_5 = \tilde{\nabla}_{++}\tilde{\nabla}_+{}^B\psi_{B---}, \qquad z_6 = \tilde{\nabla}_{++}\tilde{\nabla}_-{}^B\psi_{B+--}.$$

Durch Berechnung der Terme $\delta(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = 0$, $\bar{\delta}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = 0$ und $D(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = 0$ ergeben sich die Zusammenhänge

$$\left.\begin{aligned} \alpha\bar{z}_5 + z_3 &= -4\alpha\bar{\tau}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+++} + \left((3\alpha^2 - 1)\,\bar{\bar{\varrho}} - 2\alpha\bar{\sigma}\right)\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} \\ \alpha\bar{z}_2 + z_6 &= -4\alpha\bar{\bar{\tau}}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+++} + \left((3\alpha^2 - 1)\,\bar{\bar{\sigma}} - 2\alpha\bar{\varrho}\right)\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} \\ -\alpha z_1 - \bar{z}_4 &= 4\alpha\bar{\varepsilon}\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} + \left((3\alpha^2 - 1)\,\varkappa + 2\alpha\bar{\bar{\varkappa}}\right)\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+++} \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt bei Beachtung von (6.6) $\alpha(z_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_4 - z_6 = 0$. Durch Differentiation der Relationen (6.6) erhält man nach einer Reihe von Umformungen bei Einbeziehung der 2., 3. und 5. Ricci-Identität von (2.11) die Beziehung

$$\psi_0 = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)(|\varkappa|^2 + |\bar{\sigma}|^2). \tag{6.8}$$

Für $\alpha = \pm 1$ folgt aus ihr und (6.4) $\psi_2 = \psi_0 = 0$; für das Folgende kann also ebenfalls $\alpha^2 \neq 1$ angenommen werden.

5. Obwohl für die Metrik g, die nur der recht schwachen Voraussetzung (**V1**) genügt, aus (3.6) eine Reihe notwendiger und übersichtlicher Bedingungen abgeleitet wurden, reichen diese noch nicht aus, einen Widerspruch zur Annahme, ψ_{ABCD} wäre vom Petrov-Typ I, zu konstruieren. Für das Weitere sei deshalb angenommen, daß die Metrik g der Voraussetzung (**V2**) genügt, die offensichtlich eine Verschärfung von Voraussetzung (**V1**) darstellt (man vergleiche etwa (6.1) mit (6.3)). Alle bisherigen Resultate bleiben folglich gültig. Setzt man

$$\mathfrak{r} = \tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+++} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} = \tilde{\nabla}_{+-}\psi_{+---},$$

so erhält man zunächst unter Berücksichtigung der in den Schritten 1—4 hergeleiteten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} = \tilde{\nabla}_+{}^G\psi_{++++} = \tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G++-} = \tilde{\nabla}_+{}^G\psi_{G+--} = 0 \\ &\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+++} = \mathfrak{r}, \quad \tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G+--} = \alpha\mathfrak{r}, \quad \tilde{\nabla}_+{}^G\psi_{G---} = \bar{\mathfrak{r}}, \quad \tilde{\nabla}_+{}^G\psi_{G++-} = \alpha\bar{\mathfrak{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Diese Formeln gestatten es nun, aus den Termen $z_1, \ldots, z_6$ die zweiten Ableitungen des Weyl-Spinors zu eliminieren. Dabei geht man folgendermaßen vor: Zunächst erhält man z_1 und z_4 durch Differentiation von $\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G---} = 0$ bzw. $\tilde{\nabla}_-{}^G\psi_{G++-} = 0$. Es ergeben sich z_3 und z_6 dann aus den Bachschen Gleichungen $C^*_{----} = 0$ bzw. $C^*_{+-+-} = 0$. Anschließend bestimmt man z_2 und z_5 aus der 2. bzw. 1. Gleichung von (6.7). Berücksichtigt man zusätzlich die sich aus $C^*_{++--} = 0$ ergebende Beziehung zwischen z_4 und z_5, so erhält man

$$\varkappa\bar{\mathfrak{r}} + \bar{\bar{\varkappa}}\mathfrak{r} = \psi_0\psi_2 + 2\Lambda\psi_0 \tag{6.10}$$

und schließlich

$$\psi_0 z_1 = \mathfrak{r}\hat{\mathfrak{s}} - \psi_0^2\psi_2 - 2\Lambda\psi_0^2, \qquad \psi_2 z_2 = 2\bar{\mathfrak{r}}\hat{\mathfrak{s}} + \alpha\bar{\mathfrak{r}}\bar{\hat{\mathfrak{s}}} - \psi_0\psi_2^2 + 4\Lambda\psi_0\psi_2,$$

$$\psi_0 z_3 = \mathfrak{r}\hat{\mathfrak{s}} + \psi_0^2\psi_2, \qquad \psi_0 z_4 = \bar{\mathfrak{r}}\hat{\mathfrak{s}} + \psi_0\psi_2^2 + 2\Lambda\psi_0\psi_2,$$

$$\psi_0 z_5 = \bar{\mathfrak{r}}\hat{\mathfrak{s}} - \psi_0^3, \qquad \psi_0 z_6 = -\mathfrak{r}\bar{\hat{\mathfrak{s}}} + \psi_0\psi_2^2 - 4\Lambda\psi_0\psi_2.$$

6. Damit können nun die Komponenten

$$\overset{p}{N}{}^*_{+---+---}, \quad \overset{p}{N}{}^*_{+++-+---} \quad \text{und} \quad \overset{p}{N}{}^*_{++--++--} \qquad (p = 1, 2)$$

berechnet werden. Dabei ist es zweckmäßig, die früheren Bezeichnungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ zu verwenden. Man beachte, daß nach (V2) und (6.9) gilt $\mathcal{A} = \tilde{\nabla}_{+-}\psi_{---} = \tilde{\nabla}_{--}\psi_{+--}$, $\mathcal{B} = \tilde{\nabla}_{+-}\psi_{++--} = \tilde{\nabla}_{--}\psi_{+++-} \in \mathbf{R}$, $\mathcal{C} = -3\alpha\mathfrak{r} + \hat{\mathfrak{s}}$, $\mathcal{D} = \bar{\mathfrak{r}} + \hat{\mathfrak{s}}$.
Nach Schritt 5 ergibt sich aus (3.4) und (3.5)

$$\overset{1}{N}{}^*_{+---+---} = 4\mathcal{A}\mathcal{B} - 2\mathcal{C}^2 - 2\mathcal{D}^2, \qquad \overset{2}{N}{}^*_{+---+---} = 0,$$

$$\overset{1}{N}{}^*_{+++-+---} = 2(\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{C}}\mathcal{D} + \mathcal{C}\bar{\mathcal{D}}), \qquad \overset{2}{N}{}^*_{+++-+---} = 0,$$

$$\overset{1}{N}{}^*_{++--++--} = -4(\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} - 4\alpha^2\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} - 8\Lambda\psi_2^2),$$

$$\overset{2}{N}{}^*_{++--++--} = -4\alpha^2\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} - 8\Lambda\psi_2^2.$$

Für $g \in \mathfrak{h}$ müssen also folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{gathered} 2\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2 - \mathcal{D}^2 = 0, \qquad \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}} + \mathcal{C}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{C}}\mathcal{D} = 0, \\ -\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} + \alpha^2(4 + \lambda)\,\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} + 2(4 + \lambda)\,\Lambda\psi_2^2 = 0. \end{gathered} \tag{6.11}$$

7. Durch gleiche Überlegungen wie in Schritt 1 beim Beweis von Satz 3 erhält man aus den beiden ersten Beziehungen von (6.11) $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ und $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$. Aus $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$ leitet man nach einigen Umformungen

$$\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} = -\psi_0^2\psi_2 - 2\Lambda\psi_0^2 \tag{6.12}$$

ab, womit man aus der letzten Beziehung von (6.11) $\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} + (4 + \lambda)\,\psi_2^3 = 0$ erhält. Gilt nun $\alpha^2 > 1$, so folgt aus (6.8) und (6.4) $\psi_2 \geqq 0$. Die vorige Gleichung ist dann aber für alle $\lambda \in [0, 4)$ positiv definit (man beachte $\mathcal{B} \in \mathbf{R}$), aus ihr folgt also insbesondere $\psi_2 = 0$ und nach (6.4) auch $\psi_0 = 0$, also $\psi_{ABCD} = 0$. Gilt $\alpha^2 < 1$, so erhält man aus $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ durch algebraische Umformungen unter Verwendung der schon gewonnenen Beziehungen $\tilde{\sigma} = \tilde{\varrho} = \tilde{\varepsilon} = 0$.

8. Gilt letzteres, so können mit Hilfe der Beziehungen (6.8) und der Ricci-Identitäten (2.11) die Ableitungen des Weyl-Spinors eliminiert und somit die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umgewandelt werden. Es ergibt sich bei Verwendung der 3. und 5. Identität von (2.11) aus (6.8) $\delta\psi_0 = 4\varkappa\psi_0 + (\alpha - 1/\alpha) \times (\bar{\bar{\varkappa}}\psi_0 + \varkappa\psi_2 + 2\varkappa\Lambda)$. Setzt man dies in die Definition von $\mathfrak{r}$ ein und verwendet (6.10) sowie (6.8), so ergibt sich schließlich $\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} = -2\psi_0^2\Lambda$. Vergleicht man dies mit (6.12), so folgt $\psi_0^2\psi_2 = \alpha\psi_0^3 = 0$ und damit wiederum das Verschwinden des Weyl-Spinors.

Damit führte auch im Beweis von Satz 4 die Annahme, es gäbe einen Punkt, in dem der zu g gehörende Weyl-Spinor vom Petrov-Typ I ist, in jedem Fall zum Widerspruch. Nach völlig analogen Überlegungen wie am Ende des Beweises von Satz 3 folgt dann, daß der Weyl-Spinor der Lösung g notwendig verschwindet ∎

7. Beispiele

Die erste, 1916 von K. Schwarzschild gefundene Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist die Metrik eines statischen kugelsymmetrischen Feldes im Vakuum. Der Konformkrümmungstensor einer solchen Metrik ist stets vom Petrov-Typ D (siehe z. B. [26: S. 179ff.]). In Riemannschen Räumen mit einer *Schwarzschild-Metrik* gilt somit nach Folgerung 2 für die Gleichungen (1.1)—(1.3) das Huygenssche Prinzip nicht.

1917 wurde von H. Weyl die Klasse der *zylinder- (rotations-) symmetrischen statischen Metriken* entdeckt. Eine solche Metrik hat in kanonischen Zylinderkoordinaten r, θ, z das Linienelement (siehe [27: S. 266)]

$$ds^2 = f^2\, dt^2 - h^2(dr^2 + dz^2) - \frac{r^2}{f^2}\, d\theta^2, \tag{7.1}$$

wobei h und f Funktionen von r und z sind. In [10, 17] wurde bewiesen, daß der zur Metrik (7.1) gehörende Konformkrümmungstensor im allgemeinen vom Petrov-Typ I ist. Weiterhin wurde in [10] gezeigt, daß die statischen zylindersymmetrischen Metriken (7.1) eine Normalspinorbasis $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ besitzen, für die $D\psi_0 = \tilde{\sigma} = \tilde{\varrho} = \tilde{\varepsilon} = 0$ gilt. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß diese Metriken (V2) erfüllen (man vergleiche etwa mit (6.1)). Folglich gilt nach Folgerung 4, daß für die skalare Wellengleichung (1.1), die Maxwellschen Gleichungen (1.2) oder die Weyl-Gleichung (1.3) innerhalb der Klasse der statischen zylindersymmetrischen Metriken das Huygenssche Prinzip genau dann gilt, wenn der zugehörige Konformkrümmungstensor verschwindet.

Als nächstes betrachten wir (1,3)-zerlegbare Metriken g mit der Eigenschaft, daß der *zugrunde liegende (dreidimensionale) Raum* $(M_3, \bar{g})$ *konformflach* ist. Für solche Metriken existiert ein Koordinatensystem, in dem die Fundamentalform die Gestalt

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{2\varphi}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \tag{7.2}$$

mit einer hinreichend glatten Funktion $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ besitzt. In [10] wurde gezeigt, daß der Petrov-Typ des Konformkrümmungstensors zu (7.2) von der Gestalt der Funktion φ abhängt; es ist sowohl Typ I, Typ D als auch Typ 0 möglich. Ein dreidimensionaler Raum $(M_3, \bar{g})$ ist genau dann konformflach, wenn

$$\tilde{\nabla}_{[\varrho}\tilde{L}_{\mu]\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{L}_{\mu\nu} := -\tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\,\bar{g}_{\mu\nu}\tilde{R} \tag{7.3}$$

gilt (siehe z. B. [3: S. 10]). Mit Hilfe von (2.14) erhält man als Spinoräquivalent des Tensors $\tilde{L}$

$$\tilde{L}_{\mu\nu}\tilde{\sigma}^{\mu}_{AB}\tilde{\sigma}^{\nu}_{CD} = -2\psi_{ABCD} + (\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC})\,\Lambda,$$

so daß die Bedingung (7.3) in spinorieller Form

$$\varepsilon_{AE}(-\tilde{\nabla}_F{}^G\psi_{GBCD} + \varepsilon_{B(C}\tilde{\nabla}_{D)F}\Lambda) + \varepsilon_{BF}(-\tilde{\nabla}_A{}^G\psi_{GCDE} + \varepsilon_{E(C}\tilde{\nabla}_{D)A}\Lambda) = 0 \tag{7.4}$$

lautet. Ist nun $\{\eta_A, \eta_A{}^+\}$ eine Normalspinorbasis und überschiebt man (7.4) mit $\eta^A\eta^B\eta^C\eta^D\eta^{+E}\eta^F$, so folgt unmittelbar $\tilde{\nabla}_{--}{}^G\psi_{G---} = 0$. Wird dagegen (7.4) mit $\eta^A\eta^B\eta^C\eta^{+D}\eta^{+E}\eta^{+F}$ überschoben, so ergibt sich zunächst $\tilde{\nabla}_{--}\psi_{+++-} \doteq \tilde{\nabla}_{++}\psi_{+---}$. Dies ist jedoch — wie man anhand von (2.17) leicht nachprüft — äquivalent zu $\tilde{\nabla}_{--}\psi_{+++-} \in \mathbf{R}$. Folglich erfüllen auch die Metriken (7.2) die Voraussetzung (V2) und nach Folgerung 4 gilt innerhalb dieser Klasse das Huygenssche Prinzip für (1.1), (1.2) oder (1.3) genau dann, wenn der Konformkrümmungstensor verschwindet.

Die (1,3)-zerlegbaren Metriken mit $C_{ijkl} = 0$ können *explizit* angegeben werden. In [3] wurde gezeigt, daß ein Raum (M_4, g) mit einer Metrik der Gestalt (2.1) genau dann konformflach ist, wenn $(M_3, \tilde{g})$ ein Raum konstanter Krümmung ist. Die dreidimensionalen Räume konstanter Krümmung sind wohlbekannt (vgl. etwa [26]); ihre Metrik kann in der Form

$$d\tilde{s}^2 = K^2 \left(1 + \frac{\varepsilon r^2}{4}\right)((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2),$$

$$K = \text{const}, \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}, r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

geschrieben werden. Wir wollen diesen Satz am Beispiel der Metriken (7.2) anwenden und betrachten dazu die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^\mu)^2} + du = 0, \tag{7.5}$$

wobei c und d beliebige, hinreichend glatte Funktionen der Ortskoordinaten x^1, x^2 und x^3 seien. Die Frage ist, für welche Funktionen c und d bei (7,5) das Huygenssche Prinzip gilt. Zunächst multiplizieren wir (7.5) mit c^2 und setzen $c^2 = e^{-2\varphi}$; es ergibt sich eine hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung, wobei die Koeffizienten des Hauptteils eine Metrik der Form (7.2) bilden. Berechnet man die Christoffel-Symbole zu (7.2), so erhält man die zu (7.5) äquivalente, koordinateninvariante Gleichung

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j u + a^i\nabla_i u + d\, e^{-2\varphi}u = 0 \quad \text{mit} \quad a_i = -\partial_i\varphi.$$

Diese ist nicht selbstadjungiert, läßt sich aber wegen $a_i = -\partial_i\varphi$ durch die Eichtransformation (vgl. [2]) $u = e^{\varphi/2}v$ in die bezüglich huygensschen Verhaltens äquivalente Gleichung

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j v + \left(\frac{\tilde{R}}{8} + d\, e^{-2\varphi}\right) v = 0 \tag{7.6}$$

überführen. Die erste notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips (siehe [2]) bei (7.6) lautet[11])

$$\frac{\tilde{R}}{8} + de^{-2\varphi} = \frac{\tilde{R}}{6} \Leftrightarrow d = \frac{\tilde{R}}{24} e^{2\varphi}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist (7.6) genau die Gleichung (1.1) mit der Metrik (7.2). In Anwendung der obigen Sätze ergibt sich somit das Resultat, daß bei (7.5) genau dann das Huygensches Prinzip gilt, wenn c und d Funktionen des Typs $c^2 = K^{-2}$ und $d = 0$ oder $c^2 = K^{-2}(1 \pm r^2/4)^2$ und $d = \pm(1 \pm r^2/4)^{-2}$ sind.

Abschließend möchte der Autor Herrn Prof. Dr. V. Wünsch für zahlreiche Anregungen zu vorliegender Arbeit und für dessen ständiges Interesse seinen Dank aussprechen.

LITERATUR

[1] Friedlander, F. G.: The wave equation on a curved space-time. Cambridge: University Press 1975.

[2] Günther, P.: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Klasse **100** (1952) 2, 1–43.

[11]) Man beachte, daß bei (1,3)-zerlegbaren Metriken $R = -\tilde{R}$ gilt (vgl. [10]).

[3] GÜNTHER, P.: Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Klasse **102** (1957) 1, 1–50.

[4] GÜNTHER, P.: Über die Darbouxsche Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten. Math. Nachr. **22** (1960), 285–321.

[5] GÜNTHER, P.: Ein Beispiel einer nichttrivialen huygensschen Differentialgleichung mit vier unabhängigen Variablen. Arch. Rat. Mech. Anal. **18** (1965), 103–106.

[6] GÜNTHER, P.: Einige Sätze über huygenssche Differentialgleichungen. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-nat. Reihe **14** (1965), 497–507.

[7] GÜNTHER, P., und V. WÜNSCH: Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip I. Math. Nachr. **63** (1974), 97–121.

[8] HADAMARD, J.: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale University Press 1923.

[9] ILLGE, R.: Zum Abhängigkeitsgebiet der Lösung hyperbolischer Differentialgleichungssysteme in statischen Raum-Zeiten. Dissertation. Erfurt: Pädagogische Hochschule 1984.

[10] ILLGE, R.: Spinoren in statischen Raum-Zeiten. Math. Nachr. **128** (1986), 43–66.

[11] KRAMER, D., et al.: Exact solutions of Einstein's field equations. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1980.

[12] MANKIN, R.: Über sphärische Wellenfamilien höherer Ordnung bei huygensschen Differentialgleichungen. Math. Nachr. **108** (1982), 299–304.

[13] MCLENAGHAN, R. G.: An explizit determination of the empty space-times on which the wave equation satisfies Huygens' principle. Proc. Cambr. Philos. Soc. **65** (1969), 139–155.

[14] MCLENAGHAN, R. G.: On the validity of Huygens' principle for second order partial differential equations with four independent variables. Part I: Derivation of necessary conditions. Ann. Inst. H. Poincaré **A 20** (1974), 153–188.

[15] MCLENAGHAN, R. G.: Huygens' principle. Ann. Inst. H. Poincaré **A 37** (1982), 211–236.

[16] NEWMAN, E. T., and R. PENROSE: An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J. Math. Phys. **3** (1962), 566–578.

[17] PATEL, M. D.: An axially symmetric line element and Petrov's classification. Vidya **21** (1978), 36–41.

[18] PERJÉS, Z.: Spinor treatment of stationary space-times. J. Math. Phys. **11** (1970), 3383–3391.

[19] PIRANI, F. A. E.: Introduction to gravitational radiation theory. In: Lectures in General Relativity. Brandeis summer institute in theoretical physics 1964 (Ed.: S. DESER and W. FORD). Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1965, 251–373.

[20] RINKE, B., und V. WÜNSCH: Zum Huygensschen Prinzip bei der skalaren Wellengleichung. Beitr. z. Analysis **18** (1981), 43–75.

[21] RIESZ, M.: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[22] v. SCHEIDT, J.: Vereinfachter Beweis zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei statischen Differentialgleichungen. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Univ. 1971.

[23] SCHIMMING, R.: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei einer speziellen Metrik. ZAMM **51** (1971), 201–208.

[24] SCHIMMING, R.: Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und ebener Symmetrie. Math. Nachr. **59** (1974), 129–162.

[25] SCHIMMING, R.: Das Huygenssche Prinzip bei linearen hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für allgemeine Felder. Beitr. z. Analysis **11** (1978), 45–90.

[26] STEPHANI, H.: Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1977.

[27] WEYL, H.: Raum-Zeit-Materie. Berlin: Springer-Verlag 1923.

[28] WÜNSCH, V.: Über selbstadjungierte huygenssche Differentialgleichungen mit vier unabhängigen Variablen. Math. Nachr. **47** (1970), 131–154.

[29] WÜNSCH, V.: Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip II. Math. Nachr. **73** (1976), 19–36.

[30] WÜNSCH, V.: Über eine Klasse konforminvarianter Tensoren. Math. Nachr. **73** (1976), 37–58.

[31] WÜNSCH, V.: Cauchy-Problem und Huygenssches Prinzip bei einigen Klassen spinorieller Feldgleichungen I, II. Beitr. z. Analysis **12** (1978), 47–76 und **13** (1979), 147–177.

[32] WÜNSCH, V.: Charakterisierung von Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten durch Relationen zwischen ihren Krümmungsspinoren unter Benutzung eines modifizierten Newman-Penrose-Kalküls. Math. Nachr. 89 (1979), 321–336.
[33] WÜNSCH, V.: Selbstadjungierte huygenssche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für nichtskalare Spintensorfelder. Math. Nachr. 94 (1980), 211–242.
[34] WÜNSCH, V.: Cauchy's problem and Huygens' principle for relativistic higher spin wave equations in an arbitrary curved space-time. Gen. Rel. Grav. 17 (1985), 15–38.

Manuskripteingang: 07. 06. 1985

VERFASSER:

Dr. REINHARD ILLGE
Sektion Mathematik/Physik der
Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“
Nordhäuser Straße 63
DDR-5064 Erfurt

M. J. VIŠIK und A. V. FURSIKOV: **Mathematische Probleme der statistischen Hydromechanik** (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik: Band 41). Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G. 1986; 428 S. (Übers. a. d. Russ.; Moskau, Verlag Nauka 1980).

Das vorliegende Buch ist die erste mathematische Monographie, die der Darlegung strenger Resultate in der statistischen Hydrodynamik gewidmet ist. Die erste exakte Problemstellung zur statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen geht bekanntlich auf E. Hopf zurück, der das Cauchy-Problem für die nach ihm genannte Gleichung formulierte. Der statistische Zugang zum Cauchy-Problem für die Navier-Stokesschen Gleichungen besteht in folgendem:

Auf dem Raum der Anfangsbedingungen $\{u_0(x)\}$ wird ein Maß $\mu(\omega_0)$ gegeben, das die Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der $u_0(x)$ zur Borel-Menge ω_0 gehört. Zu konstruieren ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\omega)$, das auf der Menge der Lösungen $\{u(t, x)\}$ der Navier-Stokesschen Gleichungen konzentriert ist und dessen Einschränkung bei $t = 0$ mit dem Anfangsmaß $\mu(\omega_0)$ übereinstimmt, d. h. die Maße $P(\omega)$ und $\mu(\omega_0)$ sind mittels $P(\{\mu(t, x) \mid u(0, x) \in \omega_0\}) = \mu(\omega_0)$ verknüpft. $P(\omega)$ wird raum-zeitliche statistische Lösung genannt. Durch die Einschränkung von $P(\omega)$ bei beliebigem festem $t \in [0, T]$ wird eine räumliche statistische Lösung $\mu(t, \omega_0)$ erzeugt. Die Bestimmung und Untersuchung von $P(\omega)$ und $\mu(t, \omega_0)$ spielt eine zentrale Rolle in der statistischen Hydrodynamik. Ein wesentliches Merkmal der räumlichen statistischen Lösung $\mu(t, \omega_0)$ sind ihre sogenannten Momente

$$M_k(t, x_1, \dots, x_k; l_1, \dots, l_k) = \int u^{l_1}(x_1) \dots u^{l_k}(x_k) \, \mu(t, du),$$

wobei $x_1, \dots, x_k \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ und $u^{l_j}(x)$ die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors $u(x) = (u^1(x), \dots, u^n(x))$ sind. Sie erfüllen die unendliche Kette der Friedmann-Keller-Gleichungen $\partial M_k/\partial t + A_k M_k = B_k M_{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$, wobei $A_k\colon \Omega^k \to \Omega^k$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung und $B_k\colon \Omega^{k+1} \to \Omega^k$ ein solcher erster Ordnung ist.

Das Kap. 1 beschäftigt sich mit der Frage der Entwicklung der Lösungen $u(t, x)$ der Navier-Stokesschen Gleichungen in eine konvergente funktionalanalytische Reihe nach den Anfangsdaten $u_0(x)$. Die Ergebnisse beruhen auf dem Existenzsatz für die Inversion eines analytischen