

Über zwei spezielle inverse Probleme der Potentialtheorie

M. GÜNTHER

Es wird das Problem behandelt, die Gestalt eines Körpers bei bekannter Dichte aus vorgegebenen Werten seines Newtonschen Volumenpotentials oder dessen Gradienten an der Oberfläche zu bestimmen. Die Betrachtungen sind lokaler Art, d. h., der unbekannte Körper liegt in der Nähe einer gegebenen Ausgangsfigur. Zu den Existenzbeweisen werden der Satz über inverse Funktionen und Abschätzungen für Potentiale bei veränderlichen Gebieten benutzt.

Исследуется задача об определении вида тела, если известно его плотность и его Ньютонов объёмный потенциал или градиент этого потенциала на поверхности. Рассуждения носят локальный характер, т. е. неизвестное тело находится вблизи наперёд заданной исходной фигуры. В доказательствах существования используются теорема об обратных функциях и оценки для потенциалов в случае переменных областей.

The problem to determine the shape of a solid body is treated if the density and the values of its Newtonian potential or the gradient of the latter on the surface are known. The considerations have a local character, i.e. the unknown body is situated in a neighbourhood of a known initial configuration. In the existence proofs the inverse function theorem is used as well as estimations for potentials of variable domains.

1. Einleitung

In einer bekannten Arbeit über Randwertprobleme der physikalischen Geodäsie diskutiert L. HÖRMANDER [6] das Problem, die Gestalt eines Körpers (insbesondere der Erde) aus Messungen der Gravitationskraft und des Gravitationspotentials an seiner Oberfläche zu bestimmen. Die Dichte des Körpers tritt dabei nirgends explizit auf. Wir wollen nun solche Aufgaben untersuchen, bei denen die Dichte von vornherein bekannt ist; natürlich können dann das Potential und sein Gradient, nicht mehr gleichzeitig vorgegeben werden. Unsere Betrachtungen sind lokaler Art, d. h. wir bleiben in der Nähe einer bekannten Ausgangsfigur. Dabei wird zunächst das linearisierte Problem (Fréchet-Differential) untersucht und dann die nichtlineare Aufgabe mit Hilfe des Satzes über inverse Funktionen behandelt. Entscheidend sind dabei gewisse potentialtheoretische Abschätzungen. Bezüglich der vielfältigen inversen Aufgabenstellungen in der Potentialtheorie verweisen wir auf G. ANGER [1, 2] A. I. PRILEPKO [15], F. SANSONO [16] sowie B. W. SCHULZE und G. WILDENHAIN [18: Kap. III, § 5].

Im ersten (und einfacheren) Problem wollen wir die Gestalt eines Körpers aus bekannten Werten seines Newtonschen Volumenpotentials an der Oberfläche bestimmen. Dazu nehmen wir an, daß sich der Rand des gesuchten Körpers als Graph $\{(x, R(x)) \mid x \in S\}$ über der Einheitssphäre $S \subset \mathbb{R}^3$ darstellen läßt und wir suchen die Radiusfunktion R . Dieses Problem besitzt einerseits Verbindungen zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (vgl. z. B. die umfassende Darstellung von L. LICHTENSTEIN [9]), andererseits zu der Aufgabe, die Gestalt eines

Körpers so zu bestimmen, daß sein Potential außerhalb dieses Körpers mit einem gegebenen Feld (welches einer elliptischen Differentialgleichung genügt) übereinstimmt (vgl. V. M. ISAKOV [7, 8] und G. A. PAVLOV [14]). Im Unterschied zu den eben erwähnten Arbeiten behandeln wir im Abschnitt 2 das Problem unter möglichst geringen Regularitätsvoraussetzungen; so setzen wir nur die Stetigkeit der Dichte voraus. Abschnitt 3 enthält Abschätzungen für Potentiale bei veränderlichen Gebieten. Die Methode zur Herleitung solcher Abschätzungen geht in ihrem Kern auf L. LICHTENSTEIN [12] zurück. Im Abschnitt 4 untersuchen wir das Problem, die Gestalt eines Körpers aus den Werten des Gradienten des Volumenpotentials an der Oberfläche zu bestimmen. Dazu nehmen wir konstante Dichte an. Genauer suchen wir zu drei auf S gegebenen Funktionen G_1, G_2, G_3 eine Einbettung $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so daß der Gradient des Volumenpotentials, erstreckt über Ω_φ (beschränktes Gebiet, das von $\varphi(S)$ berandet wird), in allen Punkten $\varphi(x)$ (also an der Oberfläche von Ω_φ) die vorgegebenen Werte $G_1(x), G_2(x), G_3(x)$ annimmt. Das linearisierte Problem läßt sich für den Fall einer Kugel als Ausgangsfigur leicht diskutieren und das nichtlineare Problem können wir dann unter wesentlicher Benutzung der Abschätzungen aus Abschnitt 3 und des Satzes über inverse Funktionen in den Hölderräumen H^a , $1 < a \in \mathbb{N}$, behandeln. Dabei verstehen wir unter H^a mit $a = m + \lambda$, $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ und $0 < \lambda \leq 1$, den Raum der m -mal differenzierbaren Funktionen, deren m -te Ableitungen einer Hölderbedingung mit dem Exponenten λ genügen. Im weiteren bezeichnen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_{m+\lambda}$ die Normen in den Räumen C^0 bzw. $H^{m+\lambda}$.

2. Vorgabe des Potentials

Es sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ und $M_{\alpha,\beta} = \{f \in C^0(S) \mid \alpha < f(x) < \beta \text{ für } x \in S\}$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. Für $R \in M_{\alpha,\beta}$ wird vermöge $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R(x/|x|), x \neq 0\} \cup \{0\}$ ein beschränktes und bez. des Nullpunktes sternförmiges Gebiet beschrieben. Wir definieren nun für $t \in [0, 1]$ und $\varrho \in C^0(K_\beta)$ mit $K_\beta = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq \beta\}$

$$P_{R,\varrho}^t(x) = \int_{\Omega_R} \frac{\varrho(y)}{(|x-y|^2 + t^2)^{1/2}} dV_y, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Es ist $P_{R,\varrho} := P_{R,\varrho}^0$ also gerade das zu Ω_R gehörige Newtonsche Volumenpotential mit der Dichte ϱ . Wir setzen $G_t(R)(x) = P_{R,\varrho}^t(R(x)x)$, $x \in S$, und formulieren

Lemma 1: Für $t \in [0, 1]$ ist G_t eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von $M_{\alpha,\beta}$ nach $C^0(S)$ mit dem Differential

$$(DG_t(R) \dot{R})(x) = \int_S \frac{R^2(y) \varrho(R(y)y) \dot{R}(y)}{(|R(x)x - R(y)y|^2 + t^2)^{1/2}} dO_y + \frac{\partial P_{R,\varrho}^t}{\partial r}(R(x)x) \dot{R}(x) \quad (1)$$

für alle $\dot{R} \in C^0(S)$ und $x \in S$ mit

$$\frac{\partial P_{R,\varrho}^t}{\partial r}(x) := (\text{grad } P_{R,\varrho}^t(x), x/|x|), \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^3.$$

Beweis: a) Sei zunächst $t > 0$ und $R \in M_{\alpha,\beta}$ gegeben. Dann gilt

$$G_t(R)(x) = \int_S f_t(R(x), R(y), x, y) dO_y$$

mit

$$f_i(s, u, x, y) = \int_0^u \frac{\varrho(ry) r^2}{(|sx - ry|^2 + t^2)^{1/2}} dr \quad (s, u > 0; x, y \in S).$$

Es ist f_i eine C^∞ -Funktion bez. der Variablen s, u, x . Daher ist $G_t: M_{\alpha, \beta} \rightarrow C^0$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt (vgl. [19: Bsp. 4,4])

$$(DG_t(\hat{R}) \hat{R})(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial u} f_i(R(x), R(y), x, y) \hat{R}(y) dO_y + \hat{R}(x) \int_S \frac{\partial}{\partial s} f_i(R(x), R(y), x, y) dO_y.$$

Daraus folgt aber sofort (1).

b) Wir müssen die Behauptung noch für $t = 0$ zeigen. Aus $|R(x)x - R(y)y| \geq \alpha |x - y|$ für $R \in M_{\alpha, \beta}$ und $x, y \in S$ und einigen trivialen Umformungen der auftretenden Integranden erhält man leicht die Abschätzungen

$$\left| \int_S \frac{R^2(y) \varrho(R(y)y) \hat{R}(y)}{(|R(x)x - R(y)y|^2 + t^2)^{1/2}} dO_y - \int_S \frac{R^2(y) \varrho(R(y)y) \hat{R}(y)}{|R(x)x - R(y)y|} dO_y \right| \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon, \varrho) t^\varepsilon \|\hat{R}\|_0, \\ |P_{R, \varrho}^t(R(x)x) - P_{R, \varrho}(R(x)x)| \leq C(\alpha, \beta, \varrho) t, \\ \left| \frac{\partial P_{R, \varrho}^t}{\partial r}(R(x)x) - \frac{\partial P_{R, \varrho}^0}{\partial r}(R(x)x) \right| \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon, \varrho) t^\varepsilon$$

mit einem beliebig wählbarem $\varepsilon \in (0, 1)$. Also gilt für alle $R \in M_{\alpha, \beta}$

$$\|G_t(R) - G_0(R)\|_0 \leq C(\alpha, \beta, \varrho) t, \\ \|DG_t(R) - DG_0(R)\|_{(C^0, C^0)} \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon, \varrho) t^\varepsilon$$

wobei $DG_0(R)$ zunächst einfach für den Ausdruck auf der rechten Seite von (1) steht. Nach einem bekannten Satz (z. B. [3: 8.6.3]) folgt aber aus dem Beweisschritt a die Behauptung ■

Der Beweis des nächsten Lemmas ist einfach (vgl. z. B. [5: S. 9ff.]) und soll daher nicht angegeben werden.

Lemma 2: Für $R_1, R_2 \in M_{\alpha, \beta}$, $\hat{R} \in C^0(S)$ und alle $x \in S$ gilt

$$\left| \int_S \frac{R_1^2(y) \varrho(R_1(y)y) \hat{R}(y)}{|R_1(x)x - R_1(y)y|} dO_y - \int_S \frac{R_2^2(y) \varrho(R_2(y)y) \hat{R}(y)}{|R_2(x)x - R_2(y)y|} dO_y \right| \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon, \varrho) \|\hat{R}\|_0 \{ \|R_1 - R_2\|_0^\varepsilon + \omega_\varrho(\|R_1 - R_2\|_0) \}, \\ \left| \frac{\partial P_{R_1, \varrho}}{\partial r}(R_1(x)x) - \frac{\partial P_{R_2, \varrho}}{\partial r}(R_2(x)x) \right| \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon, \varrho) \|R_1 - R_2\|_0^\varepsilon.$$

Dabei kann $\varepsilon \in (0, 1)$ wieder beliebig gewählt werden, und

$$\omega_\varrho(\delta) = \sup \{ |\varrho(x) - \varrho(x')| \mid x, x' \in K_\beta \text{ mit } |x - x'| \leq \delta \}$$

bezeichnet den Stetigkeitsmodul von ϱ .

Folgerung: G_0 ist stetig Fréchet-differenzierbar als Abbildung von $M_{\alpha,\beta}$ nach $C^0(S)$.

Wir wollen nun die Existenz von Lösungen $\hat{R} \in C^0(S)$ der Gleichung

$$DG'_0(R) \hat{R} = f \quad (2)$$

bei festen R, ϱ und gegebenen $f \in C^0(S)$ untersuchen. Unter der Voraussetzung $(\partial P_{R,\varrho} / \partial r)(R(x) x) \neq 0$ für $x \in S$, die im weiteren immer erfüllt sein soll, stellt dies ganz allgemein eine Integralgleichung 3. Art (mit schwach singulärem Kern) dar, die der Fredholmschen Theorie zugänglich ist. Die Existenz von Eigenlösungen hängt dabei natürlich sehr von dem gegenseitigen Verhältnis von R und ϱ ab:

A. Im Fall homogener Kugeln (d. h. $R, \varrho = \text{const}$) existieren drei linear unabhängige Eigenlösungen $W_i(x) = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) für $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$. Durch ein einfaches Störungsargument unter Benutzung von Lemma 2 ergibt sich daraus: Ist Ω_R kugelähnlich und schwach inhomogen (d. h. R und ϱ unterscheiden sich in der C^0 -Norm nur wenig von konstanten Funktionen), so existiert zu beliebigen $W \in C^0(S)$, $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Lösung $\hat{R} \in C^0(S)$, $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \in \mathbb{R}^3$ der Gleichungen

$$DG_0(R) \hat{R} + \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i x_i = W(x),$$

$$\int_S R^3(x) \varrho(R(x) x) \hat{R}(x) x_i dO_x = s_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

B. Die Integralgleichung (2) besitzt keine Eigenlösungen.

Wir erwähnen zwei konkrete Fälle, in denen letzteres eintritt:

B'. Im Fall homogener Rotationsellipsoide besitzt (2) bis auf abzählbar unendlich viele „kritische“ Werte des Verhältnisses der Halbachsen keine Eigenlösungen. Zum Beweis dieser Aussage wird eine Reihe von Eigenschaften der Legendreschen Funktionen 1. und 2. Art sowie das Courantsche Minimax-Prinzip benutzt; für Einzelheiten siehe [5].

B''. Halten wir $R \in M_{\alpha,\beta}$ fest und konzentrieren die Dichte ϱ in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts (Körper mit „schweren Kernen“), so ist klar, daß wir auf diese Weise das Auftreten von Eigenlösungen in (2) verhindern. Ist z. B. $R(x) \equiv 1$, $\varrho(x) = \bar{\varrho}(|x|)$ (d. h., die Dichte hängt nur vom Abstand zum Nullpunkt ab) und $0 \leq \bar{\varrho}(1) < \int_0^1 \bar{\varrho}(r) r^2 dr$, so besitzt (2) keine Eigenlösungen.

Es sei nun $R_0 \in M_{\alpha,\beta}$, $\varrho(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega_{R_0}$, und für Ω_{R_0} wollen wir einen der Fälle A, B annehmen. Ferner möge der Schwerpunkt von Ω_{R_0} im Nullpunkt liegen. Wir setzen $W_0(x) = P_{R_0,\varrho}(R_0(x) x)$ für alle $x \in S$.

Theorem 1: Es existieren Konstanten $\delta, \Delta > 0$ und drei linear unabhängige Funktionen $W_1, W_2, W_3 \in C^\infty(S)$ derart, daß es zu beliebigem $W \in C^0(S)$ mit $\|W - W_0\|_0 < \delta$ genau je ein $R \in M_{\alpha,\beta}$ und $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $\|R - R_0\|_0 < \Delta$ und $|a_i| < \Delta$ für $i = 1, 2, 3$;
- der Schwerpunkt von Ω_R liegt im Nullpunkt;
- $P_{R,\varrho}(R(x) x) = W(x) + \sum_{i=1}^3 a_i W_i(x)$ für alle $x \in S$.

Zusatz (Regularität): Ist $W \in H^\lambda(S)$ mit $0 < \lambda < 2$, so ist die nach Theorem 1 bestimmte Radiusfunktion $R \in M_{\alpha,\beta}$ ebenfalls aus $H^\lambda(S)$, falls $(\partial P_{R,\varrho} / \partial r)(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega_R$ ist.

Beweis: Wir geben zunächst die Wahl der Funktionen W_i an: Im Fall A sei $W_i(x) = x_i$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$ und im Fall B wählen wir drei linear unabhängige

Funktionen $W_i \in C^\infty(S)$ so, daß

$$\text{Det} (\langle \tilde{R}_i, DG_0(R_0)^{-1} W_j \rangle_{L_1(S)} \neq 0) \quad \text{mit} \quad \tilde{R}_i(x) = x_i R_0^3(x) \varrho(R_0(x) x) \quad (3)$$

ist. (Eine solche Wahl ist stets möglich: Für $\tilde{W}_i = DG_0(R_0) \tilde{R}_i$ ist

$$\text{Det} (\langle \tilde{R}_i, DG_0(R_0)^{-1} \tilde{W}_j \rangle_{L_1(S)}) = \text{Det} (\langle \tilde{R}_i, \tilde{R}_j \rangle_{L_1(S)}) \neq 0;$$

da die Funktionen \tilde{R}_i linear unabhängig sind. Wählen wir dann $W_i \in C^\infty(S)$ mit $\|W_i - \tilde{W}_i\|_0$ hinreichend klein, so ist (3) erfüllt und die W_i sind linear unabhängig.) Weiter sei $X = C^0(S) \times \mathbf{R}^3$ mit der Norm $\|(R, a)\|_X = \|R\|_0 + |a_1| + |a_2| + |a_3|$. Ist $U := M_{\alpha, \beta} \times \mathbf{R}^3 \subseteq X$, so betrachten wir die Abbildung $F: U \rightarrow X$, die durch $F(R, a) = (W, s)$ mit

$$W(x) = P_{R, \varrho}(R(x) x) + \sum_{i=1}^3 a_i W_i(x), \quad s_i = \int_{\Omega_R} x_i \varrho(x) dV_x \quad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben wird. Offenbar ist $F(R_0, 0) = (W_0, 0)$. Unter Benutzung der Folgerung aus Lemma 2 können wir nun sofort schließen: $F: U \rightarrow X$ ist stetig Fréchet-differenzierbar und es gilt $DF(R, a)(\dot{R}, \dot{a}) = (\dot{W}, \dot{s})$ mit

$$\dot{W} = DG_0(R) \dot{R} + \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i W_i, \quad \dot{s}_i = \int_S R^3(x) \varrho(R(x) x) \dot{R}(x) x_i dO_x. \quad (4)$$

(Man beachte

$$s_i = \int_{\Omega_R} x_i \varrho(x) dV_x = \int_S \int_0^{R(x)} x_i r^3 \varrho(rx) dr dO_x;$$

daher erhält man als Differential die angegebenen Ausdrücke für \dot{s}_i .) Weiter existiert $DF(R_0, 0)^{-1}: X \rightarrow X$ als linearer beschränkter Operator. Im Fall A haben wir das bereits erwähnt. Im Fall B wissen wir zunächst, daß die eindeutige bestimmte Lösung \dot{R} von $DG_0(R_0) \dot{R} = \dot{W} - (\dot{a}_1 W_1 + \dot{a}_2 W_2 + \dot{a}_3 W_3)$ die Form

$$\dot{R} = \dot{R}_0 - \sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \tilde{R}_i \quad \text{mit} \quad \dot{R}_0 = DG_0(R_0)^{-1} \dot{W}, \quad \tilde{R}_i = DG_0(R_0)^{-1} W_i$$

hat. Dann fordert die Gleichung für s_i in (4) gerade

$$-\sum_{i=1}^3 \dot{a}_i \langle \tilde{R}_j, \tilde{R}_i \rangle_{L_1(S)} = \dot{s}_j - \langle \tilde{R}_j, R_0 \rangle_{L_1(S)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

mit den bereits eingeführten Funktionen \tilde{R}_i . Wegen (3) existiert hierfür genau eine Lösung $\dot{a} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3)$. Deshalb hat auch (4) genau eine Lösung $(\dot{R}, \dot{a}) \in X$, und offensichtlich gilt $\|(\dot{R}, \dot{a})\|_X \leq C \|(\dot{W}, \dot{s})\|_X$ mit einer geeigneten Konstanten C . Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über inverse Funktionen für unsere Abbildung F erfüllt und Theorem 1 ist bewiesen ■

Beweis des Zusatzes: Es sei $W \in H^1(S)$, $\|W - W_0\|_0 < \delta$ und $R \in M_{\alpha, \beta}$ die nach Theorem 1 eindeutig bestimmte Radiusfunktion. Wir vermerken zunächst, daß $P_{R, \varrho}(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}^3$ stetig differenzierbar ist und die ersten Ableitungen einer Hölderbedingung mit einem beliebigen Exponenten kleiner 1 genügen (dazu genügt $\varrho \in C^0$, $R \in M_{\alpha, \beta}$). Ferner sei $x_0 \in S$. Wir wählen eine konvexe Umgebung $V \subseteq \mathbf{R}^3$ von $R(x_0) x_0$ so, daß

$$\left| \frac{\partial P_{R, \varrho}}{\partial r}(x) \right| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{für alle } x \in V \quad (6)$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von R können wir dann eine Umgebung $V' \subseteq S$ von x_0 wählen, so daß $R(x)y \in V$ für alle $x, y \in V'$ gilt. Es sei zunächst $0 < \lambda \leq 1$. Für $x, y \in V'$ schreiben wir dann unter Benutzung des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} W(x) - W(y) + \sum_{i=1}^3 a_i (W_i(x) - W_i(y)) &= P_{R,\varrho}(R(x)x) - P_{R,\varrho}(R(y)y) \\ &= (R(x) - R(y)) \frac{\partial P_{R,\varrho}}{\partial r}(x_1) + P_{R,\varrho}(R(y)x) - P_{R,\varrho}(R(y)y); \end{aligned}$$

dabei liegt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ auf der Verbindungsstrecke von $R(x)x, R(y)x$ und somit in V . Wegen (6) folgt daraus die Hölderstetigkeit von R mit dem Exponenten λ . Ist $1 < \lambda < 2$, so wählen wir in einer Umgebung von x_0 auf S lokale Koordinaten und bezeichnen mit D eine Ableitung nach einer dieser Koordinaten. Wegen (6) erhalten wir aus den Auflösungssätzen

$$\begin{aligned} DR(x) &= \left(\frac{\partial P_{R,\varrho}}{\partial r}(R(x)x) \right)^{-1} \\ &\quad \times \left\{ R(x) (\text{grad } P_{R,\varrho}(R(x)x), Dx) - DW(x) - \sum_{i=1}^3 a_i DW_i(x) \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt auch für $1 < \lambda < 2$ die Behauptung ■

Bemerkung: Bei Verschärfung der Glattheitsforderung an ϱ kann nach demselben Beweisschema die Regularitätsaussage weiter verbessert werden, d. h. es können für λ größere Werte zugelassen werden.

3. Hilfssätze über die Abschätzung von Potentialen bei veränderlichen Gebieten

Es sei $f = (f_1, \dots, f_n) \in H^{1+\varepsilon}(S, \mathbb{R}^n)$, und für alle $x, y \in S$ gelte

$$r(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(y))^2 \right)^{1/2} \geq \alpha |x - y|. \quad (7)$$

Ferner sei für feste $\varepsilon \in (0, 1)$ und $\alpha, \beta > 0$

$$\|f\|_{1+\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{1+\varepsilon} < \beta.$$

Ist weiter $g = (g_1, \dots, g_q) \in H^a(S, \mathbb{R}^q)$ mit $a \geq 1 + \varepsilon$, so definieren wir

$$A^q(x, y) = \prod_{i=1}^q (g_i(x) - g_i(y)) \quad (x, y \in S), \quad \|g\|_a = \sum_{i=1}^q (\|g_i\|_a \prod_{j \neq i} \|g_j\|_{1+\varepsilon}).$$

Für $q = 0$ sei $A^0(x, y) \equiv 1$ und $\|g\|_a \equiv 1$. Ist nun $m \geq 0$ eine ganze Zahl, so betrachten wir Integrale der Gestalt

$$I(x) = \int_S \frac{A^{2m}(x, y)}{r(x, y)^{2m+1}} \mu(y) dO_y. \quad (8)$$

Im weiteren sei $l \geq 0$ immer ganzzahlig und $\lambda \in (0, 1)$ mit $l + \lambda \geq \varepsilon$.

Lemma 3: Sind $f \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbb{R}^n)$, $g \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbb{R}^{2m})$ und $\mu \in H^{l+\lambda}(S)$, so ist $I \in H^{l+1+\lambda}(S)$, und es gilt

$$\|I\|_{l+1+\lambda} \leq C(\|\mu\|_l \|g\|_{l+1+\epsilon} \|f\|_{l+1+\lambda} + \|\mu\|_{l+\lambda} \|g\|_{l+1+\epsilon} + \|\mu\|_l \|g\|_{l+1+\lambda}).$$

Die Konstante C hängt von $\alpha, \beta, \epsilon, n, m$ sowie l und λ ab. Ist $l \leq h$ und $0 < \delta \leq \lambda \leq 1 - \delta$, dann ist C gleichmäßig beschränkt gegen eine von $\alpha, \beta, \epsilon, n, m$ sowie h und δ abhängige Konstante \bar{C} .

Man sieht zunächst leicht ein, daß es genügt, Integrale der Form (8) in einem Kreis $K_{\rho/2} \subset \mathbb{R}^2$ abzuschätzen, wenn f, g, μ Funktionen in einem Kreis $K_\rho \subset \mathbb{R}^2$ sind und die Integration über K_ρ erstreckt wird. Für solche Integrale gelingt eine Abschätzung durch geeignete Umformungen des Integranden und Zerlegung des Integrationsgebietes unter Ausnutzung gewisser Eigenschaften der Ausdrücke $A^q(x, y)$; vgl. [5: S. 80ff.]. Dieses Vorgehen entspricht einer konsequenten Weiterverfolgung der in den klassischen Arbeiten von L. LICHTENSTEIN [11, 12] und J. SCHAUDER [17] sowie von N. M. GÜNTER [4] benutzten Methoden.

Es seien jetzt $f^0, f^1 \in H^{l+\epsilon}(S, \mathbb{R}^n)$ so, daß $\|f^0\|_{l+\epsilon}, \|f^1\|_{l+\epsilon} < \beta$ und (7) gilt, und die entsprechenden Integrale (8) seien I_0 und I_1 .

Lemma 4: Sind $f^0, f^1 \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbb{R}^n)$, $g \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbb{R}^{2m})$ und $\mu \in H^{l+\lambda}(S)$, so gilt

$$\|I_0 - I_1\|_{l+1+\lambda} \leq C\{\|\mu\|_l \|g\|_{l+1+\epsilon} (\|f^0 - f^1\|_{l+\epsilon} (\|f^0\|_{l+1+\lambda} + \|f^1\|_{l+1+\lambda}) + \|f^0 - f^1\|_{l+1+\lambda}) + \|\mu\|_{l+\lambda} \|g\|_{l+1+\epsilon} \|f^0 - f^1\|_{l+\epsilon} + \|\mu\|_l \|g\|_{l+1+\lambda} \|f^0 - f^1\|_{l+\epsilon}\}. \tag{9}$$

Beweis: Wir zeigen dies nur für $f^0, f^1 \in C^\infty(S, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(S, \mathbb{R}^{2m})$ und $\mu \in C^\infty(S)$; der allgemeine Fall läßt sich unter Ausnutzung der Dichtheit von C^∞ in C^l darauf zurückführen. Wir setzen $f^s = (1-s)f^0 + sf^1$ für $s \in [0, 1]$; es ist dann $\|f^s\|_{l+\epsilon} < \beta$. Weiter existiert eine von α, β, ϵ abhängige Konstante $\eta > 0$, so daß für $\|f^0 - f^1\|_{l+\epsilon} < \eta$ gilt

$$r_s(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n (f_i^s(x) - f_i^s(y))^2 \right)^{1/2} \geq \frac{\alpha}{2} |x - y| \quad (s \in [0, 1]; x, y \in S).$$

Wir können uns beim Beweis auf solche f^0, f^1 beschränken. Es seien I_s die Integrale (8) mit f^s anstelle von f . Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} & \frac{dI_s}{ds}(x) \\ &= -(2m+1) \sum_{i=1}^n \int_S \frac{A^{2m}(x, y) (f_i^s(x) - f_i^s(y)) [(f_i^1(x) - f_i^0(x)) - (f_i^1(y) - f_i^0(y))]}{r_s(x, y)^{2m+3}} \\ & \quad \times \mu(y) dO_y \end{aligned}$$

und die durch $s \mapsto dI_s/ds$ vermittelte Abbildung von $[0, 1]$ nach $C^0(S)$ ist stetig. (Man beachte dazu, daß $I_s, dI_s/ds$ nur schwach singuläre Integranden enthalten.) Also ist dI_s/ds eine Summe von Integralen der Art (8). Wenden wir nun Lemma 3 an, so folgt $dI_s/ds \in C^\infty(S)$ und für $\|dI_s/ds\|_{l+1+\lambda}$ ergibt sich eine Abschätzung nach oben gegen den Ausdruck auf der rechten Seite von (9). Ferner ist $\|dI_s/ds\|_{l+2+\lambda}$ unabhängig von s beschränkt und deshalb folgt aus der Interpolationsabschätzung für die Höldernormen

$$\left\| \frac{dI_{s_1}}{ds} - \frac{dI_{s_2}}{ds} \right\|_{l+1+\lambda} \leq C \left\| \frac{dI_{s_1}}{ds} - \frac{dI_{s_2}}{ds} \right\|_0^{1/(l+2+\lambda)} \quad (s_1, s_2 \in [0, 1]).$$

Daher vermittelt $s \mapsto dI_s/ds$ auch eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach $H^{l+1+\lambda}(S)$, und damit ist $\|I_0 - I_1\|_{l+1+\lambda} \leq \int_0^1 \|dI_s/ds\|_{l+1+\lambda} ds$, woraus die Behauptung folgt ■

Es sei jetzt $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H^{1+\epsilon}(S, \mathbf{R}^3)$ und

$$\left(\sum_{i=1}^3 (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))^2 \right)^{1/2} \geq \alpha |x - y| \quad (x, y \in S), \|\varphi\|_{1+\epsilon} < \beta. \quad (10)$$

Dann vermittelt φ eine eindeutige Abbildung von S auf die geschlossene Ljapunow-Fläche $S_\varphi := \varphi(S)$. Diese berandet ein beschränktes Gebiet $\Omega_\varphi \subset \mathbf{R}^3$. Ist f eine beliebige auf S gegebene Funktion, dann bezeichne \tilde{f} immer die durch $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ auf S_φ definierte Funktion. Wir betrachten nun die Potentiale

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial x_i}(x) = \int_{S_\varphi} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^3} dV_y, \quad (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3),$$

$$W_i(x) = \int_S \frac{(y_i - \varphi_i(x))(\tilde{\psi}(y) - \psi(x))}{|y - \varphi(x)|^3} \tilde{\mu}(y) dO_y, \quad (x \in S; i = 1, 2, 3),$$

wobei μ und ψ auf S gegebene Funktionen sind.

Lemma 5: Sind $\varphi \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbf{R}^3)$, $\psi \in H^{l+1+\lambda}(S)$ und $\mu \in H^{l+\lambda}(S)$, so sind $\frac{\partial P_\varphi}{\partial x_i} \circ \varphi$, $W_i \in H^{l+1+\lambda}(S)$ ($i = 1, 2, 3$), und es gilt

$$\left\| \frac{\partial P_\varphi}{\partial x_i} \circ \varphi \right\|_{l+1+\lambda} \leq C \|\varphi\|_{l+1+\lambda},$$

$$\|W_i\|_{l+1+\lambda} \leq C(\|\mu\|_\epsilon \|\psi\|_{1+\epsilon} \|\varphi\|_{l+1+\lambda} + \|\mu\|_{l+\lambda} \|\psi\|_{1+\epsilon} + \|\mu\|_\epsilon \|\psi\|_{l+1+\lambda}).$$

Beweis: Nach partieller Integration folgt

$$\left(\frac{\partial P_\varphi}{\partial x_i} \circ \varphi \right)(x) = \int_{S_\varphi} \frac{n_i(y)}{|y - \varphi(x)|} dO_y,$$

dabei bezeichnet $n_i(y)$ den Richtungskosinus der äußeren Normalen von S_φ bez. der x_i -Achse. Nun können wir die Integrationen über S_φ noch auf solche über S transformieren, und damit können $(\partial P_\varphi / \partial x_i) \circ \varphi$, W_i als Integrale über S von der Form (8) dargestellt werden. Lemma 3 liefert dann die Behauptung ■

Es seien nun $\varphi^0, \varphi^1 \in H^{1+\epsilon}(S, \mathbf{R}^3)$ derart, daß (10) erfüllt ist. Die entsprechenden Potentiale W_i^0, W_i^1 seien mit den gleichen Funktionen μ, ψ gebildet. Aus Lemma 4 erhalten wir dann

Lemma 6: Sind $\varphi^0, \varphi^1 \in H^{l+1+\lambda}(S, \mathbf{R}^3)$, $\psi \in H^{l+1+\lambda}(S)$ und $\mu \in H^{l+\lambda}(S)$, so gilt

$$\left\| \frac{\partial P_{\varphi^1}}{\partial x_i} \circ \varphi^1 - \frac{\partial P_{\varphi^0}}{\partial x_i} \circ \varphi^0 \right\|_{l+1+\lambda}$$

$$\leq C(\|\varphi^0 - \varphi^1\|_{1+\epsilon} (\|\varphi^0\|_{l+1+\lambda} + \|\varphi^1\|_{l+1+\lambda}) + \|\varphi^0 - \varphi^1\|_{l+1+\lambda}),$$

$$\|W_i^1 - W_i^0\|_{l+1+\lambda} \leq C\{\|\mu\|_\epsilon \|\psi\|_{1+\epsilon} (\|\varphi^0 - \varphi^1\|_{1+\epsilon} (\|\varphi^0\|_{l+1+\lambda} + \|\varphi^1\|_{l+1+\lambda}))$$

$$+ \|\varphi^0 - \varphi^1\|_{l+1+\lambda} + \|\mu\|_\epsilon \|\psi\|_{l+1+\lambda} \|\varphi^0 - \varphi^1\|_{1+\epsilon} + \|\mu\|_{l+\lambda} \|\psi\|_{1+\epsilon} \|\varphi^0 - \varphi^1\|_{1+\epsilon}\}.$$

4. Vorgabe des Gradienten des Potentials

Gegenüber Abschnitt 2 ändern wir unsere Aufgabenstellung jetzt dahingehend ab, daß wir die Gestalt eines Körpers aus bekannten Werten des Gradienten des Volumenspotentials an der Oberfläche zu bestimmen suchen; dabei beschränken wir uns auf den Fall konstanter Dichte. Genauer suchen wir also zu drei auf S gegebenen Funktionen G_1, G_2, G_3 eine Einbettung $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so daß gilt

$$\int_{\Omega_\varphi} \frac{y_i - \varphi_i(x)}{|y - \varphi(x)|^3} dV_y = G_i(x) \quad \text{für } x = (x_1, x_2, x_3) \in S.$$

Wir benötigen zunächst eine Vorbetrachtung. Dazu sei U eine offene Menge von Elementen $\varphi \in H^{1+\epsilon}(S, \mathbb{R}^3)$ mit den Eigenschaften (10), und für $t \in [0, 1]$ seien Abbildungen $E_t: U \rightarrow H^{1+\epsilon}(S)$ definiert durch

$$E_t(\varphi)(x) = \int_{\Omega_\varphi} \frac{y_1 - \varphi_1(x)}{(|y - \varphi(x)|^2 + t^2)^{3/2}} dV_y \quad (x \in S).$$

Lemma 7: Die Abbildungen $E_t: (U \cap H^a(S, \mathbb{R}^3)) \rightarrow H^a(S)$, $1 + \epsilon \leq a \in \mathbb{N}$, sind Fréchet-differenzierbar und es gilt

$$(DE_t(\varphi)\psi)(x) = \int_{S_\varphi} \frac{n_i(y)(y_1 - \varphi_1(x))(\tilde{\psi}_i(y) - \psi_i(x))}{(|y - \varphi(x)|^2 + t^2)^{3/2}} dO_y \quad (x \in S).$$

Dabei seien $n_i(y)$ die Richtungscosinus der äußeren Normalen der Fläche S_φ im Punkt y ; ferner werde die Summenkonvention benutzt.

Beweis: a) Sei zunächst $t > 0$ und $\varphi \in U$ gegeben. Wir wählen einen beliebigen linearen beschränkten Fortsetzungsoperator $L: H^{1+\epsilon}(S_\varphi) \rightarrow H^{1+\epsilon}(\Omega_\varphi)$ und setzen zur Abkürzung $\underline{\psi} = L\tilde{\psi}$ für $\tilde{\psi} \in H^{1+\epsilon}$. Ist jetzt $\psi \in H^{1+\epsilon}(S, \mathbb{R}^3)$ und $\|\tilde{\psi}\|_{1+\epsilon}$ hinreichend klein, dann wird durch $x \mapsto x + \underline{\psi}(x)$ offenbar ein Homöomorphismus von Ω_φ auf $\Omega_{\varphi+\psi}$ geliefert. Daher kann

$$E_t(\varphi + \psi)(x) = \int_{\Omega_\varphi} \frac{y_1 + \underline{\psi}_1(y) - (\varphi_1(x) + \psi_1(x))}{(|(y + \underline{\psi}(y)) - (\varphi(x) + \psi(x))|^2 + t^2)^{3/2}} J(y) dV_y \quad (11)$$

geschrieben werden, wobei $J(y) = \text{Det}(\partial(y_i + \varphi_i(y))/\partial y_i)$ die Funktionaldeterminante bezeichnet und im Integranden keine Singularitäten auftreten. Wir können analog wie im Beweis von Lemma 1 zunächst schließen, daß E_t als Abbildung von U nach $C^0(S)$ Fréchet-differenzierbar ist, und zwar gilt für alle $\psi \in H^{1+\epsilon}(S, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} (DE_t(\varphi)\psi)(x) &= \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_1 - \varphi_1(x)}{(|y - \varphi(x)|^2 + t^2)^{3/2}} \right) (\underline{\psi}_i(y) - \psi_i(x)) dV_y \\ &\quad + \int_{\Omega_\varphi} \frac{y_1 - \varphi_1(x)}{(|y - \varphi(x)|^2 + t^2)^{3/2}} \text{div } \underline{\psi}(y) dV_y, \end{aligned}$$

bzw. nach partieller Integration

$$(DE_t(\varphi)\psi)(x) = \int_{S_\varphi} \frac{n_i(y)(y_1 - \varphi_1(x))(\tilde{\psi}_i(y) - \psi_i(x))}{(|y - \varphi(x)|^2 + t^2)^{3/2}} dO_y, \quad x \in S.$$

Bezeichnet nun DE_0 hierin zunächst rein formal den Ausdruck auf der rechten Seite, so gilt offenbar

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|DE_t(\varphi) - DE_0(\varphi)\|_{\mathcal{L}(H^{1+\varepsilon}, C^0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \|E_t(\varphi) - E_0(\varphi)\|_0 = 0,$$

und zwar gleichmäßig für alle $\varphi \in U$; man beachte dazu, daß in DE_0 nur schwach singuläre Integrale auftreten. Daraus folgt aber (siehe wieder [3: 8.6.3]), daß die Abbildung $E_0 : U \rightarrow C^0(S)$ stetig Fréchet-differenzierbar ist; die Stetigkeit des Differentials folgt dabei aus Lemma 6.

b) Es sei $\varphi \in U \cap H^a(S, \mathbb{R}^3)$, $\psi \in H^a(S, \mathbb{R}^3)$, $1 + \varepsilon \leq a \in \mathbb{N}$ und $\|\psi\|_{1+\varepsilon}$ so klein, daß $\varphi + s\psi \in U$ für $s \in [0, 1]$ gilt. Nach vorigem Schritt ist

$$E_0(\varphi + \psi) - E_0(\varphi) - DE_0(\varphi)\psi = \int_0^1 f(s) ds \quad \text{mit}$$

$$f(s) = DE_0(\varphi + s\psi)\psi - DE_0(\varphi)\psi;$$

dabei ist die Integrierbarkeit von f zunächst im Raum C^0 gesichert. Aus Lemma 6 folgt aber, daß die Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow H^a(S)$ stetig ist, und es gilt $\|f(s)\|_a \leq C(a, \|\varphi\|_a)\|\psi\|_a^2$ für $s \in [0, 1]$. Also ist $\|E_0(\varphi + \psi) - E_0(\varphi) - DE_0(\varphi)\psi\|_a \leq C(a, \|\varphi\|_a)\|\psi\|_a^2$, d. h., E_0 ist als Abbildung von $U \cap H^a(S, \mathbb{R}^3)$ nach $H^a(S)$ Fréchet-differenzierbar. ■

Wir benötigen die Banachräume $X_a = H^a(S, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ mit den Normen $\|(\varphi, c)\|_a = \|\varphi\|_a + |c_1| + |c_2| + |c_3|$. Sei weiter $V = U \times \mathbb{R}^3$. Wir definieren nun eine Abbildung $F : V \rightarrow X_{1+\varepsilon}$ durch die Festlegung $F(\varphi, c) := (G, s)$ mit

$$G_i(x) = \int_{\Omega_\varphi} \frac{y_i - \varphi_i(x)}{|y - \varphi(x)|^3} dV_y + c_i \quad (x \in S), \quad s_i = \int_{\Omega_\varphi} x_i dV_x \quad (i = 1, 2, 3).$$

Mit Hilfe von Lemma 7 sehen wir sofort, daß F Fréchet-differenzierbar ist mit dem Differential $DF(\varphi, c)(\psi, \dot{c}) = (\dot{G}, \dot{s})$,

$$\dot{G}_i(x) = \int_{S_\varphi} \frac{n_j(y) (y_i - \varphi_i(x)) (\tilde{\psi}_j(y) - \psi_j(x))}{|y - \varphi(x)|^3} dO_y + \dot{c}_i,$$

$$\dot{s}_i = \int_{S_\varphi} x_i n_j(x) \tilde{\psi}_j(x) dO_x.$$

Ist nun $\varphi_0 \in U \cap C^\infty(S)$ so, daß $\varphi_0(S) = S$ gilt, dann haben wir die besonders einfache Gestalt

$$\dot{G}_i(\varphi_0^{-1}(x)) = \int_S \frac{(y_i - x_i) y_j (\tilde{\psi}_j(y) - \tilde{\psi}_j(x))}{|y - x|^3} dO_y + \dot{c}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

$$\dot{s}_i = \int_S x_i x_j \tilde{\psi}_j(x) dO_x. \quad (13)$$

Wir fragen nun nach der Existenz einer Lösung (ψ, \dot{c}) hiervon bei gegebenen $(\dot{G}, \dot{s}) \in X_a$. Multiplizieren wir dazu die Gleichungen (12) mit x_i , addieren und beachten $(y_i - x_i) x_i = -|y - x|^2/2$ für $x, y \in S$, so folgt

$$x_i \dot{G}_i(\varphi_0^{-1}(x)) = -\frac{1}{2} \left(\int_S \frac{\Theta(y)}{|y - x|} dO_y - \frac{4\pi}{3} \Theta(x) \right) + \dot{c}_i x_i, \quad (14)$$

wobei $\Theta(x) = x_i \tilde{\psi}_i(x)$ sei. Bei gegebenen $(\dot{G}, \dot{s}) \in X_a$, $1 + \varepsilon \leq a \notin \mathbb{N}$, besitzen nun die Gleichungen (13), (14) genau eine Lösung

$$\Theta \in H^a(S), \dot{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \|\Theta\|_a + \sum_{i=1}^3 |\dot{c}_i| \leq C(a, \|\varphi_0\|_a) \|(\dot{G}, \dot{s})\|_a.$$

Es läßt sich (12) nun umschreiben zu

$$\dot{G}_i(\varphi_0^{-1}(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{in} \int_S \frac{\Theta(y)}{|y-x|} dO_y - \tilde{\psi}_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{in} \int_S \frac{y_j}{|y-x|} dO_y + \dot{c}_i, \tag{15}$$

wobei $(\partial/\partial x_i)_{in}$ für den Grenzwert der entsprechenden Ableitung bei Annäherung an S von innen her steht. Nun ist aber

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{in} \int_S \frac{y_j}{|y-x|} dO_y = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$$

und daher können bei bereits bekannten Θ, \dot{c}_i aus (15) in eindeutiger Weise die Funktionen $\tilde{\psi}_i$ bzw. $\psi_i = \tilde{\psi}_i \circ \varphi_0$ bestimmt werden, und damit sind dann auch (13), (14) erfüllt. Es existiert also $DF(\varphi_0, 0)^{-1}: X_a \rightarrow X_a$ als linearer beschränkter Operator für alle $a \geq 1 + \varepsilon, a \notin \mathbb{N}$.

Es sei jetzt

$$G_i^0(x) = \int_{\Omega_{\varphi_0}} \frac{y_i - \varphi_{0,i}(x)}{|y - \varphi_0(x)|^3} dV_y \quad (x \in S; i = 1, 2, 3).$$

Theorem 2: Zu jedem $a \geq 1 + \varepsilon, a \notin \mathbb{N}$, existieren $\delta, \Delta > 0$, so daß es für beliebige $G_i \in H^a(S)$ ($i = 1, 2, 3$) mit $\|G_i - G_i^0\|_{1+\varepsilon} < \delta$ genau je ein $\varphi \in U \cap H^a(S, \mathbb{R}^3)$ und $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- a) $\|\varphi - \varphi_0\|_{1+\varepsilon} < \Delta$ und $|c_i| < \Delta$ für $i = 1, 2, 3$;
- b) der Schwerpunkt von Ω_{φ} liegt im Nullpunkt;
- c) $\int_{\Omega_{\varphi}} \frac{y_i - \varphi_i(x)}{|y - \varphi(x)|^3} dV_y = G_i(x) + c_i \quad (x \in S; i = 1, 2, 3).$

Beweis: Wie wir bereits festgestellt haben, ist $F: V \rightarrow X_{1+\varepsilon}$ stetig Fréchet-differenzierbar und $DF(\varphi_0, 0)^{-1}: X_{1+\varepsilon} \rightarrow X_{1+\varepsilon}$ existiert als linearer beschränkter Operator. Aus dem Beweis des Satzes über inverse Funktionen wissen wir dann, daß es Konstanten $\delta, \Delta > 0$ gibt, so daß für $G \in H^{1+\varepsilon}(S, \mathbb{R}^3)$ mit $\|G - G^0\|_{1+\varepsilon} < \delta$ die Iterationsfolge $(u_n)_{n=0}^{\infty}, u_0 = (\varphi_0, 0)$ und $u_{n+1} := u_n - DF(u_0)^{-1}(F(u_n) - (G, 0))$ für $n \geq 1$, wohldefiniert ist (d. h. $u_n \in V$) und in der $X_{1+\varepsilon}$ -Norm gegen die eindeutig bestimmte Lösung $u = (\varphi, c)$ von $F(\varphi, c) = (G, 0)$ mit $\|u - u_0\|_{1+\varepsilon} < \Delta$ konvergiert. Ferner gilt $\|u_n - u_0\|_{1+\varepsilon} \leq C \|G - G^0\|_{1+\varepsilon}$ ($n \in \mathbb{N}$) für ein $C > 0$. Ist nun $G \in H^a(S, \mathbb{R}^3)$, $1 + \varepsilon \leq a \notin \mathbb{N}$ und $\|G - G^0\|_{1+\varepsilon} < \delta$, dann ist $u_n \in X_a$ ($n \in \mathbb{N}$). Wir wollen nun die Konvergenz in der X_a -Norm untersuchen. Zunächst erhalten wir aus dem Mittelwertsatz und Lemma 6 für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_a &\leq C_a \|F(u_n) - (G, 0)\|_a \\ &\leq C_a \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|(DF(u_{n-1} + \theta(u_n - u_{n-1})) - DF(u_0))(u_n - u_{n-1})\|_a \\ &\leq C_a' (\|u_n\|_a + \|u_{n-1}\|_a + \|u_0\|_a) \|u_n - u_{n-1}\|_{1+\varepsilon} (\|u_n - u_0\|_{1+\varepsilon} + \|u_{n-1} - u_0\|_{1+\varepsilon}) \\ &\quad + \|u_n - u_{n-1}\|_{1+\varepsilon} (\|u_n - u_0\|_a + \|u_{n-1} - u_0\|_a) \\ &\quad + \|u_n - u_{n-1}\|_a (\|u_n - u_0\|_{1+\varepsilon} + \|u_{n-1} - u_0\|_{1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Ist also $\|G - G^0\|_{1+\varepsilon}$ hinreichend klein (in Abhängigkeit von a), so folgt

$$\|u_{n+1} - u_n\|_a \leq C_a'' \|u_n - u_{n-1}\|_{1+\varepsilon} \max\{\|u_n\|_a, \|u_{n-1}\|_a, \|u_0\|_a\} + \frac{1}{2} \|u_n - u_{n-1}\|_a$$

und deshalb

$$\|u'_{n+1} - u_n\|_a \leq C_d'' s_n \max_{i \leq n} \{\|u_i\|_a\} + \frac{\|u_1 - u_0\|_a}{2^n}$$

mit

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|u_{n-i} - u_{n-i-1}\|_{1+\epsilon}}{2^i}$$

Wegen der Konvergenz von $\sum s_n$ für hinreichend kleines $\|G - G^0\|_{1+\epsilon}$ folgt daraus zunächst die Beschränktheit und damit sofort die Konvergenz von (u_n) in der X_a -Norm ■

LITERATUR

- [1] ANGER, G.: On inverse problems in differential equations: a critical analysis. Veröff. Zentralinst. Physik der Erde (Potsdam) 81/Teil I (1985), 38–44.
- [2] ANGER, G.: A characterization of the inverse gravimetric source problem through extremal measures. In: Advances in geodesy (sel. pap. from Review of Geophys. and Space Phys., eds.: E. W. GRAFAREND and R. H. RAPP). Washington: Amer. Geophys. Union 1984, 83–90.
- [3] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1972.
- [4] GÜNTHER, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1957.
- [5] GÜNTHER, M.: Verallgemeinerte Sätze über implizite Funktionen und Anwendungen auf einige, aus der Geodäsie abgeleitete Problemstellungen. Dissertation A. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1983.
- [6] HÖRMANDER, L.: The boundary problems of physical geodesy. Arch. Rat. Mech. Anal. 62 (1976), 1–52.
- [7] ИСАКОВ, В. М.: О разрешимости обратной задачи теории потенциала. Сиб. мат. жур. 14 (1973), 987–1005.
- [8] ИСАКОВ, В. М.: О существовании решений обратной задачи теории потенциала Дифф. ур-я 16 (1980), 1097–1107.
- [9] LICHTENSTEIN, L.: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin: Springer 1933.
- [10] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin: Springer-Verlag 1931.
- [11] LICHTENSTEIN, L.: Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I. Math. Z. 23 (1925), 72–80.
- [12] LICHTENSTEIN, L.: Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie II–IV. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 71 (1926), 147–211; 78 (1926), 213–239 und 82 (1930), 265–344.
- [13] MORITZ, H.: Advanced physical geodesy. Karlsruhe: Herbert Wichman Verlag 1980.
- [14] ПАВЛОВ, Г. А.: К обратной задаче суммарного потенциала масс. Дифф. ур-я 15 (1979), 287–292.
- [15] ПРИЛЕПКО, А. И.: Über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen inverser Probleme der Potentialtheorie. Math. Nachr. 63 (1974), 135–153.
- [16] SANSONO, F.: Recent advances in the theory of the geodetic boundary value problem. In: Advances in geodesy (sel. pap. from Reviews of Geophys. and Space Phys.; eds.: E. W. GRAFAREND and R. H. RAPP). Washington: Amer. Geophys. Union 1984, 13–26.
- [17] SCHAUDER, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen I. Math. Z. 33 (1931), 602–640.
- [18] SCHULZE, B. W., und G. WILDENHAIN: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin: Akademie-Verlag 1977.
- [19] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.

Manuskripteingang: 30. 07. 1985

VERFASSER

Dr. MATTHIAS GÜNTHER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig