Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (5) 1987, S. 421–438

Über das asymptotische Verhalten des Fermi-Dirac-Integrals

H.-J. Schell

Es werden neue asymptotische Entwicklungen des Fermi-Dirac-Integrals $F_{p-1}(x)$ für den Fall hergeleitet, daß x und p beide gegen Unendlich streben: a) für $p \sim x$, b) für $p = ax$, $0 < a < 2$. Für $p \to \infty$, $\sqrt{p} = o(p - 2x)$ wird eine neue asymptotische Darstellung angegeben. Die mit diesen Formeln berechneten Werte werden für mehrere Paare (x, p) mit den exakten Werten verglichen.

Выводятся новые асимптотические разложения интеграла Ферми-Дирака $F_{p-1}(x)$ в том случае, когда x и p стремятся к безконечности: а) для $p \sim x$, б) для $p = ax$, $0 < a < 2$. Для $p \to \infty$, $\sqrt{p} = o(p - 2x)$, получено новое асимптотическое представление. Значения полученные с помощью этих формул сравниваются с точными.

New asymptotic expansions of the Fermi-Dirac integral $F_{p-1}(x)$ are derived in the case that both x and p tend to infinity: a) for $p \sim x$, b) for $p = ax$, $0 < a < 2$. A new asymptotic approximation is given for $p \to \infty$, $\sqrt{p} = o(p - 2x)$. The values calculated with these formulas are for several pairs (x, p) compared with the exact values.

1. Einleitung

Das Fermi-Dirac-Integral definieren wir mit Dingle [3] durch

$$F_q(x) = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty \frac{t^q}{1 + e^{t-x}}\, dt, \qquad q > -1. \tag{1.1}$$

In älteren Veröffentlichungen wurde der Faktor $1/\Gamma(q+1)$ weggelassen.

Fermi-Dirac-Integrale treten u. a. in der Quantenmechanik auf, z. B. bei der Behandlung der Energieverteilung von Teilchen, die der Fermi-Dirac-Statistik unterworfen sind. Ende der zwanziger Jahre interessierte man sich erstmals für das Verhalten solcher Integrale für große x (e^x heißt *Fermische Grenzenergie*), und zwar zunächst nur für $q = \pm 1/2$ und $q = 3/2$. Sommerfeld [15] leitete eine asymptotische Entwicklung für $x \to \infty$ bei festem q her. Nordheim [8: 271] präzisierte später die Gültigkeitsbedingungen. In [7] findet sich eine konvergente Reihenentwicklung von $F_q(x)$ für q fest und $x \leqq 0$; ferner werden die analytische Fortsetzung von $F_q(x)$ für komplexe q sowie Formeln für $F_q(0)$ und $F_q'(x)$ angegeben. Eine Untersuchung von Rhodes [11] beschäftigt sich mit dem Fall ganzzahliger q: es wird gezeigt, daß dann $F_q(x)$, $x \geqq 0$, als Summe aus $(-1)^q F_q(-x)$ und einem Polynom in x ausgedrückt werden kann. Ausführlich hat sich Dingle [3–5] mit dem Fermi-Dirac-Integral befaßt. Über die Mellin-Transformierte von $F_q(x)$ leitet er in [3] eine Integraldarstellung her, aus der sich eine asymptotische Entwicklung von $F_q(x)$ für $x \to \infty$, q fest, ergibt, die sich von der früher bekannten durch den Summanden $F_q(-x) \cos \pi q$ unterscheidet. Er deutet an, wie man das Resultat auch mit elementaren Methoden erhalten kann. Dingle nennt sein Ergebnis in [4] vollständige Entwicklung von $F_q(x)$. Der zusätzliche Summand ist von der Ordnung e^{-x} und kann, da die Reihe nach der asymptotischen Skala $\{x^{-2k}\}$ fortschreitet, bei Zugrundelegung der Poincaréschen

Definition der asymptotischen Entwicklung weggelassen werden (in den Fällen $q = (2k+1)/2, k$ ganz, für die sich die Physiker ursprünglich interessierten, verschwindet er ohnehin). Bei seiner Berücksichtigung erhält man genauere Ergebnisse bei Funktionswertberechnungen, und es wird der Sonderfall ganzzahliger q exakt erfaßt. In [5] bezieht DINGLE komplexe Argumentwerte in seine Betrachtungen ein und gibt eine asymptotische Entwicklung von $F_q(x)$ für $q \to \infty$, x fest, an. Tabellen mit Funktionswerten von $F_q(x)$ sind in mehreren der genannten Arbeiten enthalten, so in [3] [$q = -1\ (1)\ 4$; $0 \leqq x \leqq 10$ und $q = -1{,}0$; $-4 \leqq x \leqq 0$), in [7] ($q = \pm 1/2, 3/2$; $x \geqq 0$), in [11] ($q = 1\ (1)\ 4$; $-4 \leqq x \leqq 0$) und in der neueren Arbeit [1] ($q = (2k-1)/2$, $k = 0\ (1)\ 6$; $-10 \leqq x \leqq -1$). Jüngere Untersuchungen zur Approximation von $Fq(x)$ stammen von KALITKIN z. B. [18].

In allen bisherigen Arbeiten zum asymptotischen Verhalten des Fermi-Dirac-Integrals werden ausschließlich die Fälle untersucht, daß eine Variable gegen ∞ strebt und die andere fest bleibt, wobei der Fall $q \to \infty$ nur in [5] betrachtet wird. Die vorliegende Arbeit bezieht den Fall ein, daß beide Variablen gegen ∞ streben. Zunächst wird der Anwendungsbereich der asymptotischen Entwicklung für $x \to \infty$ erneut untersucht, und es werden Bedingungen für eine günstige Wahl der Abbruchstelle der Reihe angegeben. In Abschnitt 4 werden zwei asymptotische Entwicklungen hergeleitet, die für $x \to \infty$ und $p \sim x$ bzw. $p = ax$, $p = q + 1$, $0 < a < 2$, gültig sind. Schließlich wird der Fall $p \to \infty$, $\sqrt{p} = o(p - x)$ behandelt. Es zeigt sich eine Beziehung im asymptotischen Verhalten des Fermi-Dirac-Integrals und der unvollständigen Gammafunktion. Aus diesem Grund erweist es sich als zweckmäßig, Entwicklungen für die Differenz aus $F_q(x)$ und $e^x \Gamma(p+1, x)/\Gamma(p+1)$ herzuleiten. Diese liefern bei der näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten recht genaue Ergebnisse, wie durch den Vergleich mit den exakten Werten für eine Reihe von Wertepaaren (x, q) gezeigt wird. Es ist nicht gelungen, für das Fermi-Dirac-Integral — so wie früher für die unvollständige Gammafunktion — eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung zu erhalten, die alle bisher untersuchten Fälle umfaßt.

2. Die asymptotische Entwicklung für $x \to \infty$, q fest

Wir verwenden im folgenden ständig die Beziehung

$$p = q + 1. \tag{2.1}$$

Aus (1.1) erhält man durch partielle Integration die Darstellung

$$F_q(x) = \frac{e^x}{\Gamma(p+1)} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^p}{(1 + e^{x-t})^2}\, dt, \qquad p > 0; \tag{2.2}$$

x sei hier stets reell. Für ganzzahlige p ergibt sich hieraus nach Substitution $t = x + u$ und Aufspaltung des Integrals

$$\Gamma(p+1)\, F_q(x)$$
$$= x^p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du - \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du \right\}$$

und weiter nach Substitution $u = -(t + x)$ im zweiten Teilintegral

$$\Gamma(p+1)\, F_q(x) = x^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du$$
$$+ (-1)^q\, \Gamma(p+1)\, F_q(-x). \tag{2.3}$$

Mit

$$G_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\, u^{2k}\, du \tag{2.4}$$

folgt dann hieraus für ganzzahlige $q > 0$ das Resultat von RHODES [11]

$$F_q(x) = (-1)^q F_q(-x) + \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{q+1}{2k} \frac{G_{2k}}{x^{2k}}, \qquad n = \left[\frac{q+1}{2}\right]. \tag{2.5}$$

Es ist

$$\begin{aligned} G_0 &= 1, \\ G_{2k} &= 2(2k)!\,(1 - 2^{1-2k})\,\zeta(2k) = 2\pi^{2k}(2^{2k-1} - 1)\,|B_{2k}| \quad (k \geqq 1), \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion und B_{2k} die Bernoullischen Zahlen sind (speziell sind $G_2 = \pi^2/3$, $G_4 = 7\pi^4/15$, $G_6 = 31\pi^6/21$, $G_8 = 127\pi^8/15$, $G_{10} = 2555\pi^{10}/33$). Für die Zahlen G_{2k} kann eine erzeugende Funktion angegeben werden; es gilt nämlich

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < 1. \tag{2.7}$$

Diese ergibt sich, wenn man in der Darstellung

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = 1 + (1 - \pi z \cot \pi z) - 2\left(1 - \frac{\pi z}{2} \cot \frac{\pi z}{2}\right)$$

die Potenzreihenentwicklung von $z \cot z$ einsetzt und (2.6) berücksichtigt. Aus (2.4) entnimmt man

$$G_{2k} \sim 2(2k)! \qquad (k \to \infty). \tag{2.8}$$

Für $k \geqq 1$ ist der Quotient $G_{2k}/2(2k)!$ offensichtlich kleiner als 1, und man kann zeigen, daß er monoton wachsend gegen 1 strebt. Die Funktion $F_q(-x)$ in (2.5) kann für alle $x \geqq 0$ und $q > -1$ durch die konvergente Reihe

$$F_q(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{q+1}} e^{-nx} \tag{2.9}$$

ausgedrückt werden. Aus ihr folgt speziell

$$F_q(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{q+1}} = (1 - 2^{-q})\,\zeta(q+1) \quad \text{für } q \neq 0.$$

Für $q = 0$ ist F_q eine elementare Funktion: $F_0(x) = \ln(1 + e^x)$.

Um nun für nicht-ganzzahlige (feste) q zu einer asymptotischen Entwicklung der Funktion F_q zu gelangen, die (2.5) als Spezialfall enthält, geht man wieder von (2.3) aus. Wenn man das erste Integral auf der rechten Seite formal entwickelt und weiter der Argumentation in [3] folgt, daß nämlich für reelle x im Integranden des letzten Integrals $(-1)^p$ durch das arithmetische Mittel aus $e^{\pm p\pi i}$ zu ersetzen ist, um eine reelle rechte Seite zu erhalten, ergibt sich

$$F_q(x) \approx F_q(-x) \cos \pi q + \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{2k} \frac{G_{2k}}{x^{2k}}. \tag{2.10}$$

(Dingle kommt aber auch ohne diese Argumentation zu diesem Resultat, indem er eine Darstellung von F_q durch ein komplexes Integral benutzt.) Die Reihenglieder in

(2.10) bilden für festes q und $x \to \infty$ offensichtlich eine asymptotische Skala. Bei Verwendung der Taylorentwicklung von $(1 + u/x)^p$ mit Restglied für $|u| \leqq x$ und Abschätzung der Restbestandteile über die Intervalle $(-\infty, -x]$ und $[x, \infty)$ anstelle der formalen Entwicklung des ersten Integrals in (2.3) zeigt sich, daß

$$F_q(x) - \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{2k} \frac{G_{2k}}{x^{2k}} = O(x^{-2n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Schließlich ist $F_q(-x) < e^{-x}$. Somit ist (2.10) bei festem q eine asymptotische Entwicklung der Funktion $F_q(x)$ für $x \to \infty$.[1]) Unter Benutzung der Ergänzungsformel für die Gammafunktion kann (2.10) in der Form

$$\begin{aligned} F_q(x) &\approx F_q(-x) \cos \pi q + \sum_{k=0}^{n} \frac{G_{2k}}{(2k)!} \frac{x^{p-2k}}{\Gamma(p+1-2k)} \\ &\quad + \frac{\sin \pi q}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(2k-p)}{x^{2k-p}}, \qquad n = \left[\frac{p}{2}\right], \end{aligned} \tag{2.11}$$

geschrieben werden. Für ganzzahlige $q \neq 0$ entfällt hierin die zweite Reihe, und die verbleibende rechte Seite stimmt mit der von (2.5) überein.

3. Restaussagen

Bei den Restaussagen können wir uns wegen (2.5) auf den Fall nicht-ganzzahliger p beschränken. Wenn mit n aus (2.11) $2n < p < 2n + 1$ gilt, wird der letzte Term in (2.11) negativ, und man hat $F_q(x) < s_{2n}(x, p)$, wobei $s_{2n}(x, p)$ für die obere Zeile der rechten Seite von (2.11) steht. Andererseits ist das Taylor-Restglied, das sich bei Abbruch der Reihe vor dem n-ten Glied ergibt, positiv, so daß $F_q(x) > s_{2n-2}(x, p)$ gilt. Wenn aber $2n + 1 < p < 2n + 2$ ist, erhält man lediglich die Aussage $F_q(x) > s_{2n}(x, p)$. Zu weitergehenden Aussagen kommt man bei Betrachtung desjenigen Restgliedes, welches sich bei Abbruch von (2.11) in der Nähe des absolut kleinsten Gliedes ergibt. Seien die Reihenglieder mit $u_{2k}(x, p)$ bezeichnet. Dann folgt aus $u_{2k}(x, p)/u_{2k-2}(x, p) \approx (p - 2k + 2)(p - 2k + 1)/x^2$, daß annähernd für die Indizes $2k$ mit $p - x + 3/2 < 2k < p + x + 3/2$ die Beziehung $|u_{2k}| < |u_{2k-2}|$ gilt. Für kleinere bzw. größere Indizes wachsen die Beträge der Reihenglieder an (wenn p klein gegen x ist, fallen die Glieder sofort). Man erhält daher im wesentlichen das absolut kleinste Glied u_{2M}, wenn man $2M$ mit

$$p + x - 1/2 < 2M \leqq p + x + 3/2 \tag{3.1}$$

wählt. Wir verwenden nun aus [3] eine Darstellung des Restgliedes $R_{2k}(x, p)$, das bei Abbruch der Entwicklung (2.11) nach dem Reihenglied $u_{2k}(x, p)$, $k > n$, entsteht:

$$\begin{aligned} R_{2k}(x, p) &= 2 \frac{\sin \pi q}{\pi} \frac{\Gamma(2k - q + 1)}{x^{2k+q+1}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{A_{2k-q}(lx)}{l^{2k+2}}, \\ A_s(x) &= \frac{x}{2} \big(B_s(x) - B_s(-x)\big), \qquad B_s(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^s}{t + x}\, dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

---

[1]) Ohne den ersten Term auf der rechten Seite geht (2.10) im Prinzip schon auf SOMMERFELD [15] zurück. Die hier angegebene Formel, in der ein Glied von exponentiell kleiner Ordnung zusätzlich berücksichtigt wird, ist die zuerst von DINGLE [3] hergeleitete „vollständige" asymptotische Entwicklung.

Das Integral in $B_s(-x)$ ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen, und es gilt $A_s(x) \to 1$ für $x \to \infty$. Für $k = M$ konvergiert die Reihe in (3.2) schnell, sofern x groß ist, und man kann ihre Summe durch ihr erstes Glied $A_{2M-q}(x)$ approximieren. Nach (3.1) ist $2M - q \approx x$, und für diesen Fall $s \approx x$ ist in [3] eine Darstellung für $A_s(x)$ angegeben, die durch

$$\frac{x}{2(x+s)}\left(1 - \frac{x}{(x+s)^2}\right)$$
$$+ \frac{x}{2s}\left(1 - \frac{1}{12s}\right)\left[\left(x - s - \frac{1}{3}\right) - \frac{(x-s)(x-s+1) - 1/4}{3s}\right]$$

angenähert werden kann, wobei der Fehler für $x - s = O\left(\sqrt{s}\right)$ von der Ordnung $o(1)$ ist. Mit gleichem Fehler folgt daraus die Näherung

$$A_s(x) \approx \frac{1}{12} + \frac{x-s}{2}. \tag{3.3}$$

Aus ihr entnimmt man, daß $A_s(x)$ für festes x in der Nähe von $s = x + 1/6$ sein Vorzeichen wechselt. Wählt man nun $2m$ so, daß $x + 1/6 \leqq 2m - q < x + 13/6$ oder

$$p + x - 5/6 \leqq 2m < p + x + 7/6 \tag{3.4}$$

gilt, so haben $A_{2m-q-2}(x)$ und $A_{2m-q}(x)$, folglich auch $R_{2m-2}(x, p)$ und $R_{2m}(x, p)$ entgegengesetztes Vorzeichen (es ist $\operatorname{sgn} R_{2m-2}(x, p) = \operatorname{sgn} u_{2m-2}(x, p)$, wie durch Vergleich von (3.2) und (2.11) folgt). Daher liegt $F_q(x)$ zwischen den Teilsummen $s_{2m-2}(x, p)$ und $s_{2m}(x, p)$, wobei sich allerdings in Randfällen wegen der Verwendung einer Näherungsformel die Indizes um 2 verschieben können. Es ist also besonders günstig, die Entwicklung (2.11) bei u_{2m} (oder u_{2m-2}) abzubrechen und dann (3.2) für $k = m$ (oder $k = m - 1$) zu verwenden. Der Vergleich mit (3.1) zeigt noch, daß m und M entweder übereinstimmen oder aber $M = m + 1$ ist. Wenn man in der Restdarstellung (3.2) wie zuvor nur das erste Glied der schnell konvergierenden Reihe verwendet, folgt mit (3.4) aus $R_{2m-2} = u_{2m} + R_{2m}$ der Zusammenhang

$$A_{2m-q-2}(x) - A_{2m-q}(x)\,\frac{(2m-q)(2m-q-1)}{x^2} \approx 1.$$

Aus (3.3) ergibt sich für $s = 2m - q - 2$, daß $A_{2m-q-2}(x)$ annähernd zwischen 0 und 1 liegt und somit im wesentlichen $|R_{2m-2}(x, p)| \leqq |u_{2m}(x, p)|$ (und entsprechend $|R_{2m}(x, p)| \leqq |u_{2m+2}(x, p)|$) gilt. Für $u_{2m}(x, p)$ hat man aber wegen (2.8) die einfache Abschätzung

$$u_{2m}(x, p) \approx 2\,\frac{\Gamma(2m-p)}{x^{2m-p}}\,\frac{\sin \pi q}{\pi},$$

also für große x

$$u_{2m}(x, p) \approx 2 \sin \pi q \sqrt{\frac{2}{\pi(2m-p)}}\, e^{-(2m-p)} \left(\frac{2m-p}{x}\right)^{2m-p}.$$

Hierin ist wegen $2m - p = x + \eta$, $-5/6 \leqq \eta < 7/6$, für $x \to \infty$ der letzte Faktor $\asymp 1$, also $u_{2m}(x, p)$ und nach der vorangegangenen Bemerkung auch $R_{2m}(x, p)$ von der Ordnung $O\left(e^{-x}/\sqrt{x}\right)$.

Obwohl in (2.11) eine asymptotische Entwicklung für $x \to \infty$ nur vorliegt, solange p fest ist oder, wie man nachweisen kann, $p = o(x)$ gilt, ist mit der letzten Überlegung gezeigt, daß (2.11) zur Funktionswertberechnung auch dann noch benutzt werden kann, wenn p von gleicher oder sogar größerer Ordnung wie x gegen ∞ strebt. Die Größe des Fehlers bei Abbruch mit dem $2m$-ten Glied ist, vom Faktor $\sin \pi q$ abgesehen, lediglich durch x bestimmt. Freilich wird in diesen Fällen $2m$ recht groß und der Aufwand zur Berechnung von $F_q(x)$ mit (2.11) sehr hoch. In den folgenden Abschnitten werden andere Entwicklungen angegeben, die dann besser geeignet sind.

4. Asymptotische Entwicklungen für $x \to \infty$, $p \asymp x$

Im folgenden wird der Fall untersucht, daß p und x beide gegen ∞ streben und dabei $p \sim x$ bzw. $p = ax$, $0 < a < 2$, gilt. Um hier zu asymptotischen Entwicklungen zu kommen, gehen wir von (2.3) aus, zerlegen das Integral in die Teilintegrale über $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$, schreiben das zweite in der Form

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} (2e^{-u} + e^{-2u})\left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du$$

und substituieren im ersten u durch $-u$. Dann folgt, wenn wir

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(1 + \frac{u}{x}\right)^p du = e^x x^{-p} \int_x^\infty e^{-t} t^p \, dt = e^x x^{-p} \Gamma(p + 1, x)$$

und die Bemerkung vor (2.10) berücksichtigen,

$$F_q(x) = F_q(-x) \cos \pi q + e^x \frac{\Gamma(p + 1, x)}{\Gamma(p + 1)} + \frac{x^p}{\Gamma(p + 1)} H_p(x) \tag{4.1}$$

mit der unvollständigen Gammafunktion

$$\Gamma(p + 1, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^p \, dt$$

und

$$H_p(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} \left\{\left(1 - \frac{u}{x}\right)^p - \left(1 + \frac{u}{x}\right)^p [2e^{-u} + e^{-2u}]\right\} du. \tag{4.2}$$

Die Werte der Funktion $\Gamma(p + 1, x)/\Gamma(p + 1)$ können aus Tabellen [9, 10] entnommen oder mit der folgenden gleichmäßigen asymptotischen Entwicklung [14, 16] berechnet werden:

$$\frac{\Gamma(p + 1, x)}{\Gamma(p + 1)} \approx \frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi p}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(\eta)}{p^m} \quad (p \to \infty, x \geqq 0) \tag{4.3}$$

mit

$$\tau = \operatorname{sgn}(p - x)\,[x - p + p \ln p/x]^{1/2},$$

$$\eta = -\tau\sqrt{2/p}, \; \mu = (x - p)/p, \tag{4.4}$$

$$c_0(\eta) = \frac{1 + \mu}{\mu} - \frac{1}{\eta}, \quad c_m(\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{dc_{m-1}(\eta)}{d\eta} + (-1)^m \gamma_m \frac{1 + \mu}{\mu} \; (m \geqq 1).$$

Darin sind γ_m die Koeffizienten der Stirlingreihe:

$$\Gamma(p+1) \approx \sqrt{2\pi p}\, e^{-p} p^p \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m p^{-m} \qquad (p \to \infty).$$

Somit ist noch $H_p(x)$ zu untersuchen. Wir setzen $h(x, p, u) = e^{-u}(1 + u/x)^p$ und benötigen im weiteren die Potenzreihenentwicklung nach u,

$$h(x, p, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(x, p)}{k!} u^k, \qquad |u| < x. \tag{4.5}$$

Durch Multiplikation von Exponential- und binomischer Reihe ergibt sich für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} &A_0(x, p) = 1, \\ &A_k(x, p) = (-1)^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \left(\frac{p}{x}\right)^l \prod_{m=1}^{l-1} \left(1 - \frac{m}{p}\right) \qquad (k \geqq 1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

(das Produkt ist für $l = 0$ durch 1 zu ersetzen). Wegen der nachfolgenden Umformung und der Definition der auftretenden Zahlen S_r^n und D_k^r verweisen wir auf den Anhang. Mit dortigem (A 3) ergibt sich

$$A_k(x, p) = (-1)^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \left(\frac{p}{x}\right)^l \left[1 + \sum_{r=1}^{l-1} (-1)^r S_r^{l-1} \frac{1}{p^r}\right]$$

(die innere Summe ist für $l = 0, 1$ durch 0 zu ersetzen). Für $p = x$ vereinfachen sich die Koeffizienten wegen (A.6) zu

$$A_1(p, p) = 0, \quad A_k(p, p) = \sum_{r=[(k+1)/2]}^{k-1} (-1)^r D_{k-r}^r \frac{1}{p^r} \qquad (k \geqq 2). \tag{4.7}$$

Der Fall $x \to \infty$, $p \sim x$

Durch Umformung von (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} H_p(x) = &\int_0^{\infty} \frac{e^{-2u}}{(1 + e^{-u})^2} [h(x, p, -u) - h(x, p, u)]\, du \\ &- 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} h(x, p, u)\, du. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich eine asymptotische Entwicklung von $H_p(x)$, indem wir hierin formal (4.5) einsetzen. Wegen

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} u^k\, du = \begin{cases} G_{2m}/2 & \text{für } k = 2m \\ (2m+1)!\, \mu_{2m+1} & \text{für } k = 2m + 1 \end{cases}$$

und,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2u}}{(1 + e^{-u})^2} u^{2m+1}\, du = \frac{G_{2m+2}}{2(2m+2)} - (2m+1)!\, \mu_{2m+1},$$

$$\mu_{2m+1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{2m+1}}$$

folgt so $H_p(x) \approx -\{G_0 A_0(x, p) + G_2(A_1(x, p) + A_2(x, p))/2! + \ldots\}$ oder

$$H_p(x) \approx -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_{2m}}{(2m)!} \left(A_{2m-1}(x, p) + A_{2m}(x, p)\right) \tag{4.8}$$

mit $A_{-1}(x, p) = 0$. Für $p = x$ ergibt sich aus (A 4) und (4.7)

$$A_{2m-1}(p, p) + A_{2m}(p, p) = \frac{(-1)^m}{2mp^m} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l D_{m-l}^{m+1+l}/p^l$$

und somit

$$H_p(p) \approx -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} \sum_{m=[(n+2)/2]}^{n} \frac{G_{2m}}{(2m)!} \frac{D_{2m-n}^{n+1}}{2m}. \tag{4.9}$$

Allgemein folgt aus (4.6)

$$A_{2m-1}(x, p) + A_{2m}(x, p) = \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \binom{2m-1}{l-1} \left(\frac{p}{x}\right)^l \prod_{s=0}^{l-1} \left(1 - \frac{s}{p}\right). \tag{4.10}$$

Die Ordnung dieses Ausdrucks ergibt sich für $x \neq p$ wegen

$$\prod_{s=0}^{l-1} \left(1 - \frac{s}{p}\right) = 1 + o(1) \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \binom{2m-1}{l-1} \left(\frac{p}{x}\right)^l = \frac{p}{x^{2m}} (p-x)^{2m-1}$$

zu $A_{2m-1}(x, p) + A_{2m}(x, p) \asymp p(p-x)^{2m-1}/x^{2m}$. Die Glieder in (4.8) bilden also für $x \neq p$ wegen $(p-x)/x = o(1)$ tatsächlich eine asymptotische Skala, während man für $x = p$ nach (4.9) die asymptotische Skala $\{p^{-n}\}$ erhält. Da man sich überlegen kann, daß die Reihenreste von kleinerer Ordnung als das jeweils letzte benutzte Glied sind, gilt in Verbindung mit (4.1) der folgende

Satz: *Für $x \to \infty$, $p \sim x$ hat $F_q(x)$ die asymptotische Entwicklung*

$$F_q(x) \approx F_q(-x) \cos \pi q + \frac{e^x \Gamma(p+1, x)}{\Gamma(p+1)}$$
$$- \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_{2m}}{(2m)!} \left(A_{2m-1}(x, p) + A_{2m}(x, p)\right). \tag{4.11}$$

Speziell für $p = x$ kann hierin die Reihe durch die rechte Seite von (4.9) *ersetzt werden.*

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (4.11) können mit (2.9) bzw. (4.3) berechnet werden, und der Reihenanfang in (4.11) lautet

$$1 + \pi^2 p(p-x-1)/6x^2 + 7\pi^4 p[(p-x-1)^3 - (3(p-x)-5)(p-1)]/360x^4$$
$$+ 31\pi^6 p\Big[(p-x-1)^5 - 10(p-x-1)^3 (p-1) + 20(p-x-1)^2 (p-1)$$
$$+ 45\left(\frac{p^2}{3} - p + 1\right)(p-x-1) - 5p(7p-3x) + 79p - 44\Big]\Big/15120x^6 + \ldots$$

Wenn man in (4.11) den ersten Term wegen seiner kleinen Ordnung vernachlässigt, den zweiten Term durch (4.3) ausdrückt und von der dort enthaltenen Reihe sowie der Reihe des dritten Terms nur das erste Glied berücksichtigt, so ergibt sich

$$F_q(x) = e^x \left\{\frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi p}} \left[c_0 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right] - \frac{e^{-x} x^p}{\Gamma(p+1)} (1 + o(1))\right\}$$
$$= e^x \left\{\frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi p}} \left[c_0 - 1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right]\right\}$$

mit τ und c_0 nach (4.4). Für $\varrho = (p - x)/\sqrt{2p} = O(1)$ ist $\tau \sim \varrho$, und es gilt

$$\frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} = \frac{1 + \operatorname{erf} \varrho}{2} + \frac{e^{-\varrho^2}}{\sqrt{2\pi p}}\left[\frac{2}{3}\varrho^2 + O(p^{-1/2})\right],$$

$$e^{-\tau^2} = e^{-\varrho^2}(1 + O(p^{-1/2})) \quad \text{sowie} \quad c_0 = 2/3 + O(p^{-1/2})$$

(siehe [13]). Daher wird für $x \to \infty$, $\varrho = O(1)$

$$F_q(x) = e^x \frac{1 + \operatorname{erf} \varrho}{2} + \frac{e^{-\varrho^2}}{\sqrt{2\pi p}}\left[-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\varrho^2 + O(1)\right].$$

Man hat also speziell die asymptotische Darstellung

$$F_q(x) \sim e^x \frac{1 + \operatorname{erf} \varrho}{2}.$$

Für $p = x$ ergibt sich $e^{-p}F'_{p-1}(p) \sim 1/2$ $(p \to \infty)$; für $x = p \pm \sqrt{p}$ wird $2\varrho^2 - 1 = 0$ und daher ergibt sich die besonders gute asymptotische Näherung

$$F_{p-1}(p \pm \sqrt{p}) \sim e^{p \pm \sqrt{p}} \frac{1 + \operatorname{erf}(\mp 1/\sqrt{2})}{2} \qquad (p \to \infty).$$

Der Fall $x \to \infty$, $p = ax$, $0 < a < 2$

Wir untersuchen vorerst den Fall $0 < a < 1$. Da wir wieder (4.1) benutzen werden, betrachten wir zunächst die asymptotische Entwicklung von $\Gamma(p + 1, x)$ in diesem Fall. Diese kann aus (4.3) hergeleitet oder direkt aus der von Tricomi [17] für $x > p$, $\sqrt{p} = o(x - p)$ angegebenen Entwicklung entnommen werden. Bemerkenswert ist, daß man sie aber auch erhält, wenn man von der für $x \to \infty$, $p = o(x)$ (oder $a = o(1)$) gültigen, seit langem bekannten asymptotischen Entwicklung

$$\Gamma(p + 1, x) \approx e^{-x}x^p \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p - 1)\dots(p - k + 1)}{x^k}\right]$$

oder hier

$$\Gamma\left(p + 1, \frac{p}{a}\right) \approx e^{-p/a}\left(\frac{p}{a}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} a^k \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{p}\right) \tag{4.12}$$

ausgeht ($\prod = 1$ für $k = 0$). Obwohl die rechte Seite hierin in dem zu untersuchenden Fall gar keine asymptotische Entwicklung mehr ist, gelingt es, daraus eine herzustellen, indem man die Reihe formal als $\sum \gamma_n(a)/p^n$ umschreibt. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die für $|a| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$\gamma_0(a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}, \quad \gamma_n(a) = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} S_n^{k-1} a^k \qquad (n \geqq 1).$$

Für $n \geqq 1$ kann man diese mit (A 6) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}(-1)^n \gamma_n(a) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k \sum_{l=n+1}^{2n} D_{l-n}^n \binom{k}{l} \\ &= \sum_{l=n+1}^{2n} D_{l-n}^n a^l \left[1 + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{(l + 1)\dots k}{(k - l)!} a^{k-l}\right] \\ &= \sum_{l=n+1}^{2n} D_{l-n}^n a^l \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-(l + 1)}{r} a^r = \sum_{l=n+1}^{2n} D_{l-n}^n \frac{a^l}{(1 - a)^{l+1}}.\end{aligned}$$

Mit $f(a) = 1/(1-a)$, also $f^{(l)}(a) = l!/(1-a)^{l+1}$, wird somit

$$\Gamma\left(p+1, \frac{p}{a}\right) \approx e^{-p/a} \left(\frac{p}{a}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n(a)}{p^n} \qquad (p \to \infty), \tag{4.13}$$

wobei

$$\gamma_n(a) = (-1)^n \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{D_{l-n}^n}{l!} a^l f^{(l)}(a) \qquad (n \geqq 1) \tag{4.14}$$

ist (aus der erwähnten Tricomi-Entwicklung folgt dies unter Verwendung von (A 5); mit (A 4) erhält man noch die Rekursionsformel $\gamma_{n+1}(a) = -a^2\gamma_n'(a)/(1-a)$).

Wir kehren nun zum Fermi-Dirac-Integral zurück. (2.10) lautet im vorliegenden Fall für $a = o(1)$

$$F_q\left(\frac{p}{a}\right) \approx F_q\left(-\frac{p}{a}\right) \cos \pi q + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{p}{a}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} G_{2k} a^{2k} \binom{p}{2k} \frac{1}{p^{2k}}. \tag{4.15}$$

Wie (4.12) hat diese Entwicklung für $0 < a < 1$ keinen asymptotischen Charakter mehr (man vergleiche jedoch die Ausführungen über die Brauchbarkeit der Reihe in Abschnitt 3). Wir gehen, um zu einer für diesen Fall gültigen asymptotischen Entwicklung zu kommen, wie eingangs bei der unvollständigen Gammafunktion vor und setzen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} a^{2k} \prod_{i=1}^{2k-1} \left(1 - \frac{i}{p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(a)}{p^n}$$

($\Pi = 1$ für $k = 0$). Durch Koeffizientenvergleich erhält man die für $|a| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$c_0(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} a^{2k}, \quad c_n(a) = (-1)^n \sum_{k=[(n+2)/2]}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} a^{2k} S_n^{2k-1} \qquad (n \geqq 1).$$

Die $c_n(a)$ lassen sich auch als Summen von Ableitungen der Funktion

$$g(a) = \frac{\pi a}{\sin \pi a} = \Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a)$$

und somit durch die ψ-Funktion ausdrücken. Zunächst ist nämlich nach (2.7) $c_0(a) = g(a)$ und folglich (für $|a| < 1$)

$$g^{(l)}(a) = \sum_{k=[(l+1)/2]}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k-l)!} a^{2k-l} \qquad (l \geqq 0). \tag{4.16}$$

Nach (A 6) ist

$$\begin{aligned} c_n(a) &= (-1)^n \sum_{k=[(n+2)/2]}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} a^{2k} \sum_{l=n+1}^{2n} D_{l-n}^n \binom{2k}{l} \\ &= (-1)^n \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{D_{l-n}^n}{l!} a^l \sum_{k=[(l+1)/2]}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k-l)!} a^{2k-l}; \end{aligned}$$

also wegen (4.16)

$$c_n(a) = (-1)^n \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{D_{l-n}^n}{l!} a^l g^{(l)}(a) \qquad (n \geqq 1). \tag{4.17}$$

Die Ergebnisse gelten nicht nur, wenn a konstant ist, da nur die Eigenschaft $0 < a < 1$ benötigt wurde. Somit ergibt sich aus (4.15) — analog wie (4.13) aus (4.12) — folgender

Satz: *Es sei $a = a(x, p)$ eine Funktion mit $\delta_1 \leqq a(x, p) \leqq 1 - \delta_2$ $(0 < \delta_1, \delta_2 < 1;$ $\delta_1 + \delta_2 \leqq 1)$. Dann gilt für $p \to \infty$ die asymptotische Entwicklung*

$$F_q\left(\frac{p}{a}\right) \approx -F_q\left(-\frac{p}{a}\right) \cos \pi p + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{p}{a}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(a)}{p^n}. \tag{4.18}$$

Die ersten der in $c_n(a)$ auftretenden Produkte $a^l g^{(l)}(a)$ seien explizit angegeben:

$$a g'(a) = g(a) [1 - g(a) \cos \pi a] = g(a) [\psi(1 + a) - \psi(1 - a)],$$

$$a^2 g''(a) = g(a) [-2g(a) \cos \pi a + g^2(a) (1 + \cos^2 \pi a)],$$

$$a^3 g'''(a) = g(a) [3g^2(a) (1 + \cos^2 \pi a) - g^3(a) \cos \pi a(5 + \cos^2 \pi a)],$$

$$a^4 g^{(4)}(a) = g(a) [-4g^3(a) \cos \pi a(5 + \cos^2 \pi a) + g^4(a)(5 + 18 \cos^2 \pi a + \cos^4 \pi a)].$$

Die Entwicklungen (4.13) und (4.18) sind allerdings für nicht allzugroße p nur brauchbar, wenn a relativ klein ist. Zu einer wesentlich günstigeren asymptotischen Entwicklung kommt man durch folgende Überlegung. Der Vergleich zwischen (4.1) und (4.18) ergibt

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{-p} e^{p/a} \Gamma\left(p + 1, \frac{p}{a}\right) + H_p\left(\frac{p}{a}\right) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(a)}{p^n} \qquad (p \to \infty),$$

so daß wegen (4.13)

$$H_p\left(\frac{p}{a}\right) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(a) - \gamma_n(a)}{p^n} \qquad (p \to \infty) \tag{4.19}$$

folgt. Man kann nun wie im Fall $p \sim x$ wieder (4.1) benutzen und den dort letzten Summanden nach (4.19) auswerten. Während (4.18) für a in der Nähe von 1 nicht mehr brauchbar ist, da die $c_n(a)$ für $a \to 1$ unbeschränkt wachsen, liegen die Verhältnisse bei (4.19) anders. Diese Entwicklung geht für $a \to 1$ in (4.9) über. Tatsächlich, es ist

$$g(a) = \frac{\pi a}{\sin \pi a} = \frac{\pi(a-1)}{\sin \pi a} + \frac{\pi}{\sin \pi a} = -\left[\frac{\pi(a-1)}{\sin \pi(a-1)} + \frac{\pi}{\sin \pi(a-1)}\right],$$

und somit folgt aus (4.16) wegen $c_0(a) = g(a)$ und $\gamma_0(a) = 1/(1-a)$

$$c_0(a) - \gamma_0(a) = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k)!} [(a-1)^{2k} + (a-1)^{2k-1}] \tag{4.20}$$

für $0 < a < 2$, also $c_0(a) - \gamma_0(a) \to -1$ für $a \to 1$. Aus (4.16) folgt weiter für $l \geqq 1$ und $0 < a < 2$

$$g^{(l)}(a) - f^{(l)}(a) = -\sum_{k=[(l+1)/2]}^{\infty} \frac{G_{2k}}{(2k-l)!} (a-1)^{2k-l-1} \left(a - \frac{l}{2k}\right), \tag{4.21}$$

$$\lim_{a \to 1} \left(g^{(l)}(a) - f^{(l)}(a)\right) = \begin{cases} -G_{2k}/2k & \text{für } l = 2k - 1 \\ -G_{2k} & \text{für } l = 2k, \ k \geqq 1. \end{cases}$$

Da nach (4.14) und (4. 17)

$$c_n(a) - \gamma_n(a) = (-1)^n \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{D_{l-n}^n}{l!} a^l \left(g^{(l)}(a) - f^{(l)}(a)\right)$$

ist, ergibt sich aus dem vorhergehenden Resultat für $n \geqq 1$

$$\lim_{a\to 1}\left(c_n(a) - \gamma_n(a)\right) = (-1)^{n+1} \sum_{m=[(n+2)/2]}^{n} \left(\frac{D_{2m-n-1}^n}{(2m-1)!}\,\frac{G_{2m}}{2m} + \frac{D_{2m-n}^n}{(2m)!}\,G_{2m}\right),$$

also wegen der Rekursionsformel (A 4) für die D_k^n

$$\lim_{a\to 1}\left(c_n(a) - \gamma_n(a)\right) = -(-1)^n \sum_{m=[(n+2)/2]}^{n} \frac{D_{2m-n}^{n+1}}{2m}\,\frac{G_{2m}}{(2m)!} \quad (n \geqq 1).$$

Zusammen folgt jetzt, daß (4.19) für $a \to 1$ in (4.9) übergeht. Zugleich hat sich ergeben, daß die Koeffizienten in (4.19) für $0 < a < 2$ beschränkt bleiben (wobei sie für $a = 1$ durch die obigen Grenzwerte zu interpretieren sind), also (4.1), (4.19) in einem größeren Intervall anwendbar sind als ursprünglich erkennbar war. Zusammenfassend erhält man den

Satz: *Es sei $a = a(x, p)$ eine Funktion mit $\delta_1 \leqq a(x, p) \leqq 2 - \delta_2$ $(0 < \delta_1, \delta_2 < 2, \delta_1 + \delta_2 \leqq 2)$. Dann gilt für $p \to \infty$ die asymptotische Entwicklung*

$$F_q\left(\frac{p}{a}\right) \approx -F_q\left(-\frac{p}{a}\right)\cos \pi p + \frac{e^{p/a}\Gamma(p+1, p/a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{p}{a}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(a) - \gamma_n(a)}{p^n} \tag{4.22}$$

mit $c_n(a)$ nach (4.17) und $\gamma_n(a)$ nach (4.14).

In der Nähe von $a = 1$ können $c_n(a) - \gamma_n(a)$ für $n = 0$ mit (4.20) und für $n \geqq 1$ unter Zuhilfenahme von (4.21) berechnet werden. Mit der Annäherung von a an 2 nehmen $|c_n(a) - \gamma_n(a)|$ sehr stark zu, so daß (4.22) praktisch nicht mehr brauchbar ist.

Die asymptotische Entwicklung (4.19) — und damit (4.22) — läßt sich grundsätzlich auch direkt gewinnen, indem man von

$$H_p(p/a) = \int_0^{\infty} \frac{h(p, p, au)}{(1 + e^{-u})^2}\left[e^{-(1+a)u} - 2e^{-(2-a)u} - e^{-(3-a)u}\right] du$$

ausgeht, für $h(p, p, au)$ die Potenzreihe (4.5) benutzt, gliedweise integriert und die Integrale $\int_0^{\infty}(e^{-cu}u^k/(1 + e^{-u})^2)\, du$ durch Reihen auswertet. Es gelang jedoch auf diesem Wege nicht, die Koeffizienten $c_n(a) - \gamma_n(a)$ durch (4.17) und (4.14) auszudrücken.

5. Asymptotische Darstellungen für $p \to \infty$, x von kleinerer Ordnung als p

Schließlich soll noch das Verhalten von $F_q(x)$ für $p \to \infty$ betrachtet werden, wenn x fest oder in noch präzisierender Weise von kleinerer Ordnung als p ist. Für $p \gg x$ wird das Integral in (2.1) im wesentlichen durch $\Gamma(p + 1)$ approximiert, da in der Nähe der Maximalstelle $t = p$ der Zählerfunktion des Integranden der Nenner dicht bei 1 liegt. Eine genauere Aussage, die den Einfluß von x erfaßt, ergibt sich durch Anwendung der verallgemeinerten Laplaceschen Methode [2] auf

$$\int_0^{\infty} e^{-g(x,p,t)}\, dt \quad \text{mit} \quad -g(x, p, t) = -t + p \ln t - 2 \ln (1 + e^{x-t}).$$

Die Maximalstelle t_0 dieser Funktion bestimmt sich aus der Gleichung

$$t_0 = x + 2 \operatorname{artanh}(p/t_0) = x + \ln \frac{t_0 + p}{t_0 - p}.$$

Die genannte Methode ist hier anwendbar, wenn $\sqrt{p} = o(p - x)$, $p > x$, gilt, und sie liefert folgenden

Satz: *Für* $p \to \infty$, $x < p$, $\sqrt{p} = o(p - x)$ *hat* F_q *die asymptotische Darstellung*

$$F_q(x) \sim \frac{e^{x-t_0} t_0^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{p + (t_0^2 - p^2)/2}} \left(\frac{1 + p/t_0}{2}\right)^2. \tag{5.1}$$

Wenn man statt der asymptotischen Darstellung wenigstens noch das folgende Glied der asymptotischen Entwicklung berücksichtigen will, hat man auf der rechten Seite von (5.1) den Faktor

$$1 + \left(\frac{5}{24} \frac{g_3^2(t_0)}{g_2^3(t_0)} - \frac{1}{8} \frac{g_4(t_0)}{g_2^2(t_0)}\right) \quad \text{mit} \quad g_i(t_0) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} g(x, p, t)|_{t=t_0}$$

$(i = 2, 3, 4)$ hinzuzufügen. Dabei ist

$$g_2(t_0) = \frac{t_0^2 + p(2 - p)}{2t_0^2}, \qquad g_3(t_0) = \frac{p(p^2 - 4 - t_0^2)}{2t_0^3},$$

$$g_4(t_0) = \frac{3p(8 - p^3) + t_0^2(4p^2 - t_0^2)}{4t_0^4},$$

der Summand in der Klammer hinter 1 hat die Ordnung $O(p^{-1})$ und der verbleibende Rest die Ordnung $O(p^{-2})$. Als Näherung für t_0 erhält man durch asymptotische Iteration $t_0 = p + \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim 2p\, e^{x-p}(1 - (2p - 1)\, e^{x-p})$. Damit kann der genannte Faktor durch $1 + \dfrac{1}{12p} - \left(\dfrac{p^2}{4} - \dfrac{5p}{3} + 2\right) e^{x-p}$ angenähert werden.

Eine andere Möglichkeit, das asymptotische Verhalten im betrachteten Fall zu bestimmen, ist — bis auf eine geringe Modifizierung — wieder die Anwendung von (4.1) mit asymptotischer Auswertung von $H_p(x)$. Statt (4.1) benutzen wir

$$F_q(x) = \frac{e^x \Gamma(p + 1, x)}{\Gamma(p + 1)} + \frac{x^p}{\Gamma(p + 1)} \left(H_p^{(1)}(x) - H_p^{(2)}(x)\right),$$

$$H_p^{(1)}(x) = \int_0^x \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^p du,$$

$$H_p^{(2)}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^p (2e^{-u} + e^{-2u})\, du.$$

Die Maximalstelle u_0 des Integranden von $H_p^{(2)}(x)$ bestimmt sich aus der Gleichung $u_0 = -x + p\left(1 - 2/(4 + 3e^{-u_0} + e^{-2u_0})\right)$. Unter der Voraussetzung $p \to \infty$, $\sqrt{p} = o(p - 2x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} H_p^{(2)}(x) &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(p, x, u_0)}} \frac{e^{-2u_0}(2 + e^{-u_0})}{(1 + e^{-u_0})^2} \left(1 + \frac{u_0}{x}\right)^p, \\ g_2(x, p, u_0) &= \frac{p}{(x + u_0)^2} + 2e^{-u_0} \left(\frac{1}{(1 + e^{-u_0})^2} - \frac{1}{(2 + e^{-u_0})^2}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

In $H_p^{(1)}(x)$ hat der Integrand ein Randmaximum, und der gegenüber $H_p^{(2)}(x)$ vernachlässigbare Beitrag ist $H_p^{(1)}(x) \sim x/4p$. Setzt man noch $u_0 = -x + p/2 + \varepsilon$, so gilt $\varepsilon \sim 3p\,e^{x-p/2}/8$, und unter Verwendung dieses Resultats folgt $H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{2\pi p}\,e^{-p+2x}(p/2x)^p$. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß im Fall $p \sim x$ sowie durchweg für $p \geqq x$ die asymptotische Darstellung

$$F_q(x) \sim e^x \frac{\Gamma(p+1, x)}{\Gamma(p+1)} \qquad (p \to \infty) \tag{5.3}$$

gilt, was aus (4.11) und (5.1) in Verbindung mit (4.3) folgt. Für $x \to \infty$, $p = ax$, $0 < a < 1$, jedoch hat das erste Glied der Reihe in (4.22) dieselbe Ordnung wie $e^x\Gamma(p+1, x)/\Gamma(p+1)$, so daß dann die asymptotische Darstellung

$$F_q(x) \sim \frac{\pi a}{\sin \pi a}(1 - a)\,e^x \frac{\Gamma(p+1, x)}{\Gamma(p+1)}$$

gilt, die für $p = o(x)$ wieder in (5.3) übergeht.

6. Numerische Ergebnisse

Als Test für die numerische Brauchbarkeit der hergeleiteten asymptotischen Entwicklungen wurden Funktionswerte mit ihnen berechnet. Sie werden im folgenden den exakten Werten gegenübergestellt. Da die Größenordnung der Funktionswerte $F_q(x)$ stark schwankt, sind hier die Werte von

$$I_p(x) = e^{-x} F_{p-1}(x)$$

aufgenommen worden. Diese liegen nach (2.1) zwischen 0 und 1; sie werden in den folgenden Tabellen mit 5 Dezimalen angegeben. Der Einfachheit halber wurden nur ganzzahlige p, x ausgewählt. Der Summand $e^{-x}F_q(-x)\cos \pi q$ konnte für die vorkommenden Paare (x, p) im Rahmen der Tabellengenauigkeit immer vernachlässigt werden.

Tab. 1: *Werte $I_{20}(x)$ und $I_{40}(x)$ für einige x nahe* 20 *bzw.* 40

	$I_{20}(x)$				$I_{40}(x)$		
x	exakt	mit (4.11) bis $m = 0$	mit (4.11) bis $m = 2$	x	exakt	mit (4.11) bis $m = 0$	mit (4.11) bis $m = 2$
15	0,85391	0,87522	0,85471	35	0,77124	0,78038	0,77150
18	0,64339	0,65091	0,64333	39	0,54232	0,54245	0,54229
19	0,55998	0,56061	0,55965	41	0,42147	0,41705	0,42141
21	0,39521	0,38426	0,39477	45	0,21711	0,20838	0,21708
22	0,32047	0,30603	0,32014				
25	0,14910	0,13357	0,14915				

Tab. 2: *Werte $I_p(p)$ mit* (4.11) *für einige $p \in [10, 50]$*

x	exakt	mit (4.11) bis $m = 0$	mit (4.11) bis $m = 2$	mit (4.11) bis $m = 3$
10	0,47166	0,45793	0,46666	0,47671
15	0,47402	0,46565	0,47258	0,47501
20	0,47604	0,47026	0,47546	0,47635
30	0,47909	0,47572	0,47893	0,47915
40	0,48125	0,47897	0,48119	0,48127
50	0,48287	0,48119	0,48283	0,48287

Tab. 3: *Werte $I_p(20)$ für einige $p \in [2, 30]$*

p	exakt	mit (4.22) bis $n = 0$	mit (4.22) bis $n = 2$	p	exakt	mit (4.22) bis $n = 0$	mit (4.22) bis $n = 2$
2	$0{,}_6 4156$	$0{,}_6 4166$	$0{,}_6 4156$	18	0,31330	0,30967	0,31304
4	$0{,}_4 1442$	$0{,}_4 1446$	$0{,}_4 1442$	20	0,47604	0,47026	0,47546
6	$0{,}_3 2066$	$0{,}_3 2068$	$0{,}_3 2066$	22	0,63718	0,62962	0,63606
8	$0{,}_2 1637$	$0{,}_2 1635$	$0{,}_2 1637$	24	0,77278	0,76443	0,77086
10	$0{,}_2 8343$	$0{,}_2 8315$	$0{,}_2 8343$	26	0,87126	0,86330	0,86828
12	0,03006	0,02988	0,03005	28	0,93382	0,92711	0,92939
14	0,08172	0,08104	0,08169	30	0,96899	0,96389	0,96251
16	0,17613	0,17432	0,17603				

Tab. 4: *Werte $I_{20}(x)$ für einige $x \in [2, 14]$*

x	exakt	mit (5.1)	mit Korrek-turfaktor	mit (4.1), (5.2)
2	0,99999	0,99584	0,99999	0,99999
4	0,99995	0,99584	0,99998	0,99995
6	0,99964	0,99583	0,99992	0,99964
8	0,99785	0,99572	0,99945	0,99783
10	0,98982	0,99494	0,99601	0,98894
12	0,96374	0,98931	0,97209	0,95557
14	0,90226	0,95323	0,85345	0,86488

Tab. 5: *Werte $I_{20}(x)$ für einige $x \in [12, 25]$*

x	exakt	mit (4.22) bis $n = 0$	mit (4.22) bis $n = 2$
12	0,96374	0,94439	0,70751
14	0,90226	0,88718	0,87985
15	0,85391	0,84084	0,84419
19	0,55998	0,55269	0,55897
21	0,39521	0,39075	0,39495
25	0,14910	0,14790	0,14906

Die Werte in Tabelle 5 sollen zum Vergleich mit den in Tabelle 1 (linke Hälfte) und Tabelle 4 enthaltenen Werten dienen. In Tabelle 1 liegt der relative Fehler der Werte der letzten Spalte für $p = 20$ um 0,01% und darunter; für $p = 40$ ist er noch fast um eine Zehnerpotenz kleiner. Tabelle 3 zeigt, daß (4.22) mit $n = 2$ für kleine $a = p/x$ sehr genau ist. Der relative Fehler wächst mit a monoton an, ist aber noch für den letzten aufgenommenen Wert ($a = 1{,}5$) kleiner als 0,7%. Mit noch größerem a wird (4.22) schnell unbrauchbar. Aus Tabelle 5 entnimmt man, daß diese Formel für $x < p$ ($a > 1$) im Vergleich zu (4.11) schlechter abschneidet, dagegen für $p < x$ noch etwas günstigere Werte liefert. In Tabelle 4 sind die Werte mit (5.2) bis etwa $x = p/2$ sehr gut (der relative Fehler bei diesem Wert ist kleiner als 0,1%), während die andere Formel, auch mit dem im Anschluß von (5.1) angegebenen Korrekturfaktor, schlechtere Werte liefert. Für $x > 12$ sind beide Formeln wenig brauchbar und müssen durch (4.22) ersetzt werden.

Anhang: Die Zahlen S_r^n und D_r^k

Es sei $C_{ri}^n = \{m_{i1}^{(n)}, \ldots, m_{ir}^{(n)}\}$ mit $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r}$ eine Kombination ohne Wiederholung aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ von der Ordnung $r \leqq n$ (der Eindeutigkeit halber sei $m_{i1}^{(n)} < m_{i2}^{(n)} < \ldots < m_{ir}^{(n)}$). Dann seien die *Stirlingschen Zahlen 1. Art* $S_r^n(n \in \mathrm{N};\ r = 1, 2, \ldots, n)$ wie folgt definiert ([6, 19]; dort in etwas anderer Bezeichnung):

$$S_r^n = \sum m_{i1}^{(n)} \ldots m_{ir}^{(n)}, \quad \text{Summation über alle } \binom{n}{r} \text{ Produkte.} \tag{A 1}$$

Speziell sind $S_1^n = n(n+1)/2$ und $S_n^n = n!$ Durch geeignete Zusammenfassung der Summanden in (A 1) leitet man die Rekursionsformel

$$S_1^1 = 1,\ S_r^n = nS_{r-1}^{n-1} + S_r^{n-1} \qquad (n \geqq 2;\ r = 2, 3, \ldots, n-1)$$

her. Diese ist auch für $r = 1$ und $r = n$ anwendbar, wenn $S_0^{n-1} = 1$ und $S_n^{n-1} = 0$ für alle $n \geqq 2$ gesetzt wird. Aus (A 1) ergibt sich ferner

$$\prod_{m=1}^{k} \left(1 - \frac{m}{p}\right) = 1 + \sum_{r=1}^{k} (-1)^r S_r^k/p^r \qquad \text{und} \qquad \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r^n = 1 (n \in \mathrm{N}).$$

Die Zahlen $D_k^r(r \in \mathrm{N};\ k = 1, 2, \ldots, r)$ definieren wir durch die Rekursionsformel

$$D_1^1 = 1,\ D_k^r = (r + k - 1)\,(D_{k-1}^{r-1} + D_k^{r-1})\ (r \geqq 2). \tag{A 4}$$

Dabei ist, um diese für $k = 1$ und $k = r$ anwenden zu können, noch $D_0^r = D_{r+1}^r = 0$ für $r \in \mathrm{N}$ zu setzen. Speziell ergeben sich

$$D_1^r = r!,\ D_r^r = 1 \cdot 3 \cdots (2r-1),\ D_2^r = (r+1)!\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r}\right).$$

Explizit können die D_k^r durch

$$D_k^r = (r+k)! \sum \frac{1}{\lambda_2!\,\lambda_3! \ldots \lambda_{r+1}!\, 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} \ldots (r+1)^{\lambda_{r+1}}} \tag{A 5}$$

angegeben werden, wobei über alle nicht-negativen ganzzahligen λ_i mit $\lambda_2 + \cdots + \lambda_{r+1} = k$ zu summieren ist, für die $1\lambda_2 + \cdots + r\lambda_{r+1} = r$ gilt. (A 5) kann durch Vergleich von (4.13) mit

Tab. 6: *Erste Werte von S_r^n (außer $S_n^n = n!$) und D_k^r*

$k, n \downarrow$ \ $r \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	6	24	120	720	5040	40320
2	3	3	20	130	924	7308	64224	623376
3	6	11	15	210	2380	26432	303660	3678840
4	10	35	50	105	2520	44100	705320	11098780
5	15	85	225	274	945	34650	866250	18858840
6	21	175	735	1624	1764	10395	540540	18288270
7	28	322	1960	6769	13132	13068	135135	9459450
8	36	546	4536	22449	67284	118124	109584	2027025

Oberer Teil (über der Treppenlinie): D_k^r; unterer Teil: S_r^n

der aus [13: (3.67)] folgenden Darstellung für $\Gamma(p+1, p/a)$ erhalten werden. Die $D_k{}^r$ erfüllen, wie durch vollständige Induktion folgt, für alle $r \in \mathbb{N}$ die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^k D_k{}^r = (-1)^r \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{[(r+1)/2]} (-1)^{k-1} D_k{}^{r-k+1} = r.$$

Mit vollständiger Induktion bezüglich n ergeben sich unter Anwendung von (A 4) und bekannten Eigenschaften von Binomialkoeffizienten die Zusammenhänge

$$S_r{}^n = \sum_{k=1}^{r} \binom{n+1}{r+k} D_k{}^r \quad \text{und} \quad D_k{}^r = (-1)^{r+k} \sum_{l=r+1}^{r+k} (-1)^l \binom{r+k}{l} S_r{}^{l-1}. \tag{A 6}$$

LITERATUR

[1] Banuelos, A., Depine, R. A., and R. C. Mancini: Analytical expansions for Fermi-Dirac functions. J. Math. Phys. **22** (1981), 452–455.

[2] Berg, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1968.

[3] Dingle, R. B.: The Fermi-Dirac integrals. Appl. Sci. Res. **B 6** (1957), 225–239.

[4] Dingle, R. B.: Asymptotic expansions and converging factors III. Proc. Roy. Soc. London **A 244** (1958), 484–490.

[5] Dingle, R. B.: Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. London–New York: Academic Press 1973.

[6] Fort, T.: Finite differences and difference equations in the real domain. Oxford: Clarendon Press 1948.

[7] McDougall, J., and E. C. Stoner: The computation of Fermi-Dirac functions. Phil. Trans. Roy. Soc. **A 237** (1938), 67–104.

[8] Nordheim, L.: Die neue Statistik. In: J. H. J. Müller und C. S. M. Pouillet: Lehrbuch der Physik, Bd. 4/11. Aufl. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn 1934.

[9] Пагурова, В. И.: Таблицы неполной Гамма-функции. Москва: Вычислительный центр Акад. Наук СССР 1963.

[10] Pearson, K.: Tables of the incomplete Gamma function. London: Biometrica 1934.

[11] Rhodes, P.: Fermi-Dirac functions of integral order. Proc. Roy. Soc. London **A 204** (1950). 395–405.

[12] Schell, H.-J.: Asymptotische Entwicklungen für die unvollständige Gammafunktion. Wiss. Z. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt **22** (1980), 477–485.

[13] Schell, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Darstellungen und Entwicklungen von Parameterintegralen mit zwei reellen Parametern. Dissertation B. Karl-Marx-Stadt: Techn. Hochschule 1980.

[14] Schell, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für unvollständige Integrale. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 427–442.

[15] Sommerfeld, A.: Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik. Z. Physik **47** (1928), 1–32.

[16] Temme, N. M.: The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions. SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 757–766.

[17] Tricomi, F. G.: Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion. Math. Z. **53** (1950), 136–148.

Zusatz bei der Korrektur:

[18] Калиткин, Н. Н., и И. В. Ритус: Гладкая аппроксимация функций ферми-Дирака. Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **26** (1986), 461–465.

[19] Риекстыньш, Э. Я., Оценки остатков в асимптотических разложениях. Рига: Зинатне 1986.

Manuskripteingang: 28. 06. 1985; in revidierter Fassung 03. 03. 1986

VERFASSER:

Dr. H.-J. Schell
Sektion Mathematik der Technischen Universität
Str. der Nationen 62
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt