

## Ein Oszillationskriterium

K. MORGENTHAL

Für die Gleichung

$$x'(t) = - \int_{\tau=0}^{\infty} x(t - \tau) dr(t, \tau) \quad (-\infty < A \leq t < \infty)$$

wird ein Oszillationssatz bewiesen, der ein früheres Resultat des Autors und ein Kriterium von B. R. Hunt und J. A. Yorke verallgemeinert.

Для уравнения

$$x'(t) = - \int_{\tau=0}^{\infty} x(t - \tau) dr(t, \tau) \quad (-\infty < A \leq t < \infty)$$

доказывается осцилляционная теорема, которая обобщает один прежний результат автора и критерий Б. Р. Гунта и И. А. Йорка.

An oscillation theorem for the equation

$$x'(t) = - \int_{\tau=0}^{\infty} x(t - \tau) dr(t, \tau) \quad (-\infty < A \leq t < \infty)$$

is proved, which generalizes an earlier result of the author and a criterion of B. R. Hunt and J. A. Yorke.

### 1. Einleitung

Wir betrachten die Funktional-Differentialgleichung

$$x'(t) = - \int_{\tau=0}^{\infty} x(t - \tau) dr(t, \tau) \quad (-\infty < A \leq t < \infty) \quad (1)$$

unter den üblichen Voraussetzungen über den Kern  $r(t, \tau)$  (vgl. [7, 8]) und verwenden die in [7] benutzten Bezeichnungen  $\sigma(t)$ ,  $\Delta(t)$  usw.

Der Bequemlichkeit halber stellen wir die Voraussetzungen über den Kern und die benutzten Bezeichnungen noch einmal zusammen:

1.  $r(t, \tau)$  ist definiert bei  $A \leq t < \infty$ ,  $0 \leq \tau < \infty$ .
2. Es gilt  $r(t, 0) = 0$  ( $A \leq t < \infty$ ), und bei jedem  $t \in [A, \infty)$  ist  $r(t, \cdot)$  monoton nicht-fallend.
3. Es existiert eine auf  $[A, \infty)$  stetige Funktion  $\sigma(t) \geq 0$ , so daß gilt:
  - 3.1.  $r(t, \tau) = r(t, \sigma(t))$  ( $A \leq t < \infty$ ,  $\sigma(t) \leq \tau < \infty$ ).

3.2.  $r(t, \sigma(t))$  ist stetig auf  $[A, \infty)$ .

$$3.3. \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ A \leq t'}} \int_{\tau=0}^{\min(\sigma(t), \sigma(t'))} |r(t, \tau) - r(t', \tau)| d\tau = 0 \quad (A \leq t < \infty).$$

Bei  $A \leq t < \infty$  sei  $M(t) = r(t, \sigma(t))$  und

$$\delta(t) = \sup \{ \tau \geq 0 : \tau \leq \sigma(t), r(t, \tau) = 0 \},$$

$$\Delta(t) = \inf \{ \tau \geq 0 : r(t, \tau) = r(t, \sigma(t)) \}.$$

Weiter sei

$$\delta_0 = \inf \{ \delta(t) : A \leq t < \infty \}, \Delta_0 = \sup \{ \Delta(t) : A \leq t < \infty \},$$

$$E(T) = \inf \{ t - \Delta(t) : t \geq T \} \quad (A \leq T < \infty).$$

Wir setzen im folgenden stets  $M(t) > 0$  ( $A \leq t < \infty$ ) und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \Delta(t)) = \infty \quad (2)$$

voraus. Wegen (2) ist  $-\infty < E(T)$  ( $A \leq T < \infty$ ) und  $E(T) \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow \infty$ . Nach [7: Satz 9] gilt der folgende Oszillationssatz.

Satz 1: Ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\delta(t)}^t M(s) ds > \frac{1}{e}, \quad (3)$$

so besitzt (1) nur oszillierende Lösungen.

In der vorliegenden Arbeit geben wir nur eine Verallgemeinerung dieses Satzes an. In [2] haben B. R. HUNT und J. A. YORKE für

$$x'(t) = -\sum_{i=1}^n q_i(t) x(t - T_i(t)) \quad (0 \leq t < \infty), \quad (4)$$

$q_i$  und  $T_i$  stetig und positiv auf  $[0, \infty)$ ,

das folgende Kriterium bewiesen.

Satz 2: Sind die Funktionen  $T_i$  nach oben beschränkt,

$$T_i(t) \leq T_0 \quad (i = 1, \dots, n; 0 \leq t < \infty), \quad (5)$$

und gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n T_i(t) q_i(t) \right) > \frac{1}{e}, \quad (6)$$

so besitzt (4) nur oszillierende Lösungen.

Es zeigt sich, daß man durch Spezialisierung aus unserem Oszillationskriterium eine „Integralform“ des Kriteriums von Hunt und Yorke gewinnen kann, die dieses verallgemeinert.

Bemerkung: Für die Gleichung (4) lautet die Bedingung (3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{\substack{t - \min_{1 \leq j \leq n} T_j(t) \\ 1 \leq j \leq n}}^t \left( \sum_{i=1}^n q_i(s) \right) ds \right) > \frac{1}{e} \tag{7}$$

Die Bedingungen (6) und (7) sind „unabhängig“, d. h., man kann Gleichungen angeben, für die jeweils nur eine dieser Bedingungen erfüllt ist.

Bez. weiterer Arbeiten zur betrachteten Fragestellung verweisen wir auf [1, 3–6, 8–10].

## 2. Ein Oszillationssatz

Für  $t \in [A, \infty)$  sei  $W_t$  die Menge der Wachstumspunkte der Funktion  $r(t, \cdot)$ . Diese ist abgeschlossen und wegen der Voraussetzung  $M(t) > 0$  ist  $W_t \neq \emptyset$ . Im folgenden setzen wir stets  $\delta(t) = \min \{ \tau : \tau \in W_t \} > 0$  voraus. Es gilt  $W_t \subseteq [\delta(t), \Delta(t)]$ .

Satz 3: Wenn eine auf  $(0, \infty)$  stetige, positive und beschränkte Funktion  $\psi$  existiert, für die die Ungleichungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \min_{\alpha \in W_t} \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{t-\alpha}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \right) > \frac{1}{e} \tag{8}$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{t-\delta(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \right) > 0 \tag{9}$$

erfüllt sind, so besitzt (1) nur oszillierende Lösungen.

Beweis: Wir nehmen an, (1) besitze eine nichtoszillierende Lösung  $f$ . Da mit  $f$  auch  $-f$  Lösung von (1) ist, können wir  $f(t) > 0$  für alle hinreichend großen  $t$  annehmen und wegen  $E(T) \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow \infty$  ein  $T_1$  mit  $E(E(T_1)) \geq A$  und  $0 < f(t)$  bei  $E(E(T_1)) \leq t < \infty$  wählen. Es gilt dann

$$f'(t) = - \int_{\tau=0} f(t - \tau) dr(t, \tau) \leq 0 \quad (E(T_1) \leq t < \infty),$$

so daß  $f$  auf  $[E(T_1), \infty)$  monoton nichtwachsend ist. Es sei

$$g(t) = \min_{\tau \in W_t} \frac{f(t - \tau)}{f(t) \psi(\tau)} \quad (T_1 \leq t < \infty).$$

$T(t)$  sei eine Stelle in  $W_t$ , an der das Minimum angenommen wird. Da  $\psi$  nach Voraussetzung beschränkt ist, existiert eine Konstante  $K > 0$  mit  $\psi(t) \leq K$  ( $0 < t < \infty$ ). Wegen der Monotonie von  $f$  gilt daher

$$g(t) \geq 1/K > 0 \quad (T_1 \leq t < \infty). \tag{10}$$

Aus der Definition von  $g(t)$  folgt

$$f'(t) \leq -g(t) f(t) \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(t, \tau) \quad (T_1 \leq t < \infty). \tag{11}$$

Sei  $g_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ . Wegen (10) ist  $g_0 \geq 1/K > 0$ . Wir zeigen nun, daß im Fall  $g_0 < \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\psi(T(t))} \int_{t-T(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \right) \leq \frac{1}{e} \quad (12)$$

und im Fall  $g_0 = \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{t-T(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \right) = 0 \quad (13)$$

gilt. Da (12) der Voraussetzung (8) und (13) der Voraussetzung (9) widerspricht ist damit der Satz bewiesen.

a) Sei  $g_0 < \infty$ . Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  können wir dann ein  $T_2 > T_1$  mit  $g_0 - \varepsilon < g(t)$  ( $T_2 \leq t < \infty$ ) wählen. Aus (11) erhalten wir

$$f'(t) \leq -(g_0 - \varepsilon) f(t) \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(t, \tau) \quad (T_2 \leq t < \infty). \quad (14)$$

Wir wählen nun ein  $T_3 \geq T_2$ , so daß  $t - \Delta(t) \geq T_2$  ( $T_3 \leq t < \infty$ ) gilt. Dann ist auch  $t - T(t) \geq T_2$  ( $T_3 \leq t < \infty$ ) und durch Integration erhalten wir aus (14)

$$\ln \frac{f(t - T(t))}{f(t)} \geq (g_0 - \varepsilon) \int_{t-T(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \quad (T_3 \leq t < \infty).$$

Wegen  $\ln \lambda \leq \lambda/e$  und der Definition von  $g(t)$  folgt

$$\frac{1}{e} g(t) \geq \frac{g_0 - \varepsilon}{\psi(T(t))} \int_{t-T(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \quad (T_3 \leq t < \infty).$$

Bei  $t \rightarrow \infty$ , unter Beachtung von  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $g_0 > 0$ , erhalten wir hieraus (12).

b) Sei  $g_0 = \infty$ . Wir nehmen an, (13) sei nicht erfüllt. Dann können wir ein  $T_4$  mit  $E(T_4) \geq T_1$  und ein  $c > 0$  so wählen, daß

$$0 < c < \int_{t-T(t)}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \quad (E(T_4) \leq t < \infty) \quad (15)$$

gilt. Wir wählen zu jedem  $t \geq T_4$  zwei Werte  $t_1$  und  $t_2$ , so daß  $t - T(t) < t_2 < t_1 < t$  sowie

$$\int_{t_1}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds = \frac{c}{4} \quad \text{und} \quad \int_{t_2}^{t_1} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds = \frac{c}{4}$$

gelten. Dann ist  $s - T(s) \leq t_2$  ( $t_1 \leq s \leq t$ ).

Würde dies nämlich für ein  $s^* \in [t_1, t]$  nicht gelten, so wäre

$$\int_{s^*-T(s^*)}^{s^*} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds \leq \int_{t_2}^{t_1} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds = \frac{c}{2}$$

im Widerspruch zu (15). Bei  $t_1 \leq s \leq t$  gilt also wegen der Monotonie von  $f$  und  $\psi(t) \leq K$

$$\begin{aligned} f'(s) &\leq -g(s) f(s) \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) \\ &= -\frac{f(s - T(s))}{\psi(T(s))} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) \leq -\frac{f(t_2)}{K} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir durch Integration

$$f(t) - f(t_1) \leq -\frac{f(t_2)}{K} \int_{t_1}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds = -\frac{c}{4K} f(t_2)$$

und weiter, da  $f(t) > 0$  ist,

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} < \frac{4K}{c} \quad (T_4 \leq t < \infty). \tag{16}$$

Wegen  $g_0 = \infty$  können wir ein  $T_5 > T_4$  mit  $16K/c^2 < g(t)$  ( $E(T_5) \leq t < \infty$ ) wählen. Beachten wir dies und (11), so erhalten wir

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \leq -\frac{16K}{c^2} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(t, \tau) \quad (E(T_5) \leq t < \infty)$$

und Integration liefert

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \geq \ln \frac{f(t_2)}{f(t_1)} \geq \frac{16K}{c^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau=0}^{\infty} \psi(\tau) dr(s, \tau) ds = \frac{4K}{c} \quad (T_5 \leq t < \infty)$$

im Widerspruch zu (16). Damit ist Satz 3 bewiesen ■

Ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\delta(t)) > 0$ , so folgt aus (8) die Ungleichung (9). Dies ist z. B. der Fall, wenn  $\psi$  monoton nicht fällt und  $\delta_0 > 0$  ist. Also gilt der folgende

**Satz 4:** Ist  $\delta_0 > 0$  und existiert eine auf  $(0, \infty)$  stetige, positive, monoton nicht-fallende und beschränkte Funktion  $\psi$ , die (8) erfüllt, so besitzt (1) nur oszillierende Lösungen.

### 3. Spezialfälle

I. Satz 1 ist ein Spezialfall von Satz 3. Wählt man nämlich in letzterem  $\psi(\tau) \equiv 1$ , so reduzieren sich (8) und (9) wegen  $M(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} dr(s, \tau)$  auf die eine Bedingung (3) von Satz 1. Da man in Satz 3 über  $\psi$  noch verfügen kann, ist er eine Verallgemeinerung von Satz 1 (s. unten).

II. Gilt  $0 < \delta_0 \leq \Delta_0 < \infty$ , so können wir in Satz 4

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{für } 0 < \tau \leq \Delta_0 \\ \Delta_0 & \text{für } \Delta_0 < \tau < \infty \end{cases}$$

wählen und erhalten das folgende Kriterium.

Satz 5: Gilt  $0 < \delta_0 \leq \Delta_0 < \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \min_{\alpha \in W_t} \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t \int_{\tau=0}^{\infty} \tau dr(s, \tau) ds \right) > \frac{1}{e},$$

so besitzt (1) nur oszillierende Lösungen.

Wir betrachten wieder die spezielle Gleichung (4) mit stetigen und positiven  $q_i$  und  $T_i$ . Der zugehörige Kern  $r(t, \tau)$  ist ein „Sprungkern“. Für diesen Spezialfall nimmt Satz 5 die folgende Form an.

Satz 5a: Gilt (5),  $\delta_0 = \inf \{T_i(t) : 1 \leq i \leq n, 0 \leq t < \infty\} > 0$  und ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \min_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{T_j(t)} \int_{t-T_j(t)}^t \left( \sum_{i=1}^n T_i(s) q_i(s) \right) ds \right) > \frac{1}{e}, \quad (17)$$

so besitzt (4) nur oszillierende Lösungen.

Ist die Bedingung (6) des Kriteriums von Hunt und Yorke erfüllt, so gilt auch die Integralbedingung (17). Man kann daher Satz 5a als eine Integralform des Kriteriums von Hunt und Yorke auffassen. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, bei denen (17) erfüllt ist, (6) aber nicht. (17) ist also eine Verallgemeinerung von (6). Allerdings wird in Satz 5a noch die Voraussetzung  $\delta_0 > 0$  gebraucht, die im Kriterium von Hunt und Yorke nicht benötigt wird.

III. Wir betrachten

$$x'(t) = -a(t)x(t-1) - b(t)x\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (18)$$

$a$  und  $b$  stetig und positiv auf  $[0, \infty)$ .

Hier wird die Bedingung (3) von Satz 1 zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1/2}^t (a(s) + b(s)) ds > \frac{1}{e} \quad (19)$$

und die Bedingung (6) von Satz 2 zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( a(t) + \frac{1}{2} b(t) \right) > \frac{1}{e}. \quad (20)$$

Die Bedingung (17) von Satz 5a wird zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \min \left[ \int_{t-1}^t \left( a(s) + \frac{1}{2} b(s) \right) ds, 2 \int_{t-1/2}^t \left( a(s) + \frac{1}{2} b(s) \right) ds \right] \right) > \frac{1}{e}$$

und man erkennt sofort, daß diese Ungleichung sich auf

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1/2}^t (2a(s) + b(s)) ds > \frac{1}{e} \tag{21}$$

reduziert. Ist (19) erfüllt, so gilt natürlich auch (21). Es existieren aber Funktionen  $a$  und  $b$ , für die (21) erfüllt ist und (19) nicht. Dies zeigt, daß unser Satz 3 den Satz 1 echt verallgemeinert. Aus (20) folgt (21), es existieren aber Funktionen  $a$  und  $b$ , für die (21) erfüllt ist und (20) nicht. Die Bedingung (17) ist also tatsächlich eine Verallgemeinerung von (6).

IV. Wir bemerken, daß der Beweis des Satzes 3 unmittelbar auf die Ungleichung

$$x'(t) \leq - \int_{\tau=0}^{\infty} x(t - \tau) d\tau(t, \tau) \quad (-\infty < A \leq t < \infty) \tag{22}$$

übertragbar ist und wir daher das folgende Korollar zu Satz 3 (bzw. Satz 4) haben:

*Existiert eine Funktion  $\psi$  mit den in Satz 3 (Satz 4) genannten Eigenschaften, so besitzt (22) keine final positive Lösung.*

Diese Bemerkung kann nützlich sein. Zum Beispiel sind für die Gleichung (18) mit  $a(t) = (1,1 + 0,5 \sin 2\pi t)/e$  und  $b(t) = e^{-t}$  die Bedingungen (19)–(21) nicht erfüllt. Trotzdem ist sofort zu sehen, daß (18) in diesem Fall nur oszillierende Lösungen besitzt. Würde nämlich eine final positive Lösung  $f$  existieren, so wäre diese für alle hinreichend großen  $t$  Lösung der Ungleichung  $x'(t) \leq -a(t)x(t-1)$ , die jedoch wegen  $\int_{t-1}^t a(s) ds > 1,1/e$  keine final positiven Lösungen haben kann.

V. Wie oben schon gezeigt, gibt es Gleichungen, für die die Bedingung (17) von Satz 5a erfüllt ist, die Bedingung (3) von Satz 1 aber nicht. Für  $x'(t) = -a(t)x(t-3/2) - b(t)x(t-1)$  mit  $a(t) = (e^{-t} + 0,01)/e$  und  $b(t) = (1 + 0,7 \sin 2\pi t)/e$  kann man leicht nachrechnen, daß umgekehrt (3) erfüllt ist und (17) nicht. In diesem Fall kann man auch nicht wie in Beispiel IV schließen, denn es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-3/2}^t a(s) ds < \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t b(s) ds = \frac{1}{e}$$

LITERATUR

- [1] ARINO, O., GYÖRI, I., and A. JAWHARI: Oscillation criteria in delay equations. J. Diff. Equ. 53 (1984), 115–123.
- [2] HUNT, B. R., and J. A. YORKE: When all solutions of  $x'(t) = - \sum_{i=1}^n q_i(t) x(t - T_i(t))$  oscillate. J. Diff. Equ. 53 (1984), 139–145.
- [3] LADAS, G.: Sharp conditions for oscillations caused by delays. Appl. Analysis 9 (1979), 93–98.
- [4] LADAS, G., and I. P. STAVROULAKIS: Oscillations caused by several retarded and advanced arguments. J. Diff. Equ. 44 (1982), 134–152.
- [5] LADAS, G., SFICAS, Y. G., and I. P. STAVROULAKIS: Necessary and sufficient conditions for oscillations. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 81–90.

- [6] LADDE, G. S.: Oscillations caused by retarded perturbations of first order linear ordinary differential equations. *Atti Accad. naz. Lincei, VIII Ser. Rend., Cl. sci. fis. mat. nat.* **63** (1977), 351—359.
- [7] MORGENTHAU, K.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit Nachwirkung. *Z. Anal. Anw.* **4** (1985), 107—124.
- [8] Мышкис, А. Д.: Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Изд-ие 2-ое. Москва: Изд-во Наука 1972.
- [9] Трамов, М. И.: Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом. *Изв. вузов, Сер. мат.* **3** (1975), 92—96.
- [10] Шевело, В. Н., и Н. В. ВАРЕХ: Об исследовании осцилляторных свойств решений дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом. В сб.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Труды Всес. конф., Кацивели (СССР) 1977. Киев: Изд-во Наукова думка 1979, 247—262.

Manuskripteingang: 09. 04. 1986; in revidierter Fassung 18. 11. 1986

**VERFASSER:**

Dr. KLAUS MORGENTHAU  
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität  
Unter den Linden 6  
DDR-1086 Berlin