Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (6) 1987, S. 517–528

Die Bevorzugung hexagonaler Strukturen bei symmetrischen Oberflächenformen magnetischer Flüssigkeiten

K. QUASTHOFF

Es wird eine magnetische ideale Flüssigkeit unter dem Einfluß eines vertikalen homogenen Magnetfeldes betrachtet. Über rhombischen Gittern beliebigen Gitterwinkels werden Gleichgewichtszustände der freien Oberfläche bestimmt. Insbesondere werden für eine Gitterlänge l_c die Verzweigungsgleichungen gelöst und über regelmäßigem 6-Eck-Gitter für Gitterlängen $l > l_c$ Lösungen der Verzweigungsgleichungen berechnet. Die regelmäßigen 6-Eck-Strukturen haben in einem von physikalischen Parametern abhängenden Intervall die kleinste Energie.

Рассматривается магнитная идеальная жидкость под влиянием вертикального однородного магнитного поля. На ромбических решетках с любым углом строятся конфигурации равновесия свободной поверхности. В частности, для некоторой длины l_c отрезков решетки решаются бифуркационные уравнения и на регулярных шестиугольных решетках с длиной отрезков $l > l_c$ даются решения бифуркационных уравнений. Регулярные шестиугольные структуры в некотором от физических параметров зависящем интервале имеют наименьшую энергию.

A magnetic ideal fluid under the influence of a vertical homogeneous magnetic field is considered. Over rhombic lattices with arbitrary angle equilibrium configurations of the free surface are determined. Especially, for some lattice length l_c the bifurcation equations are solved and over regular hexagonal lattices with lattice length $l > l_c$ solutions of the bifurcation equations are given. The regular hexagonal structures, in an interval depending on physical parameters, have smallest energy.

1. Einleitung

In einem Gebiet $\Omega^- = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z < \zeta(x, y)\}$ sei eine ideale magnetische Flüssigkeit der *Permeabilität* $\mu > 1$ und *Oberflächenspannung* β gegeben. Für die *Induktion* $\mathbf{B}$ und das *Magnetfeld* $\mathbf{H}$ gelte $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Die Flüssigkeit sei unendlich tief. Über der freien Oberfläche Γ: $z = \zeta(x, y)$ befinde sich im Gebiet $\Omega^+ = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z > \zeta\}$ *Vakuum*. Ist das Feld $\mathbf{H}$ homogen und wirkt es vertikal zur freien Oberfläche $z = 0$, so kann es bei gewissen Feldstärken zur Ausbildung zellularer Strukturen auf der Oberfläche kommen (ähnliches Verhalten ist auch von dem Bénard-Problem bekannt). Man interessiert sich nun für mögliche stabile Gleichgewichtszustände der freien Oberfläche $z = \zeta(x, y)$ unter Einwirkung des Magnetfeldes. Innerhalb unserer Lösungsklasse werden dabei regelmäßige hexagonale Strukturen bevorzugt, was auch gut mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmt.

Das Problem wird durch folgende Gleichungen beschrieben, wobei $\mathbf{H}^+$ und $\mathbf{H}^-$ das Magnetfeld in Ω^+ bzw. Ω^- bezeichnen:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}^\pm = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^\pm = 0 \quad \text{in } \Omega^\pm,$$

$$\mathbf{H}_t^+ = \mathbf{H}_t^- \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_n^+ = \mu\mathbf{H}_n^- \quad \text{an } \Gamma$$

($\mathbf{H}_n$ Normal- und $\mathbf{H}_t$ Tangentialkomponente von $\mathbf{H}$). Durch den Ansatz

$$\mathbf{H}^+ = H\nabla\big(z + u^+(x, y, z)\big), \qquad \mathbf{H}^- = H\nabla\big(z/\mu + u^-(x, y, z)\big)$$

geht das Problem in folgende Randwertaufgabe für die Potentiale u^+, u^- über:

$$\begin{aligned} &\Delta u^\pm = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^\pm, \\ &u^+ - u^- = \frac{1-\mu}{\mu} + \text{const}, \qquad \frac{\partial u^+}{\partial n} - \mu\,\frac{\partial u^-}{\partial n} = 0 \quad \text{für} \quad z = \zeta(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir suchen periodische Lösungen und betrachten deshalb die Potentiale $u^\pm$ als periodisch über gewissen Gittern:

Es seien in der (x, y)-Ebene zwei Vektoren $\omega_1 = 2\pi l(1, 0)$ und $\omega_2 = 2\pi l(q, p)$ ($l \in \mathbf{R}^+$; $p = \sin\theta$ und $q = \cos\theta$ mit $0 < \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$) ausgezeichnet. Dann erzeugen diese Vektoren ein Gitter Λ_l vermöge $\Lambda_l = \{\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2;\, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}\}$. θ heißt *Gitterwinkel* von Λ_l. Das von ω_1, ω_2 erzeugte Parallelogramm sei mit P_l bezeichnet. Für einen festen Vektor ω' und für $\mathbf{X} = (x, y)$ wird die Funktion $e^{i\omega'\mathbf{X}}$ betrachtet. Sie ist genau dann Λ_l-periodisch, wenn $e^{i\omega'(\mathbf{X}+\omega)} = e^{i\omega'\mathbf{X}}$ für alle $\omega \in \Lambda_l$ ist, das heißt, wenn $\omega'\omega/2\pi$ für alle $\omega \in \Lambda_l$ ganzzahlig ist. Durch diese Bedingung wird das zu Λ_l *duale Gitter* Λ_l' festgelegt, in dem die beiden Vektoren

$$\omega_1' = (0, 1)/pl, \qquad \omega_2' = (p, -q)/pl \tag{2}$$

eine Basis bilden.

2. Kritische Punkte

Die gesuchten Gleichgewichtszustände erhält man aus der Bedingung, daß die erste Variation der potentiellen Energie gleich 0 sein soll. Bezeichnet ϱ die *Dichte* und g die *Schwerebeschleunigung*, so ist $\alpha = (2\beta/\varrho g)^{1/2}$ die *Kapillaritätskonstante* der Flüssigkeit. Die *potentielle Energie*, die in unserem Fall mit der Gesamtenergie übereinstimmt, wird dann durch

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{l^2 p}\int_{P_l} \sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2}\, dx\, dy + \frac{\varrho g}{2\beta l^2 p}\int_{P_l} \zeta^2\, dx\, dy \\ & + \frac{1}{8\pi\beta l^2 p}\left(\int_{\Omega^+} |\mathbf{H}^+|^2\, dV + \int_{\Omega^-} |\mathbf{H}^-|^2\, dV\right) \end{aligned}$$

gegeben. Nach Einsetzen der Lösungen u^+, u^- des Randwertproblems (1) in den Magnetfeldanteil von E erhält man nach partieller Integration

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{l^2 p}\int_{P_l} \sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2}\, dx\, dy + \frac{\varrho g}{2\beta l^2 p}\int_{P_l} \zeta^2\, dx\, dy \\ & - \frac{H^2}{8\pi\beta l^2 p}\left(\int_{\Omega^+} |\nabla u^+|^2\, dV\right) + \frac{\mu H^2}{8\pi\beta l^2 p}\left(\int_{\Omega^-} |\nabla u^-|^2\, dV\right). \end{aligned}$$

Der vom Parallelfeld stammende unendliche Anteil wurde dabei abgezogen, da er wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit nichts zur Variation beiträgt. Um die Energie des Systems in Abhängigkeit von der freien Oberfläche $z = \zeta(x, y)$ zu minimieren, wird das Energiefunktional mittels $x = lx_1$, $y = lx_2$, $z - \zeta(x, y) = lx_3$ auf ein Festrandgebiet transformiert. Dabei sollen $\zeta(x, y)/l$ in $\eta(x_1, x_2)$ und $u^\pm(x, y, z)$ in $l(1 - \mu)\, v^\pm(x_1, x_2, x_3)/\mu$ übergehen. Die Integration erfolgt über die transformierten Gebiete $S^\pm$ und Λ_1, so daß die Gitterlänge l als zusätzlicher Parameter in unser Problem eingeht. Das Energiefunktional hat nun die Gestalt

$$E(\eta) = \int_{P_1} \frac{\sqrt{1 + |\nabla\eta|^2}}{p}\, dx_1\, dx_2 + \frac{l^2}{\alpha^2 p} \int_{P_1} \eta^2\, dx_1\, dx_2 - \frac{lH^2}{8\pi\beta p} \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^2 J(\eta)$$

mit

$$J(\eta) = \mu \int_{S^-} |\nabla v^-|^2\, dV + \int_{S^+} |\nabla v^+|^2\, dV - 2\mu \int_S v^-_{x_3}(v^-_{x_1}\eta_{x_1} + v^-_{x_2}\eta_{x_2})\, dV$$

$$- 2 \int_{S^+} v^+_{x_3}(v^+_{x_1}\eta_{x_1} + v^+_{x_2}\eta_{x_2})\, dV + \mu \int_{S^-} u^{-2}_{x_3} |\nabla\eta|^2\, dV + \int_{S^+} u^{+2}_{x_3} |\nabla\eta|^2\, dV.$$

Das Minimumproblem für $E = E(\eta)$ ist dabei unter den Nebenbedingungen $v^\pm$ Λ_1-periodisch und $v^+(x_1, x_2, 0) - v^-(x_1, x_2, 0) = \eta(x_1, x_2) + \text{const}$ zu stellen (Beyer [2]).

Für das so transformierte Problem mit dem Energiefunktional E hatte Beyer [2] gezeigt, daß die triviale Lösung $z = 0$ stabil bleibt, solange die zweite Variation von E positiv definit ist. Der kleinste Feldstärkewert H_c, für den die zweite Variation gleich 0 wird, ist durch $H_c^2 = \sqrt{\varrho g \beta}\,(8\pi\mu(1 + \mu)/(1 - \mu)^2)$ gegeben. Neben H führte Beyer durch die Gleichung $H^2 = H_c^2(1 + \varepsilon)$ noch den Parameter ε ein. Er betrachtete dann das Funktional E für Potentiale $u^\pm \in \mathcal{H}_s = \{\eta \in H^s(P_1)\colon \eta$ und seine Ableitungen bis zur Ordnung $s - 1$ sind Λ_1-periodisch$\}$ und zeigte, daß E für $s \geqq 3$ bzw. die erste Variation von E für $s \geqq 4$ im Punkt $(\eta, \varepsilon, \mu - 1) = (0, 0, 0)$ analytisch ist. Mit

$$\eta = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \eta_\omega\, e^{i\omega X} \quad \text{und} \quad A\eta = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \omega\eta_\omega\, e^{i\omega X}$$

erhält das Energiefunktional die Gestalt

$$E(\eta) = \langle Lh, h\rangle + E^{\text{red}} + \sum_{i+j+k \geqq 2} \varepsilon^i(\mu - 1)^j\, E_{ijk}(\eta^{k+3}) \tag{3}$$

mit

$$E^{\text{red}} = (-\varepsilon(A\eta, \eta) + (A\eta, A\eta^2/2 - \eta A\eta)\,(\mu - 1)/2$$
$$- (\eta^3, A^3\eta)/3 + (\eta^2, A^3\eta^2)/4)\,\sqrt{2}\, l/\alpha p - (|\nabla\eta|^2, |\nabla\eta|^2)/8, \tag{4}$$

$$\langle Lh, h\rangle = \langle E_{\eta\eta}h, h\rangle|_{\eta=0, H=H_c} = \text{const} \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \left(|\omega| - \sqrt{2}\, l/\alpha\right)^2 |h_\omega|^2, \tag{5}$$

$$h = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} h_\omega\, e^{i\omega X}.$$

L ist ein Fredholm-Operator vom Index 0 und bildet vom Hilbertraum $\mathcal{H}_s$ in $\mathcal{H}_{s-2}$ ab.
An diese Ergebnisse schließen wir an.

Der Gitterwinkel θ sollte $0 < \theta_0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ für ein gewisses θ_0 erfüllen. Deshalb hat nach (2) ein Vektor aus Λ_1' einen Betrag von mindestens $|\omega_1' + \omega_2'| = \sqrt{2}/\sqrt{1 + \cos\theta_0}$. Aus (5) erhält man hieraus, daß für $H = H_c$ die 2. Variation von E positiv definit bleibt, falls $l < l_{c_{\min}} = \alpha/\sqrt{1 + \cos\theta_0}$ gilt. L hat genau dann einen nichttrivialen Nullraum $N(L)$, wenn $|\omega| = \sqrt{2}\, l/\alpha$ gilt, und es ist

$$N(L) = \left\{\varphi = \sum_{j=1}^{n} z_j\varphi_j : \varphi_j = e^{i\omega_j X} \quad \text{und} \quad |\omega_j| = \sqrt{2}\, l/\alpha\right\}.$$

Sind ω_1', ω_2' die Basisvektoren in (2) und soll, für gewisse $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, $|\omega_j| = |m_1\omega_1' + m_2\omega_2'| = \sqrt{2}\, l/\alpha$ sein, so muß

$$m_1^2 + m_2^2 - 2qm_1m_2 = p^2(\sqrt{2}l/\alpha)^2 \tag{6}$$

gelten. Die Gitterlängen l, die dieser Gleichung genügen, heißen *kritisch*, und all diese sind zu untersuchen, denn H_c hängt nicht von l ab. Wird (6) in Abhängigkeit von q diskutiert und sind ω_1', ω_2' die Vektoren aus (2), so erhält man mit $l_c = \alpha/(\sqrt{2}\,p)$:

(i) Für $l_{c_{\min}} \leqq l < l_c$ ist $\dim N(L) = 2$, die Basiselemente von $N(L)$ sind $\varphi_{1,2} = e^{\pm i(\omega_1' + \omega_2')m\mathbf{X}}$, wobei m Lösung von (6) in der Situation $m_1 = m_2$ ist.

(ii) Für $l = l_c$ ist $\dim N(L) = 6$, falls $q = (2m^2 - 1)/(2m^2)$ für ein $m \in \mathbf{Z}$ gilt, mit $\varphi_{1,2} = e^{\pm i\omega_1'\mathbf{X}}$, $\varphi_{3,4} = e^{\pm i\omega_2'\mathbf{X}}$ und $\varphi_{5,6} = e^{\ i(\omega_1' + \omega_2')m\mathbf{X}}$, und ist $\dim N(L) = 4$ im Falle aller anderen q mit $\varphi_{1,2} = e^{\pm i\omega_1'\mathbf{X}}$ und $\varphi_{3,4} = e^{\pm i\omega_2'\mathbf{X}}$.

(iii) Für $l > l_c$ wird die Lösung von (6) wie folgt bestimmt. Die Anzahl der Lösungen der zu $am_1^2 + bm_1m_2 + cm_2^2 = m$ (mit paarweise primen Koeffizienten a, b und c) gehörenden *Pellschen Gleichung* $t^2 - Du^2 = 4$ $(D = b^2 - 4ac)$ gibt die Anzahl der zueinander *assoziierten* Lösungen (m_1, m_2) an (vgl. dazu auch DIRICHLET [4]).

(iii)$_1$ Ist q irrational, so muß (6) in der Form $m_1^2 + m_2^2 = 2m_1m_2q + (1 - q^2)\, 2l_c^2/\alpha^2 = m$ untersucht werden. Für diese existieren jeweils vier zueinander assoziierte Lösungen. Für jede Gitterlänge l ist hier $\dim N(L) = 4$.

(iii)$_2$ Ist $q = r/s$ rational, $(r, s) = 1$, so haben wir die folgenden drei Fälle: Für $q = 0$ lautet (6) $m_1^2 + m_2^2 = m$, und es existieren vier assoziierte Lösungen, für $q = 1/2$ geht (6) in $m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2 = m$ über, und es existieren sechs assoziierte Lösungen, für alle anderen q hat (6) die Form $sm_1^2 - rm_1m_2 + sm_2^2 = m$, und es existieren nur zwei assoziierte Lösungen. Im weiteren sei in diesen drei Fällen m echtes Produkt von Primzahlpotenzen und die zu betrachtende Gleichung lösbar (Bedingungen an m für die Lösbarkeit der Gleichung erhält man aus dem Reziprozitätsgesetz; so müssen für $q = 0$ die Primzahlen von der Form $4k + 1$ und für $q = 1/2$ von der Form $3k + 1$ sein.) Die Anzahl der primen Lösungen ist ein Vielfaches der Anzahl der assoziierten Lösungen. Um nichtprime Lösungen zu erhalten, muß man von m alle möglichen Kombinationen von geraden Potenzen abspalten und vom Restfaktor in allen Fällen wieder die Anzahl der primen Lösungen bestimmen. Die Gesamtanzahl aller Lösungen gibt die Dimension des Nullraumes an. Sie ist in unserem Fall Vielfaches von 2, 4 oder 6 und kann beliebig groß werden.

Für $q = 1/2$ erhalten wir speziell

Satz 1: *Über einem regelmäßigen hexagonalen Gitter ist genau dann* $\dim N(L) = 12$, *wenn* $(l/\alpha)^2 = 2P/3$ *mit einer Primzahl* $P \equiv 1 \pmod 3$ *gilt.*

3. Herleitung der Verzweigungsgleichungen

Die Verzweigungsgleichungen für das im Abschnitt 2 genannte Variationsproblem $E(\eta) \to$ Min, die wir hier allgemein als $\mathbf{F}(\varphi, \lambda) = 0$ schreiben wollen, erhält man aus der Eulerschen Gleichung $\langle E_\eta, \eta\rangle = 0$. Letztere schreiben wir allgemein als

$$\mathbf{G}(u, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}^k, \qquad \mathbf{G}(0, 0) = 0. \tag{7}$$

Dabei sei $\mathbf{G}$ analytisch über einem Hilbertraum, die Fréchet-Ableitung $L = \mathbf{G}_u(0, 0)$ ein Fredholm-Operator vom Index Null mit $\dim N(L) = n$ und $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ als Basis in $N(L)$. Dann kann man die Zerlegung nach Ljapunov-Schmidt (s. etwa CHOW und HALE [3]) wie folgt durchführen: Ist Q der Orthogonalprojektor auf den Wertebereich $R(L)$ von L, so projiziert $P = I - Q$ auf das orthogonale Komplement

$R(L)^{\perp}$, und die Gleichung $G(u, \lambda) = 0$ ist äquivalent zum System

$$QG(u, \lambda) = 0, \tag{8}$$

$$PG(u, \lambda) = 0. \tag{9}$$

Sei im weiteren $\psi \in N(L)^{\perp}$ und $\varphi = z_1\varphi_1 + \cdots + z_n\varphi_n \in N(L)$. Dann ist (8) in einer kleinen Umgebung von $(u, \lambda) = (0, 0)$ eindeutig nach ψ auflösbar (Satz von BANACH). Wird die Lösung $\psi(\varphi, \lambda)$ in (9) eingesetzt, so erhält man die Verzweigungsgleichungen $PG(\varphi + \psi(\varphi, \lambda), \lambda) = 0$. Ist L selbstadjungiert, so hat P die Form $P\cdot = (\cdot, \varphi_1)\,\varphi_1 + \cdots + (\cdot, \varphi_n)\,\varphi_n$, woraus $F_1\varphi_1 + \cdots + F_n\varphi_n = 0$ mit $F_j = \big(G(\varphi + \psi(\varphi, \lambda), \lambda), \varphi_j\big)$ für $j = 1, \ldots, n$ folgt. Wegen der linearen Unabhängigkeit der φ_j lautet das System der Verzweigungsgleichungen schließlich $F_j(\varphi, \lambda) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, und es besteht demnach aus n Gleichungen in den Variablen $z_1, \ldots, z_n$. Im konkreten Fall unserer Eulerschen Gleichung $\langle E_\eta, \eta\rangle = 0$ kann die entsprechende Gleichung (8) durch sukzessive Approximation gelöst werden.

Für $\eta = (z_1\varphi_1 + \cdots + z_n\varphi_n) + \psi$ führen wir folgende Variablentransformation ein ($\dim N(L) = 2kk'$, mit $k = 2$ bzw. 3 und $k' \in \mathbf{Z}$):

$$z_j = a_j\, e^{id_j}, \qquad z_{j+k} = a_j\, e^{-id_j}, \qquad b_{mn} = d_{3n+1} + m(d_{3n+3} - d_{3n+2}). \tag{10}$$

Für $k = 3$ haben die Elemente aus $N(L)$ dann die Gestalt $\sum\limits_{j=1}^{3k'} a_j \cos\big(m(\omega_j + d_j)\big)$, wobei die ω_j durch die Lösungspaare (m_1, m_2) von (6) bestimmt werden. Im Falle $k' > 1$ sollen nun die ω_j so durchnumeriert werden, daß $\omega_{3n+1}, \omega_{3n+2}, \omega_{3n+3}$ $(n = 0, \ldots, k' - 1)$ zu zueinander assoziierten Lösungen gehören. Damit erhält man E^{red} (vgl. (4)) in der Form

$$\begin{aligned} E^{\text{red}} = {}& -2\varepsilon\, |\omega|^2 \sum_{j=1}^{kk'} a_j^2 - 3(\mu - 1)\, |\omega|^3 \sum_{n=0}^{k'-1} a_{3n+1} a_{3n+2}^m a_{3n+3}^m \cos b_{mn} \cdot \delta_{\frac{\pi}{3}\theta} \\ & + |\omega|^4 \sum_{j=1}^{kk'} \Big(5a_j^4/4 + \sum_{j<i} f(\theta_{ij})\, a_i^2 a_j^2/2\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

mit $\delta_{\frac{\pi}{3}\theta}$ als Kroneckersymbol, θ_{ij} als Winkel zwischen ω_i und ω_j und

$$f(\theta) = 2\big(-9 - 2\cos^2\theta + \sqrt{2}\, 4((1 + \cos\theta)^{3/2} + (1 - \cos\theta)^{3/2})\big).$$

Hier gibt (11) den *reduzierten Energieteil* über allgemeinem rhombischen Gitter an.

Da in den Variablen a_j, d_j die Verzweigungsgleichungen $E_{a_j} \pm iE_{d_j}/a_j$ + Terme höherer Ordnung $= 0$ $(j = 1, \ldots, kk')$ lauten, erhalten wir aus (11) die Koeffizienten bis zur 3. Ordnung in den a_j. Mit $\bar\mu = 3p(\mu - 1)$ gibt das für $l = l_c$ speziell (δ_{3k} Kroneckersymbol!)

$$\left.\begin{aligned} & -4p^2\varepsilon a_1 - \delta_{\frac{\pi}{3}\theta}\bar\mu \cos b_{10} a_2 a_3 + 5a_1^3 + f a_1 a_2^2 + \delta_{3k} f' a_1 a_3^2 + T_1 = 0, \\ & -4p^2\varepsilon a_2 - \delta_{\frac{\pi}{3}\theta}\bar\mu \cos b_{10} a_3 a_1 + 5a_2^3 + f a_2 a_3^2 \delta_{3k} + f a_2 a_1^2 + T_2 = 0, \\ & \delta_{3k}\Big(-4p^2\varepsilon a_3 - \delta_{\frac{\pi}{3}\theta}\bar\mu \cos b_{10} a_1 a_2 + 5a_3^3 + f' a_3 a_1^2 + f a_3 a_2^2 + T_3\Big) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

mit $f := f(\theta)$, $f' := f(2\theta)$ und Termen T_1, T_2, T_3 höherer Ordnung. Verzichtet man darauf, die Anzahl der Lösungen auf Vollständigkeit zu untersuchen, so genügt es, mittels Rescaling und dem Theorem über implizite Funktionen das System (13) ohne

Berücksichtigung der höheren nichtlinearen Terme zu lösen. Man erhält so erste Näherungen für die Lösungen der Verzweigungsgleichungen. Aussagen über die Vollständigkeit der Lösungen erhalten wir durch die Ausnutzung der Kovarianz des Problems bezüglich der komplexen Konjugation ($\mathrm{G}(u, \lambda)$ ist reell), bezüglich der Gruppe der Translationen in der (x, y)-Ebene und bezüglich der Gruppe der Drehspiegelungen, die das Gitter invariant lassen (diese Gruppe heißt *Holoedrie* des Gitters).

Satz 2 (SATTINGER [7]): *Ist* $\mathrm{G}(u, \lambda)$ *kovariant bezüglich einer Darstellung* $T: g \to T_g$ *einer Gruppe* G (d. h. $T_g\mathrm{G}(u, \lambda) = \mathrm{G}(T_g u, \lambda)$ für $g \in G$), *so gilt:*

i) T *kommutiert mit* L,

ii) T *läßt den Nullraum* $N(L)$ *invariant,*

iii) $T_g\mathrm{F}(\varphi, \lambda) = \mathrm{F}(T_g\varphi, \lambda)$ *für* $g \in G$.

Die Kovarianz bezüglich komplexer Konjugation führt demnach zu

$$\overline{F_i(z_1, \ldots, z_n)} = F_i(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Satz 3: *Die Wirkung der Darstellungen auf* $N(L)$ *ist wie folgt* $(j = 1, \ldots, n)$:

a) $T_a\varphi_j = e^{i\omega_j a}\varphi_j$ *für die Darstellung der Translation* T_a,

b) $T_r\varphi_j = \varphi_{r(j)}$ *für die Darstellung der Holoedrie* T_r, *wobei die Darstellung die* φ_j *in derselben Weise wie die Dreh-Spiegelung* r *die Ecken des von den* ω_j *erzeugten Polygons vertauscht.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Gestalt der φ_j und der Darstellung $(T_g u)(x) = u(g^{-1}x)$ ∎

4. Struktur und Lösungen der Verzweigungsgleichungen für dim $N(L) = 4$

Die Holoedrie wird durch Drehung um π und durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden zu ω_1, ω_2 erzeugt. Das entspricht den Permutationen (13) (24) und (12) (34). Es gilt

$$T_r\mathrm{F}(\varphi, \lambda) = \sum_{j=1}^{4} T_r\big(F_j(\varphi, \lambda)\big)\, T_r(\varphi_j), \qquad \mathrm{F}(T_r\varphi, \lambda) = \sum_{j=1}^{4} F_j(T_r\varphi, \lambda)\, T_r(\varphi_j).$$

Nach Satz 2 erhält man hieraus $T_{r_1}F_j(z_1, \ldots, z_4) = F_j(z_3, z_4, z_1, z_2)$ für die Drehung und $T_{r_2}F_j(z_1, \ldots, z_4) = F_j(z_2, z_1, z_4, z_3)$ für die Spiegelung. Da φ reell sein soll, muß $z_j = \overline{z_{j+2}}$ sein. Deshalb ist mit (14) $T_{r_1}F_j(z_1, \ldots, z_4) = \overline{F_j(z_1, \ldots, z_4)}$, so daß die Anzahl der zu behandelnden Gleichungen halbiert wird. Aus $T_{r_2}F_1 = F_2$ erhält man $F_2(z_1, \ldots, z_4) = F_1(z_2, z_1, z_4, z_3)$, d. h., F_2 geht durch eine Variablenpermutation aus F_1 hervor. Es genügt deshalb, die Struktur von F_1 zu untersuchen.

Satz 4: *Die kovarianten Terme* n*-ter Ordnung der Gleichung* $F_1(z_1, \ldots, z_4) = 0$ *haben die Gestalt* $e^{id_1}a_1^{2k+1}a_2^{2l}$ *mit* $k, l \in \mathbf{N}$.

Beweis: Die Terme n-ter Ordnung sind $f := \sum_{|i|=n} z_1^{i_1} \cdots z_4^{i_4} f^1_{i_1 \cdots i_4}$. Nach Satz 3 ist für die Darstellung der Translation T_a $T_aF_1(z_1, \ldots, z_4) = e^{i\omega_1 a}F_1(z_1, \ldots, z_4)$, nach Satz 2 ist $F_1T_a(z_1, \ldots, z_4) = F_1(e^{i\omega_1 a}z_1, \ldots, e^{i\omega_4 a}z_4)$, woraus für $a \in \mathbf{R}^2$ folgt

$$e^{i\omega_1 a}f = \sum_{|i|=n} z_1^{i_1} \cdots z_4^{i_4}\, e^{i(i_1\omega_1 + \cdots + i_4\omega_4)a} f^1_{i_1 \cdots i_4}.$$

Koeffizientenvergleich nach den z_i gibt $\omega_1 = \omega_1 i_1 + \cdots + \omega_4 i_4$. Im Viereck-Gitter wird der Nullvektor nur durch $\omega_1 + \omega_3$, $\omega_2 + \omega_4$ erzeugt. Also ist deshalb $i_1 = i_3$, $i_2 = i_4$. Mit den Variablen aus (10) erhält man hieraus die Behauptung ∎

Die Verzweigungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1\, e^{id_1}\left(-4p^2\varepsilon + 5a_1^2 + f(\theta)\, a_2^2 + \sum P_{ijkl}\varepsilon^i(\mu - 1)^j\, a_1^{2k}a_2^{2l}\right) = 0 \\ F_2 &\equiv a_2\, e^{id_2}\left(-4p^2\varepsilon + 5a_2^2 + f(\theta)\, a_1^2 + \sum P_{ijkl}\varepsilon^i(\mu - 1)^j\, a_2^{2k}a_1^{2l}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Satz 5: *Falls $f(\theta) \neq 5$ ist, hat* (15) *bis auf Variablenpermutation genau zwei Lösungen. Für deren erste Näherungen gilt*

$$a_1 = 0, \qquad a_2^2 = 4p^2\varepsilon/5 \qquad (\textit{Rolls}) \tag{16}$$

$$a_1^2 = a_2^2 = 4p^2\varepsilon\big/\big(5 + f(\theta)\big) \qquad (\textit{Viereck-Lösung}). \tag{17}$$

Beweis: $a_1 = 0$ oder $a_1^2 = a_2^2$ reduzieren (15) auf eine Gleichung, die nach dem Satz über implizite Funktionen eindeutig nach a_2^2 auflösbar ist. Ist $a_1^2 \neq a_2^2$, so betrachtet man

$$\begin{aligned} F_1a_2 - F_2a_1 = \big(5 - f(\theta)\big)\,(a_1^2 - a_2^2) + \sum P_{ijkl}\varepsilon^i(\mu - 1)^j \\ \times \big((a_1^ka_2^l)^2 - (a_1^la_2^k)^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Das ist für alle k, l durch $a_1^2 - a_2^2$ teilbar. Nach der Division bleibt eine Potenzreihe mit Absolutglied $5 - f(\theta)$. Für $f(\theta) \neq 5$ existieren deshalb keine weiteren kleinen Lösungen. Für $f(\theta) = 5$ hängen die Lösungen von Koeffizienten P_{ijkl} höherer Ordnung ab ∎

5. Struktur und Lösungen der Verzweigungsgleichungen für dim $N(L) = 6$

Nach Abschnitt 2 ist im Falle dim $N(L) = 6$ zwingend $q = (2m^2 - 1)/(2m^2)$, $m \in \mathbf{Z}$. Das Vorgehen ist analog zum vierdimensionalen Fall. Die Holoedrie wird erzeugt durch die Spiegelung an der Achse $\omega_1\omega_4$ mit der Darstellung

$$T_{r_2}(z_1, \ldots, z_6) = (z_1, z_6, z_5, z_4, z_3, z_2) \tag{18}$$

und durch die Drehung

$$\text{für } m = 1 \text{ um } \pi/3\colon T_{r_1}(z_1, \ldots, z_6) = (z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_1), \tag{19}$$

$$\text{für } m > 1 \text{ um } \pi\colon T_{r_1}(z_1, \ldots, z_6) = (z_4, z_5, z_6, z_1, z_2, z_3). \tag{20}$$

Für $m = 1$ erhält man aus (19), daß sich F_2 und F_3 durch Variablenpermutation aus F_1 ergeben, und (14) liefert $F_k = \overline{F_{k+3}}$ $(k = 1, 2, 3)$, weshalb es genügt, die Struktur für F_1 zu untersuchen. Für $m > 1$ erhält man aus (18) $F_3(z_1, \ldots, z_6) = F_2(z_4, z_3, z_2, z_1, z_6, z_5)$, und (20), (14) liefert ebenfalls $F_k = \overline{F_{k+3}}$ $(k = 1, 2, 3)$, doch lassen sich keine Beziehungen zwischen F_1 und F_2 herstellen.

Satz 6: *Die kovarianten Terme n-ter Ordnung der Gleichung $F_1(z_1, \ldots, z_6) = 0$ haben die Gestalt*

$$Sa_1^{2i_1}(a_2^{2i_2}a_3^{2i_3} + a_2^{2i_3}a_3^{2i_2})\,(a_1a_2^ma_3^m)^{i_4+i_5}\, e^{i(d_1 - md_2 + md_3)(i_4 - i_5)}$$

mit S gleich $a_1\, e^{id_1}$ oder $a_2^ma_3^m\, e^{im(d_2 - d_3)}$. Für $m > 1$ lauten die kovarianten Terme in $F_2(z_1, \ldots, z_6) = 0$

$$a_1^{2i_1}a_2^{2i_2+1}a_3^{2i_3}(a_1a_2^ma_3^m)^{i_4+i_5}\, e^{i(d_2 + (d_1 - md_2 + md_3)(i_4 - i_5))}.$$

Beweis: Wir wenden wie in Abschnitt 4 auf die Terme n-ter Ordnung die Darstellung der Translation T_a an und erhalten $\omega_1 = \omega_1 i_1 + \cdots + \omega_6 i_6$. In Λ_1' kann ω_1

auch durch $m(\omega_2 + \omega_6)$ erzeugt werden, der Nullvektor durch $\omega_1 + m(\omega_3 + \omega_5)$, $\omega_4 + m(\omega_2 + \omega_6)$ und durch $\omega_1 + \omega_4$, $\omega_2 + \omega_5$, $\omega_3 + \omega_6$. Die Symmetrie zwischen (z_2, z_6) und (z_3, z_5) wird durch $T_{r_2}F_1 = F_1T_{r_2}$ gegeben. Mit (10) erhält man für F_1 die Behauptung. Im Falle $m > 1$ ergibt sich die Behauptung für F_2 durch analoges Vorgehen ∎

Damit können wir in allen Fällen die Struktur der Verzweigungsgleichungen angeben, und wir erhalten für die Terme höherer Ordnung T_1, T_2, T_3 aus (13) erst einmal

$$T_1 = a_1 \sum P_{kli_1\cdots i_5} A_{kli_1\cdots i_5} + a_2{}^m a_3{}^m \cos b_{m0} \sum Q_{kli_1\cdots i_5} A_{kli_1\cdots i_5}$$

mit

$$A_{kli_1\cdots i_5} = [\varepsilon^k(\mu - 1)^l\, a_1{}^{2i_1}(a_2{}^{2i_2}a_3{}^{2i_3} + a_2{}^{2i_3}a_3{}^{2i_2})\,(a_1a_2{}^m a_3{}^m)^{i_4+i_5} \cos b_{m0}(i_4 - i_5)],$$

wobei die Summation in der ersten Summe für $M := 2(i_1 + i_2 + i_3) + 3(i_4 + i_5) + k + l \geqq 3$ und $i_1 + \cdots + i_5 > 0$ erfolgen soll und in der zweiten Summe für $M \geqq 2$. Für $m = 1$ erhält man T_2 und T_3 durch zyklisches Vertauschen der a_1, a_2, a_3. Für $m > 1$ ist

$$T_2 = a_2 \sum R_{kli_1\cdots i_5}\varepsilon^k(\mu - 1)^l\, a_1{}^{2i_1}a_2{}^{2i_2}a_3{}^{2i_3}(a_1a_2{}^m a_3{}^m)^{i_4+i_5} \cos b_{m0}(i_4 - i_5),$$

wobei wieder über $M \geqq 3$ und $i_1 + \cdots + i_5 > 0$ zu summieren ist, und T_3 erhält man durch Vertauschen von a_2 mit a_3.

Satz 7: a) *Für $m = 1$ haben die Verzweigungsgleichungen* (13) *bis auf Variablenpermutation nur Lösungen der Form $a_1{}^2 = a_2{}^2$. Für deren erste Näherungen gilt*

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3{}^2 = 4p^2\varepsilon/5 \qquad (\textit{Rolls}), \tag{21}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2{}^2 = a_3{}^2 = 4p^2\varepsilon/(5 + f) \qquad (\textit{Viereck-Lösung}), \tag{22}$$

$$a_1{}^2 = a_2{}^2 = a_3{}^2 = \bar\mu\left(1 \pm \sqrt{1 + (5 + 2f)\,12\varepsilon/\bar\mu^2}\right)\big/\left(2(5 + 2f)\right)$$
$$(\textit{regelmäßige 6-Eck-Lösungen}). \tag{23}$$

Für den Fall $a_1{}^2 = a_2{}^2 \neq a_3{}^2$ mit $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ erhalten wir die Lösung unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\sqrt{\varepsilon}$, $\bar\mu$ und a_i $(i = 1, 2, 3)$ von gleicher Ordnung klein sind, und für deren erste Näherung gilt

$$a_1{}^2 = a_2{}^2 = \left(3\varepsilon - 5\bar\mu^2/(f - 5)^2\right)/(f + 5), \qquad a_3{}^2 = \bar\mu^2/(f - 5). \tag{24}$$

b) *Für $m > 1$ gilt für die ersten Näherungen der Lösungen von* (13) *unter der Voraussetzung, daß $\sqrt{\varepsilon}$, $\bar\mu$ und a_i $(i = 1, 2, 3)$ von gleicher Ordnung klein sind,*

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = 0, && a_3{}^2 = 4p^2\varepsilon/5 && (\textit{Rolls}),\\ &a_1 = 0, && a_2{}^2 = a_3{}^2 = 4p^2\varepsilon/(5 + f) && (\textit{Viereck-Lösung}),\\ &a_2 = 0, && a_1{}^2 = a_3{}^2 = 4p^2\varepsilon/(f' + 5), && \end{aligned} \tag{25}$$

$$a_1{}^2 = a_3{}^2 = \frac{4p^2\varepsilon(5 - f)}{25 + 5f' - 2f^2}, \qquad a_2{}^2 = \frac{4p^2\varepsilon(5 - 2f + f')}{25 + 5f' - 2f^2}. \tag{26}$$

Beweis: (21) und (23) erhält man mittels des Satzes über implizite Funktionen (in diesen Fällen wird das System (13) auf eine Gleichung reduziert). Für $a_1 = 0$ ist $a_3F_2 - a_2F_3$ durch $a_3{}^2 - a_2{}^2$ teilbar. Nach der Division bleibt eine Potenzreihe mit Absolutglied $f - 5 \neq 0$, weshalb nur die Lösung $a_2{}^2 = a_3{}^2$ auftreten kann. $F_1 = 0$ liefert $\bar\mu = \bar\mu(\varepsilon)$, woraus (22) folgt.

Seien nun alle $a_i \neq 0$ und gelte $a_i^2 \neq a_j^2$ für $i \neq j$. Dann ist $a_1(a_2^2 - a_3^2) F_1 + a_2(a_3^2 - a_1^2) F_2 + a_3(a_1^2 - a_2^2) F_3$ durch $(a_3^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_2^2)$ teilbar. Es bleibt wieder eine Potenzreihe mit Absolutglied $f - 5$, so daß nur Lösungen der Form $a_1^2 = a_2^2$ (bis auf Variablenpermutation) existieren.

Es bleibt $a_1^2 = a_2^2 \neq a_3^2$ zu behandeln. Hier und in allen Fällen für $m > 1$ machen wir die Voraussetzung $\varepsilon = \varepsilon'\lambda^2$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}'\lambda$; $a_i = a_i'\lambda$ $(i = 1, 2, 3)$ und setzen $(a_1', a_2', a_3') = x$. Dann haben die Verzweigungsgleichungen (13), die im folgenden als linear unabhängig angesehen werden können, die Gestalt

$$F_i \equiv \lambda^3 f_i(x) + \lambda^4 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j g_{ij}(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

(z. B. ist $k = 2$ für $a_1^2 = a_3^2$, weil F_1 und F_3 nach (13) dann identisch sind). Ist $\big(f_1(x), \ldots, f_k(x)\big) = 0$ für $x = x_0$, so haben wir $G(x, \lambda) := \big(F_1(x, \lambda)/\lambda^3, \ldots, F_k(x, \lambda)/\lambda^3\big) = 0$ zu lösen, wobei $G(x_0, 0) = 0$ gilt. Ist die Determinante der Jakobi-Matrix $\big(\partial G(x, \lambda)/\partial x\big)$ an der Stelle $(x_0, 0)$ ungleich 0, so besitzt die Gleichung $G(x, \lambda) = 0$ in einer kleinen Umgebung von $\lambda = 0$ eine eindeutige analytische Lösung $x(\lambda)$ (Satz über analytische implizite Funktionen). Konkret lösen wir (13) mit $T_1 = T_2 = T_3 \equiv 0$ (das entspricht $\lambda = 0$) und erhalten nach einer einfachen Rechnung (24)—(26). Da wir die Struktur der Verzweigungsgleichungen kennen, können wir abhängige Gleichungen aussondern. Für das verbleibende System bestimmen wir die Determinante der Jacobi-Matrix an der Stelle $(x_0, 0)$, d. h. für die Lösungen (24)—(26) und $T_1 = T_2 = T_3 \equiv 0$. In allen Fällen ist die Determinante ungleich 0 (Quasthoff [6]) ∎

6. Holoedrie-invariante Lösungen über regelmäßigem 6-Eck-Gitter

Wir suchen nun Lösungen der Verzweigungsgleichungen über regelmäßigem hexagonalen Gitter für dim $N(L) = 12$. Dieser Fall tritt ein, wenn $(l/\alpha)^2 = 2P/3$ mit einer Primzahl $P \equiv 1 \pmod 3$ gilt (vgl. Satz 1). Für das Bénard-Problem wurden von Kirchgässner [5] Lösungen im Fall $P = 7$ bestimmt.

Satz 8: *Über regelmäßigem hexagonalen Gitter der Gitterlänge $l = l_c P$ mit einer Primzahl $P \equiv 1 \pmod 3$ haben die holoedrie-invarianten Lösungen der Verzweigungsgleichungen in erster Näherung die Gestalt*

$$a_1 = \cdots = a_6 = \frac{\bar{\mu} \pm \sqrt{\bar{\mu}^2 + 12\varepsilon S}}{2S},$$

$$S = 5 + 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f(\theta_{14}) + f(\theta_{15}) + f(\theta_{16}).$$

Beweis: Wir haben ein System von zwölf Verzweigungsgleichungen zu lösen. Die Kovarianz bezüglich komplexer Konjugation (14) halbiert wieder die Anzahl der Gleichungen. Die Wirkung der Darstellung der Holoedrie auf den Nullraum erhält man wie folgt. Trägt man die zu den Basiselementen des Nullraumes gehörenden ω_j am Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems an, so bilden die Endpunkte der Vektoren ein 12-Eck, das noch genauer beschrieben werden kann. Nach Abschnitt 2/(iii)$_2$ und der nach (10) vereinbarten Numerierung der ω_j bilden $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$ und $\pm\omega_4$, $\pm\omega_5$, $\pm\omega_6$ je ein regelmäßiges 6-Eck. Bestimmt nun ein Lösungspaar (m_1, m_2) der Gleichung (6) (jetzt in der Form $m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 = P$) einen Vektor ω_j, so ist auch $(m_2 - m_1, m_2)$ Lösung von (6) und bestimmt einen Vektor, der das Bild von ω_j bei der Spiegelung an der x-Achse ist. Demnach geht das zweite 6-Eck durch Spiegelung an der x-Achse aus dem ersten hervor. Die Holoedrie des 12-Ecks wird also durch Spiegelung an der x-Achse und durch Drehung um $\pi/3$ gegeben, so daß man nach analogem Vorgehen wie in Abschnitt 4 die Gleichungen $F_i(z_1, \ldots, z_{12}) = 0$ $(i = 2, \ldots, 6)$ durch Variablenpermutation aus der Gleichung $F_1(z_1, \ldots, z_{12}) = 0$ erhält. Die holoedrie-invariante Lösung $a_1 = \cdots = a_6$ reduziert deshalb das System auf eine Gleichung. Deren Terme bis zur 3. Ordnung erhält man aus dem Gradienten des reduzierten Energieteils (11) mit $k = 3$ und $k' = 2$. Die Verzweigungsgleichung ist nach dem Satz über implizite Funktionen auflösbar; als erste Näherung erhält man die angegebene Gestalt ∎

7. Stabilität

Instabile Lösungen über einem Nullraum fester Dimension kann man durch die Forderung aussondern, daß die zweite Variation $E_{\eta\eta}$ der Energie $E = E(\eta)$ positiv definit sein soll. Äquivalent dazu ist, daß die Hessesche Matrix zu (11) positive Eigenwerte haben muß. Man erhält hieraus, daß für $\dim N(L) = 4$ und $l = l_c$ Rolls nur über Gittern mit $f(\theta) > 5$ (etwa $\theta < 73{,}32°$) stabil sein können, die Viereck-Lösungen nur über Gittern mit $f(\theta) < 5$. Für $\dim N(L) = 6$, $m = 1$ können nur die Lösungen $a_1 = a_2 = a_3$ stabil sein. Um Aussagen über das Stabilitätsverhalten für Lösungen über Nullräumen verschiedener Dimensionen zu treffen, wird die Energie, geteilt durch die Fläche des Parallelogrammes P_l, direkt berechnet. Wir setzen ab jetzt

$$5 + 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = R = 16.569\ldots, \qquad \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}^2} = x, \quad 1 + \sqrt{1 + 12Rx} = z.$$

Dann ist für die über regelmäßigem 6-Eck-Gitter stabilen Lösungen $a_1 = a_2 = a_3$ nach (11) $E_6 = \bar{\mu}^4 z^2(z - 3z^2/4)/(9R^3)$ der genannte Energiewert in erster Näherung. Für die Lösungen über vierdimensionalem Nullraum (Satz 5) ist $E_R = \varepsilon^2(1 - 4p^2)/(20p^4)$ der entsprechende Energiewert im Falle von Rolls und $E_V = \varepsilon^2(1 - 4p^2)/\big(2p^4(5 + f(\theta))\big)$ derjenige im Falle von Viereck-Lösungen. Für die triviale Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist der Energieausdruck identisch Null. Deshalb genügt es, E_R und E_V in dem Bereich zu betrachten, wo sie negativ sind. Das gilt für $\theta > \pi/6$. Es ist

$$\operatorname*{Min}_{\theta} E_R(\theta) = E_R\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{5},$$

$$E_6 - E_{R_{\mathrm{Min}}} = \frac{\bar{\mu}^4 z^2\big(z^2(R - 60) + 4z(20 - R) + 4R\big)}{720R^3}.$$

Daraus erhält man $E_6 < E_R$ für $-0.0284 < \varepsilon/(\mu - 1)^2$. Viereck-Lösungen sind generell instabil, weil $E_V > E_{R_{\mathrm{Min}}}$ für alle θ gilt. Für $l = l_c$ und $m > 1$ erhalten wir die folgenden Energiewerte für

$$(21)\colon\; E_R{}' = -4\varepsilon^2/5,$$

$$(22)\colon\; E'_{V1} = -8\varepsilon^2(f + 5),$$

$$(25)\colon\; E'_{V2} = -8\varepsilon^2(f' + 5),$$

$$(26)\colon\; E_6{}' = -\frac{4}{5}\,\varepsilon^2\left(1 - \frac{2(f - 5)^2}{20(f - 5) - 5(f' - 5) + 2(f - 5)^2}\right).$$

In Abhängigkeit von θ wird wieder das Minimum der einzelnen Energieausdrücke bestimmt. $f(\theta)$ ist streng monoton fallend. Betrachtet man f als Funktion von $y = \cos\theta$, so ist $f(y)$ streng monoton wachsend, und $f(2\theta)$ entspricht $f(2y^2 - 1)$. Für

$m > 1$ ist der Definitionsbereich von $f = f(y)$ gleich $[7/8, 1)$. Es ist $dE_6'/dy = \varepsilon^2(10 + 10y f_y'/f_y - 5(f' - 5)/(f - 5)) > 0$, so daß $E'_{6\min} = E_6'(7/8) = (0.582\ldots)\,\varepsilon^2$ ist. Setzt man auch für E_R', E'_{V1} und E'_{V2} obige Werte ein, so erhält man $E_6' > E'_{V2} > E'_{V1} > E_R'$. Rolls haben über diesen Gittern die kleinste Energie. Jedoch ist $E_6 - E_R' = \bar\mu^4 z^2 \times (z^2(R/5 - 3) + 4z(1 - R/5)/(36R^3))$, so daß für $-0.0251 < \varepsilon/(\mu - 1)^2 < 27.98$ die regelmäßigen 6-Eck-Lösungen eine kleinere Energie als die Lösungen über Gittern mit $m > 1$ besitzen.

Für die Lösungen über zwölfdimensionalem Nullraum ist die Energie in erster Näherung

$$E_{12} = \bar\mu^4\left(1 + \sqrt{1 + 12Sx}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 + 12Sx} + 18Sx\right)/(9S^3)$$

mit S aus Satz 8. Um E_6 mit E_{12} zu vergleichen, brauchen wir Aussagen über S.

Satz 9: *Es ist*

$$f(\theta_{14}) + f(\theta_{15}) + f(\theta_{16}) = -60 + 32W \quad \textit{mit} \quad 2.5442 < W < 2.549.$$

Beweis: Aus (12) folgt $f(\theta) = f(\theta + \pi) = f(\theta - \pi)$. Es ist deshalb

$$f(\theta_{14}) + f(\theta_{15}) + f(\theta_{16}) = -60 + \sqrt{2}\,8 \sum_{i=1}^{3} \left((1 + \cos\alpha_i)^{3/2} + (1 - \cos\alpha_i)^{3/2}\right)$$

mit $\alpha_1 = \theta_{14}$, $\alpha_2 = \theta_{14} + \pi/3$ und $\alpha_3 = \theta_{14} - \pi/3$. Die Extremwerte dieser Summe wurden berechnet, woraus die Behauptung des Satzes folgte ∎

Andererseits ist

$$\frac{E_6}{E_{12}} = \frac{S^3}{2R^3} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 12Rx}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 + 12Sx}\right)^2} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 12Rx} + 18Rx}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 12Sx} + 18Sx}\right)} =: F(x)$$

wegen $R < S$ streng monoton fallend. Es ist zum Beispiel $F(100) > 1$; für genügend kleine x ist demnach $E_6 < E_{12}$. Damit haben wir

Satz 10: *Über rhombischen Gittern mit dem Gitterwinkel* θ, $f(\theta) \neq 5$, *und der Gitterlänge* $l = l_c$ *sind innerhalb des Bereiches* $-0.0251 < \varepsilon/(\mu - 1)^2 < 27.98$ *die regelmäßigen 6-Eck-Strukturen die einzigen stabilen Strukturen. Sie besitzen auch eine kleinere Energie als die holoedrie-invarianten Lösungen der Verzweigungsgleichungen im Falle* dim $N(L) = 12$ *bei beliebiger Gitterlänge* l.

LITERATUR

[1] Beyer, K.: Zur Stabilität einer ferromagnetischen Flüssigkeit in einem vertikalen Magnetfeld. ZAMM 60 (1980), 235–240.

[2] Beyer, K.: Oberflächeninstabilitäten magnetischer Flüssigkeiten. Z. Anal. Anw. 2 (1983), 385–399.

[3] Chow, S. N., and J. K. Hale: Methods of Bifurcation Theory. New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo: Springer-Verlag 1982.

[4] Dirichlet, P. G. L.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig: Vieweg 1863.

[5] Kirchgässner, K.: Exotische Lösungen des Bénardschen Problems. Math. Meth. in Appl. Sci. 1 (1979), 453–467.
[6] Quasthoff, K.: Stabile symmetrische Oberflächenformen bei magnetischen Flüssigkeiten. Dissertation. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1984.
[7] Sattinger, D. H.: Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. Lect. Notes Math. 762 (1979), 1–241.

Manuskripteingang: 05. 08. 1985; in revidierter Fassung 13. 02. 1987

VERFASSER:

Dr. Karin Quasthoff
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig