Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (5) 1987, S. 479 – 484

Integro-Differentialoperatoren bei formal hyperbolischen Differentialgleichungen

K. W. Bauer

Wenn für eine formal hyperbolische Differentialgleichung eine eingliedrige Lösungsdarstellung mit Hilfe eines Differentialoperators bekannt ist, so ist es möglich, alle in einem Fundamentalgebiet definierten Lösungen mit Hilfe eines Integro-Differentialoperators anzugeben. Dabei läßt sich der Kern des Integraloperators, der den zweiten Lösungsanteil liefert, wiederum durch Differentialoperatoren ermitteln. Die Anwendung der Methode wird an verschiedenen Beispielen demonstriert.

Если для формально гиперболического дифференциального уравнения известно одночленное представление решения с помощью дифференциального оператора, то все в фундаментальной области определенные решения могут быть определены с помощью интегро-дифференциального оператора. При этом ядро интегрального оператора задающий вторую часть решения снова может быть определено с помощью дифференциальных операторов. Этот метод демонстрируется на разных примерах.

If a one-term representation of solutions by a differential operator is known for a formally hyperbolic differential equation, then all solutions defined in a fundamental domain may be determined by means of an integro-differential operator. Moreover, the kernel of the integral operator, which yields the second part of the solution, may again be determined by differential operators. The application of this method is illustrated by several examples.

B. Riemann [7] hat eine Darstellung von Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen mit Hilfe eines Integraloperators angegeben. I. N. Vekua [8] hat diese Methode ins Komplexe übertragen und einen allgemeinen Darstellungssatz für die in einem Fundamentalgebiet definierten Lösungen formal hyperbolischer Differentialgleichungen hergeleitet. Die Bedeutung und breite Anwendbarkeit der dabei als Integralkern verwendeten Riemannfunktion hat E. Lanckau [6] herausgestellt und zugleich einen Überblick über bis dahin bekannte Funktionen dieser Art gegeben. Von K. W. Bauer [1, 2] wurden Verfahren entwickelt, welche gestatten, die Riemannfunktionen für solche formal hyperbolischen Differentialgleichungen zu bestimmen, für die zumindest eine eingliedrige Lösungsdarstellung mit Hilfe eines Differentialoperators bekannt ist. Unter Verwendung dieser Ergebnisse wird im folgenden gezeigt, daß für diese Klasse von Differentialgleichungen ein Integro-Differentialoperator existiert, mit dem es möglich ist, alle in einem Fundamentalgebiet definierten Lösungen anzugeben.

Satz: *G sei ein Fundamentalgebiet im Sinne von* I. N. Vekua [8]. *Es gelte $z_0 \in G$, $\zeta_0 \in \overline{G}$, $g(z)$ holomorph in G, $\Psi(\zeta)$ holomorph in $\overline{G}$. Für die Differentialgleichung*

$$w_{z\zeta} + [\log \alpha_n(z, \zeta)]_z \, w_\zeta + B_n(z, \zeta) \, w = 0 \tag{1}$$

sei eine eingliedrige Lösungsdarstellung

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k(z, \zeta) \, g^{(k)}(z) \quad (a_n \equiv 1, n \in \mathrm{N}) \tag{2}$$

in $G \times \overline{G}$ bekannt.

a) *Dann erhält man durch*

$$w = L_n \ldots L_1 g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau)\, L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau \tag{3}$$

mit $\alpha_0(z, \zeta)$ *gemäß*

$$\alpha_{k-1} = \alpha_k B_k, \quad B_{k-1} = B_k + (\log \alpha_{k-1})_{z\zeta} \quad (k = n, n-1, \ldots, 1) \tag{4}$$

und

$$L_k = \frac{\partial}{\partial z} + [\log \alpha_{k-1}(z, \zeta)]_z \quad (k \in \mathrm{N})$$

alle in $G \times \overline{G}$ *definierten Lösungen von* (1).

b) *Ist eine Lösung* w *von* (1) *vorgegeben, so ist die für die Darstellung* (3) *erforderliche Zugeordnete* $\Psi(\zeta)$ *eindeutig bestimmt und folgt gemäß*

$$\Psi(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [M_0 \ldots M_{n-1} w]_{z=z_0} \quad \textit{mit} \quad M_{k-1} = \frac{-1}{B_k(z, \zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (k \in \mathrm{N}). \tag{5}$$

Die Erzeugende g *erhält man bei Vorgabe von* w *durch* $g(z) = [M_0 \ldots M_{n-1} w]_{\zeta=\zeta_0}$.

Beweis: Nach P. Berglez [4] besitzt (1) genau dann eine Lösung der Form (2), falls für ein $n \in \mathrm{N}$ bei Anwendung von (4) $B_0 \equiv 0$ wird. Für die Lösungen der Differentialgleichungen

$$w_{k,z\zeta} + [\log \alpha_k(z, \zeta)]_z\, w_{k,\zeta} + B_k(z, \zeta)\, w_k = 0$$

gilt darüber hinaus

$$w_k = L_k w_{k-1} \text{ und } w_{k-1} = M_{k-1} w_k, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{6}$$

Geht man also von der Differentialgleichung $w_{0,z\zeta} + [\log \alpha_0(z, \zeta)]_z\, w_{0,\zeta} = 0$ mit der Lösung

$$w_0 = g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau$$

aus, so erhält man durch Anwendung der Operatoren $L_1, \ldots, L_n$ mit (3) eine Lösung von (1). Es ist zu zeigen, daß mit (3) alle Lösungen von (1) in $G \times \overline{G}$ vorliegen.

Nach I. N. Vekua [8] erhält man alle in $G \times \overline{G}$ definierten Lösungen von (1) durch

$$w(z, \zeta) = C R(z_0, \zeta_0; z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi_1(t)\, R(t, \zeta_0; z, \zeta)\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_2(\tau)\, R(z_0, \tau; z, \zeta)\, d\tau \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} &C = w(z_0, \zeta_0), \\ &\Phi_1(z) = w_z(z, \zeta_0) + w(z, \zeta_0)\,[\log \alpha_n(z, \zeta_0)]_z, \quad \Phi_2(\zeta) = w_\zeta(z_0, \zeta), \end{aligned} \tag{8}$$

wobei $R(z, \zeta; t, \tau)$ die Riemannfunktion zu (1), $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(\zeta)$ beliebige in G bzw. $\overline{G}$ holomorphe Funktionen bezeichnen. Der Lösungsanteil

$$U(z, \zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau)\, L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau \tag{9}$$

von (3) muß sich gemäß (7) darstellen lassen. Mit (8) folgt $C = 0$ und $\Phi_1(z) \equiv 0$ und wegen $\left[L_n \ldots L_1\left(\alpha_0(z_0, \tau)/\alpha_0(z, \tau)\right)\right]_{\tau=\zeta} \equiv 0$

$$\Phi_2(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right]_{z=z_0} d\tau .$$

Ist umgekehrt eine Lösung der Form

$$V(z, \zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_2(\tau)\, R(z_0, \tau; z, \zeta)\, d\tau$$

vorgegeben und setzt man voraus, daß sich $V(z, \zeta)$ in der Form (3) darstellen läßt, so erhält man mit Φ_2 und M_{k-1} gemäß (8) bzw. (5)

$$-\frac{\Phi_1(\zeta)}{B_n(z_0, \zeta)} = [L_{n-1} \ldots L_1 g(z)]_{z=z_0} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) \left[L_{n-1} \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right]_{z=z_0} d\tau$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[M_0 \ldots M_{n-2} \frac{\Phi_2(\zeta)}{-B_n(z_0, \zeta)}\right]_{z=z_0} = \Psi(\zeta). \tag{10}$$

Wenn also V überhaupt in der Form (3) darstellbar ist, so muß notwendig (10) gelten. Geht man nun von einer Lösung W der Form (9) mit $\Psi(\zeta)$ gemäß (10) aus, so folgt durch partielle Integration, wenn man noch $M_{k-1}^* = \left(-1/B_k(z, \tau)\right) \partial/\partial\tau$, $k \in \mathbb{N}$, verwendet,

$$\begin{aligned} W = {} & \left\{\left[L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right] \left[M_0^* \ldots M_{n-2}^* \frac{\Phi_2(\tau)}{-B_n(z_0, \tau)}\right]_{z=z_0}\right\}_{\tau=\zeta_0}^{\tau=\zeta} \\ & + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{B_1(z_0, \tau)} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} M_1^* \ldots M_{n-2}^* \frac{\Phi_2(\tau)}{-B_n(z_0, \tau)}\right]_{z=z_0} \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial \tau} L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right] d\tau . \end{aligned}$$

Mit $P_k^* = \left(1/B_k(z_0, \tau)\right) \partial/\partial\tau$, $k \in \mathbb{N}$, folgt sodann

$$\begin{aligned} W = {} & \{\ldots\}_{\tau=\zeta_0}^{\tau=\zeta} \\ & + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} M_1^* \ldots M_{n-2}^* \frac{\Phi_2(\tau)}{-B_n(z_0, \tau)}\right]_{z=z_0} \left[L_n \ldots L_1 P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right] d\tau . \end{aligned}$$

Nach n-facher partieller Integration und entsprechender Umformung erhält man schließlich

$$\begin{aligned} W = {} & \sum_{k=0}^{n-1} \left\{\left[L_n \ldots L_1 P_k^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right] \left[M_k^* \ldots M_{n-2}^* \frac{\Phi_2(\tau)}{-B_n(z_0, \tau)}\right]_{z=z_0}\right\}_{\tau=\zeta_0}^{\tau=\zeta} \\ & + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_2(\tau)\, L_n \ldots L_1 P_n^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau , \end{aligned}$$

wobei $P_k^* \ldots P_1^* = 1$ für $k = 0$ und $M_k \ldots M_{n-2} = 1$ für $k = n - 1$ zu setzen ist. Wie in [2] gezeigt wurde, gilt jedoch

$$R(z_0, \tau; z, \zeta) = L_n \ldots L_1 P_n^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}$$

sowie $L_k \ldots L_1 P_k^* \ldots P_1^* \dfrac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)} = \dfrac{\alpha_k(z_0, \tau)}{\alpha_k(z, \tau)}$ und damit

$$\left[L_{k+1} L_k \ldots L_1 P_k^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right]_{\tau=\zeta} \equiv 0.$$

Es folgt sodann

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi_2(\tau)\, R(z_0, \tau; z, \zeta)\, d\tau = L_n \ldots L_1 g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau)\, L_n \ldots L_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau \qquad (11)$$

mit

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \left[P_k^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right] \left[M_k^* \ldots M_{n-2}^* \frac{\Phi_2(\tau)}{-B_n(z_0, \tau)}\right]_{z=z_0} \right\}_{\tau=\zeta_0}.$$

Zusammenfassend gilt damit: Nach I. N. VEKUA [8] erhält man alle in $G \times \bar{G}$ definierten Lösungen von (1) gemäß (7). Der 3. Summand in (7) läßt sich entsprechend (11) mit $\Psi(\zeta)$ gemäß (10) darstellen. Der 2. Summand in (7) läßt sich, wie R. HEERSINK [5] gezeigt hat, durch $L_n \ldots L_1 g_1(z)$ mit einer geeigneten Erzeugenden $g_1(z)$ darstellen. Den 1. Summand in (7) erhält man unter Verwendung von [2] gemäß

$$C R(z_0, \zeta_0; z, \zeta) = L_n \ldots L_1 g_2(z) \quad \text{mit} \quad g_2(z) = C \left[P_n^* \ldots P_1^* \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\right]_{\tau=\zeta_0}.$$

Damit läßt sich die Gesamtheit der in $G \times \bar{G}$ definierten Lösungen von (1) auch in der Form (3) darstellen.

Ist eine Lösung w von (1) vorgegeben, so gilt mit Φ_2 und M_{k-1} gemäß (8) bzw. (5) und mit (10), daß die Zugeordnete $\Psi(\zeta)$ eindeutig gemäß (5) bestimmt ist. Wendet man die Operatoren $M_{n-1}, \ldots, M_0$ nacheinander auf w an, so erhält man mit (3) und der zweiten Beziehung von (6)

$$M_0 \ldots M_{n-1} w = g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)}\, d\tau.$$

Mit $\zeta = \zeta_0$ folgt sodann $g(z)$ ∎

Beispiele: 1. Für die Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \zeta w_\zeta - n w = 0 \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad (12)$$

ist eine eingliedrige Lösungsdarstellung der Form (2) bekannt, und zwar (vgl. [3])

$$w = S_1 g(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \zeta^{n-k} g^{(k)}(z).$$

Hier gilt $\alpha_n = \exp z\zeta$, $B = -n$; mit (4) erhält man $\alpha_k = (-1)^{n-k} n! e^{z\zeta}/k!$, $B_k = -k$, und damit $\alpha_0 = (-1)^n n! e^{z\zeta}$, $B_0 \equiv 0$. Die Kernfunktion für den Integraloperator folgt sodann mit

$$S_1 \frac{\alpha_0(z_0, \tau)}{\alpha_0(z, \tau)} = S_1 e^{\tau(z_0 - z)} = (\zeta - \tau)^n e^{\tau(z_0 - z)}$$

und man erhält die allgemeine Lösungsdarstellung (3) in der Form

$$w = S_1 g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau)\, (\zeta - \tau)^n\, e^{\tau(z_0 - z)}\, d\tau. \tag{13}$$

In [9] wurde bereits von H. WALLNER auf andere Art gezeigt, daß mit (13) eine Lösung von (12) vorliegt. Die Frage, ob mit (13) alle in $G \times \overline{G}$ definierten Lösungen von (12) vorliegen, wurde in [9] nicht untersucht.

2. Für die Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \frac{\lambda}{\eta} w_\zeta - \frac{n(n+1-\lambda)}{\eta^2} w = 0$$

$$(n \in \mathbf{N},\ \lambda \in \mathbf{C},\ \eta = z + \zeta;\ \lambda \notin \{n+1, n+2, \ldots, 2n\},\ \eta \neq 0)$$

gilt die Lösungsdarstellung (vgl. [3])

$$w = S_2 g(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+1-\lambda)_{n-k} \frac{g^{(k)}(z)}{\eta^{n-k}}.$$

Mit $\alpha_n = \eta^\lambda$, $B_n = -n(n+1-\lambda)/\eta^2$ folgt bei Verwendung von (4)

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}\, n!}{k!} (n+1-\lambda)_{n-k}\, \eta^{\lambda-2k-2n},\quad B_k = -\frac{k(2n-k+1-\lambda)}{\eta^2}$$

und damit $\alpha_0 = (-1)^n n!(n+1-\lambda)_n\, \eta^{\lambda-2n}$, $B_0 \equiv 0$. Bildet man mit α_n den betreffenden Integralkern, so erhält man mit

$$S_2(z+\tau)^{2n-\lambda} = \frac{(n+1-\lambda)_n}{(z+\tau)^{\lambda-n}} \left[\frac{\zeta-\tau}{\eta}\right]^n$$

nach geeigneter Normierung der Zugeordneten $\Psi(\tau)$ die allgemeine Lösungsdarstellung (3) gemäß

$$w = S_2 g(z) + \frac{1}{\eta^n} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau) \frac{(\zeta-\tau)^n}{(z+\tau)^{\lambda-n}}\, d\tau.$$

3. Für die Differentialgleichung

$$w_{z\zeta} + \zeta\left[1 + \frac{1}{\delta+n} - \frac{1}{\delta+n+1}\right] w_\zeta + n\left[\frac{1}{(\delta+n)^2} - 1\right] w = 0$$

$$(n \in \mathbf{N},\ \delta = z\zeta)$$

ist gleichfalls eine eingliedrige Lösungsdarstellung der Form (2) bekannt, und zwar

$$w = S_3 g(z) = \sum_{k=0}^{n} \left[A_{n-k} + \sum_{s=1}^{n-k} \frac{(k+s-1)!\,(-1)^{s+1}}{k!\,\delta^s} A_{n-k-s}\right] \zeta^{n-k} g^{(k)}(z)$$

mit $A_m = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} \frac{1}{\delta+n}$, $m = 0, 1, \ldots, n$. Hier gilt mit (4) für $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}\, n!(\delta+k)\, e^\delta}{k!(\delta+k+1)},\quad B_k = k\left[\frac{1}{(\delta+k)^2} - 1\right],$$

und man erhält die Darstellung (3) nach geeigneter Normierung von $\Psi(\tau)$ mit

$$w = S_3 g(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\tau)\, S_3 \frac{(z\tau+1)\, e^{\tau(z_0-z)}}{z}\, d\tau.$$

LITERATUR

[1] Bauer, K. W.: Riemannfunktionen und Differentialoperatoren. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 7–17.
[2] Bauer, K. W.: On the Determination of Riemann Functions. Complex Variables 8 (1987).
[3] Bauer, K. W., and St. Ruscheweyh: Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Lecture Notes in Math. 791 (1980), 1–258.
[4] Berglez, P.: Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen. Ann. Mat. Pura Appl. 143 (1986), 155–185.
[5] Heersink, R.: Characterization of Certain Differential Operators in the Solution of Linear Differential Equations. Glasgow Math. J. 17 (1976), 83–88.
[6] Lanckau, E.: Die Riemannfunktion selbstadjungierter Gleichungen. Wissensch. Z. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt 21 (1979), 535–540.
[7] Riemann, B.: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Gesammelte Math. Werke, Leipzig 1876, S. 145–164.
[8] Vekua, I. N.: New Methods for Solving Elliptic Equations. Amsterdam: North Holland Publ. Co. 1968.
[9] Wallner, H.: Bergman-Operatoren und Riemann-Funktion bei einer Klasse formalhyperbolischer Differentialgleichungen. Ber. math.-stat. Sekt. Forsch. Graz 139 (1980), 1–25.

Manuskripteingang: 12. 06. 1986

VERFASSER:

Prof. Dr. Karl Wilhelm Bauer
Institut für Mathematik der Technischen Universität
Kopernikusgasse 24
A-8010 Graz