Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (6) 1987, S. 539–558

Stabilitätskriterien für Näherungsverfahren bei singulären Integralgleichungen in L^p

S. Prössdorf und A. Rathsfeld

Es werden Näherungsverfahren für eindimensionale singuläre Integralgleichungen mit stückweise stetigen Koeffizienten auf einfachen geschlossenen Ljapunow-Kurven betrachtet. Für Galerkin-Verfahren mit Spline-Funktionen und für Kollokationsverfahren mit Spline- und trigonometrischen Ansatzfunktionen werden notwendige und hinreichende Kriterien für ihre Stabilität in L^p hergeleitet. Das Kernstück bildet ein allgemeines Stabilitätskriterium für Folgen von Näherungsoperatoren mit Zirkulantenstruktur.

Рассматриваются приближенные методы решения одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами на простых замкнутых кривых Ляпунова. Для метода Галеркина со сплайн-функциями и метода коллокаций со сплайн- или тригонометрическими функциями выводятся необходимые и достаточные условия их устойчивости в L^p. Центральная часть — общий критерий устойчивости последовательности аппроксимирующих операторов, имеющих циркулянтную структуру.

Approximation methods for one-dimensional singular integral equations with piecewise continuous coefficients on simple closed Liapunov curves are considered. For spline Galerkin methods and for spline and trigonometric collocation, necessary and sufficient conditions for their stability in L^p are given. The central idea is a general stability criterion for sequences of approximate operators with circulant structure.

0. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Näherungsverfahren zur Lösung der Gleichung

$$(Ax)(t) := a(t)\,x(t) + b(t)\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = y(t)$$

$$\big(y \in L^p(\Gamma),\ 1 < p < \infty\big) \tag{0.1}$$

untersucht, wobei $\Gamma = \{\gamma(s) : s \in [0, 1]\}$ eine einfache geschlossene Ljapunov-Kurve und a, b auf Γ vorgegebene stückweise stetige Funktionen bezeichnen (vgl. Abschnitt 1.2). Für die gesuchte Funktion $x \in L^p(\Gamma)$ soll eine Näherung x_n aus dem Raum der trigonometrischen Polynome $T_n = \left\{\sum\limits_{j=-r}^{r} \xi_j t^j : \xi_j \in \mathbf{C}\right\}$ $(n = 2r + 1)$ bzw. aus dem Spline-Raum $S_n{}^d$ bestimmt werden (eine auf Γ erklärte Funktion φ gehört dem Spline-Raum $S_n{}^d$ der Ordnung $d \geqq 0$ an, wenn $\varphi \circ \gamma$ eine $(d-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion ist und ihre Einschränkung auf das Intervall $\big[k/n, (k+1)/n\big)$ für ungerades d bzw. auf $[(k - 1/2)/n, (k + 1/2)/n)$ für gerades d ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich d ist). Beim sogenannten *ε-Kollokationsverfahren* $(-1/2 < \varepsilon \leqq 1/2)$ bestimmt man x_n aus dem Gleichungssystem $(Ax_n)\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big) = y\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, beim *Galerkin-Verfahren mit Spline-Funktionen* aus dem Gleichungssystem

$(Ax_n, \varphi_k^{(n)}) = (y, \varphi_k^{(n)})$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, wobei $(\cdot, \cdot)$ das L^2-Skalarprodukt und $\{\varphi_k^{(n)}\}$ eine Basis des Raumes S_n^d bezeichnet.

Bekanntlich gehören die genannten Verfahren zur Klasse der *Projektionsverfahren*, bei denen eine Näherungslösung $x_n \in \operatorname{im} K_n$ der Operatorgleichung $Ax = y$ aus der Gleichung $K_nAx_n = K_ny$ bestimmt wird, wobei K_n gegebene Projektoren bezeichnen. Ein Projektionsverfahren heißt *stabil*, wenn ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbf{N}$ derart existieren, daß für alle $n \geqq n_0$ und alle $\varphi^{(n)} \in \operatorname{im} K_n$ die Ungleichung $\|K_nA\varphi^{(n)}\| \geqq \delta \|\varphi^{(n)}\|$ gilt. Aus der Stabilität des Projektionsverfahrens läßt sich, unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen, leicht die Konvergenz der Näherungslösung x_n gegen die Lösung x der Gleichung (0.1) ableiten (vgl. Abschnitt 1.1). Deshalb ist es wichtig zu wissen, für welche Operatoren A ein betrachtetes Projektionsverfahren stabil ist. Für die Kollokation mit trigonometrischen Ansatzfunktionen (in diesem Fall kann aus Symmetriegründen $\varepsilon = 0$ vorausgesetzt werden) wird im Abschnitt 6.3 gezeigt, daß das Verfahren für den Operator A der Gestalt (0.1) im Falle des Einheitskreises $\Gamma_0 = \{\gamma_0(s) = \exp(i2\pi s) : s \in \mathbf{R}\}$ genau dann stabil in $L^p(\Gamma_0)$, $1 < p < \infty$, ist, wenn A und $A_{-1} := aI - bS_{\Gamma_0}$ (vgl. Abschnitt 1.2) im Raum $L^p(\Gamma_0)$ invertierbar sind. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen wurde zuerst von Junghanns und Silbermann [11] (mit anderen Methoden) bewiesen. In [10] wurde für den Spezialfall $p = 2$ auch ihre Hinlänglichkeit gezeigt. Für die Stabilität des ε-Kollokationsverfahrens mit Spline-Funktionen in $L^p(\Gamma)$ wird im Abschnitt 6.1 eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben. Im Spezialfall $\varepsilon = 0$ lautet diese, daß für alle $t \in \Gamma$ entweder die Halbgerade $(-\infty, 0]$ den Kreisbogen

$$K = \left\{f(\mu)\,\frac{a(t+0) + b(t+0)}{a(t+0) - b(t+0)} + \left(1 - f(\mu)\right)\frac{a(t-0) + b(t-0)}{a(t-0) - b(t-0)} : \mu \in [0, 1]\right\} \tag{0.2}$$

mit

$$f(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{für } p = 2, \\ \sin\left(\pi\left(1 - \dfrac{2}{p}\right)\mu\right)\exp\left(i\pi\left(1 - \dfrac{2}{p}\right)(\mu - 1)\right)\Big/\sin\left(\pi\left(1 - \dfrac{2}{p}\right)\right) & \text{für } p \neq 2, \end{cases}$$

nicht schneidet oder die Halbgerade $(-\infty, 0)$ obigen Kreisbogen in zwei inneren Punkten schneidet (dabei soll ein Berührungspunkt als doppelter Schnittpunkt zählen). Im Fall $p = 2$ erhält man hieraus (bzw. aus Satz 6.1 und Satz 6.2) die bekannten Stabilitätsbedingungen von Prössdorf und Schmidt [15], Arnold und Wendland [2], Prössdorf und Rathsfeld [13] sowie Schmidt [18]. Im Abschnitt 6.2 wird gezeigt, daß im Falle stetiger Koeffizienten a, b das Galerkin-Verfahren in allen Räumen $L^p(\Gamma_0)$ $(1 < p < \infty)$ gleichzeitig stabil ist, nämlich genau dann, wenn für alle $t \in \Gamma_0$ und $\lambda \in [-1, 1]$ die Bedingung $a(t) + b(t)\,\lambda \neq 0$ erfüllt ist. Falls a und b stückweise stetig sind und die Sprungstellen dieser Funktionen zu den Unstetigkeitsstellen der Splines aus S_n^0 gehören, ist das Galerkin-Verfahren für $d = 0$ genau dann stabil in $L^p(\Gamma_0)$, wenn die 0-Kollokation stabil ist. Im Spezialfall $p = 2$ erhält man die Stabilitätskriterien von Schmidt [20] sowie Prössdorf und Rathsfeld [14].

Beim Beweis der oben genannten Stabilitätskriterien wird gezeigt, daß die Matrizen der Kollokations- bzw. Galerkin-Gleichungssysteme eine einheitliche Struktur besitzen: In Analogie zur Gestalt des Operators $A = aI + bS_{\Gamma_0}$ haben sie im wesentlichen die Gestalt $a_n + b_nZ_n$. Dabei sind $a_n = \left(a\left(\gamma_0((k+\varepsilon)/n)\right)\delta_{k,j}\right)_{k,j}$ und analog b_n Diagonalmatrizen und Z_n ein Zirkulant der Gestalt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varrho\left(\exp(i2\pi s/n)\right)\exp\left(i2\pi s(k-l)/n\right)\right)_{k,l},$$

wobei ϱ eine auf Γ_0 erklärte stückweise stetige Funktion ist, die durch das jeweilige Verfahren festgelegt ist. Die Eigenwerte von Z_n sind also Funktionswerte von ϱ. Mit Lemma 5.1 wird ein Stabilitätskriterium für Matrixfolgen der Gestalt $\{a_n + b_n Z_n\}$ bewiesen, aus dem sich leicht die einzelnen Stabilitätsbedingungen für die Kollokations- und Galerkin-Verfahren ableiten lassen. Letzteres stellt eine Verallgemeinerung von [13: Theorem 0.1] dar.

1. Abstrakte Näherungsverfahren und singuläre Integraloperatoren

1.1 Es sei X ein Banach-Raum, $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller stetigen linearen Operatoren in X und $A \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar. Die Gleichung $Ax = y$ $(y \in X)$ soll näherungsweise gelöst werden. Dazu sei in X eine Folge beschränkter Projektoren L_n gegeben, die stark gegen die identische Abbildung konvergiert. Außerdem soll eine Folge von Näherungsoperatoren $A_n \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n)$ derart gegeben sein, daß $A_n L_n$ stark gegen A konvergiert. Aus der Gleichung $A_n x_n = y_n$ $(y_n \in \operatorname{im} L_n)$ bestimmt man dann eine Näherungslösung $x_n \in \operatorname{im} L_n$. Ein solches Näherungsverfahren heißt *konvergent*, wenn ein $n_0 \in \mathbf{N}$ derart existiert, daß die Gleichung $A_n x_n = y_n$ für alle $n \geqq n_0$ und alle $y_n \in \operatorname{im} L_n$ eindeutig lösbar ist und wenn für alle $y \in X$ und alle Folgen $\{y_n\} \subset \operatorname{im} L_n$ mit $y_n \to y$ die entsprechende Folge der Näherungslösungen x_n gegen $x = A^{-1}y$ konvergiert. Das Näherungsverfahren mit den Operatoren A_n bzw. die Operatorfolge $\{A_n\}$ heißt *stabil*, wenn ein $n_0 \in \mathbf{N}$ derart existiert, daß A_n für $n \geqq n_0$ invertierbar ist und $\sup \|A_n^{-1}\| < \infty$ gilt. Bekanntlich konvergiert das Näherungsverfahren genau dann, wenn es stabil ist (vgl. [8]). Projektionsverfahren können als Spezialfall solcher allgemeinen Näherungsverfahren betrachtet werden. In diesem Fall wählt man noch eine Folge von Projektoren K_n im Raum X mit $\operatorname{im} K_n = \operatorname{im} L_n$ und setzt $A_n = K_n A|_{\operatorname{im} L_n}$ sowie $y_n = K_n y$.

1.2 Im folgenden sollen Näherungsverfahren zur Lösung einer singulären Integralgleichung der Gestalt (0.1) auf einer Kurve Γ untersucht werden. Dabei sei Γ eine einfache geschlossene Ljapunow-Kurve in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$. Die Kurve besitzt also eine 1-periodische Parameterdarstellung $\gamma: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ mit einer stetigen, nirgends verschwindenden Ableitung γ'. Es soll im weiteren vorausgesetzt werden, daß γ' einer Lipschitz-Bedingung genügt und Γ positiv orientiert ist.

Auf Γ werden nun verschiedene Funktionenräume betrachtet. Der Grundraum X unserer singulären Integralgleichung sei $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Wenn

$$\hat{f}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} (f \circ \gamma)(x) \exp(-i2\pi kx)\, dx$$

den k-ten Fourier-Koeffizienten einer auf Γ erklärten Funktion f bezeichnet, dann sei Fl^p der Banach-Raum aller auf Γ_0 definierten Funktionen f, deren Norm $\|f\|_{Fl^p} = \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(k)|^p\right)^{1/p}$ endlich ist. Die Räume aller stetigen und aller stückweise stetigen Funktionen auf Γ sollen mit $C(\Gamma)$ bzw. $PC(\Gamma)$ bezeichnet werden. Dabei heißt f stückweise stetig, wenn f bis auf endlich viele Punkte stetig ist und in allen Punkten $t \in \Gamma$ endliche einseitige Grenzwerte $f(t + 0) =: f(t)$ und $f(t - 0)$ existieren. Die abgeschlossene Hülle von $PC(\Gamma)$ (bezüglich der Supremumnorm) soll mit $\overline{PC}(\Gamma)$ bezeichnet werden. Ferner sei $PC^2(\Gamma)$ die Menge aller $f \in PC(\Gamma)$, die außerhalb der Sprungstellen zweimal stetig differenzierbar sind und deren zweite Ableitung zu $PC(\Gamma)$ gehört.

In den Räumen $L^p(\Gamma)$ bzw. Fl^p $(1 < p < \infty)$ kann man den singulären Integraloperator $A = aI + bS_\Gamma$ betrachten, wobei a und b die Operatoren der Multiplikation mit den Funktionen $a, b \in \overline{PC}(\Gamma)$ bzw. $a, b \in PC^2(\Gamma_0)$ bezeichnen und S_Γ der durch

$$(S_\Gamma x)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \qquad (t \in \Gamma)$$

definierte Cauchysche singuläre Operator ist. Mit den Bezeichnungen $c = a + b$, $d = a - b$, $P_\Gamma = (I + S_\Gamma)/2$ und $Q_\Gamma = I - P_\Gamma$ läßt sich A in der Form $A = cP_\Gamma + dQ_\Gamma$ schreiben. Bekanntlich ist $A \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ genau dann ein Noetherscher Operator (auch Fredholmscher Operator genannt), wenn für alle $t \in \Gamma$ der Kreisbogen K aus (0.2) nicht durch 0 verläuft. Der Operator $A \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ ist invertierbar, wenn zusätzlich der funktionentheoretische Index der auf natürliche Weise orientierten Kurve, die durch Vereinigung der Punktmenge $\{(d^{-1}c)(t) : t \in \Gamma\}$ und der die Sprünge der Funktion $d^{-1}c$ verbindenden Kreisbögen K entsteht, gleich 0 ist (vgl. [9]). Der Operator $A = aI + bS_{\Gamma_0} \in \mathcal{L}(Fl^p)$ ist genau dann invertierbar, wenn der Operator $A \in \mathcal{L}(L^q(\Gamma_0))$ $(1/p + 1/q = 1)$ invertierbar ist (vgl. [9: Kap. XIV]).

2. Zirkulanten

Im Zusammenhang mit den in der Einleitung beschriebenen Näherungsverfahren sowie mit den Projektoren, die im Abschnitt 3 betrachtet werden sollen, treten verschiedene Zirkulanten auf. Eine Matrix $(a_{j,k})_{j,k=0}^{n-1}$ heißt *Zirkulant*, wenn die Elemente jeder zur Hauptdiagonalen parallelen Diagonalen einander gleich sind und wenn ferner die Elemente der k-ten Diagonale über der Hauptdiagonale $(k = 1, \ldots, n-1)$ mit den Elementen der $(n-k)$-ten Diagonale unter der Hauptdiagonale übereinstimmen. Ziel dieses Abschnittes ist es, für spezielle Zirkulantenfolgen eine geeignete Normabschätzung (Lemma 2.1) herzuleiten.

2.1 Im weiteren sei der Einfachheit halber $n = 2r + 1$ vorausgesetzt. (Der Fall $n = 2r$ kann völlig analog behandelt werden.) Es soll mit $l^p(n)$ der komplexe n-dimensionale l^p-Raum, mit $\|\cdot\|_p$ dessen Norm und mit $\xi = (\xi_{-r}, \ldots, \xi_r)^T$ dessen Elemente bezeichnet werden. Für einen Operator $A_n \in \mathcal{L}(l^p(n))$, der offenbar mit einer Matrix aus $\mathbf{C}^{n\times n}$ identifiziert werden kann, soll $\|A_n\|_p$ die übliche Operatornorm bezeichnen. Analog zu [12: Kap. VI] führt man in $l^p(n)$ die diskrete Fourier-Transformation U und ihre Inverse U^{-1} ein:

$$(U\xi)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=-r}^{r} \exp\left(\frac{i2\pi kl}{n}\right) \xi_l \quad \text{und} \quad (U^{-1}\xi)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=-r}^{r} \exp\left(\frac{-i2\pi kl}{n}\right) \xi_l .$$

Für $\xi \in \mathbf{C}^n$ soll M_ξ den Multiplikationsoperator $(\delta_{j,k}\xi_k) \in \mathcal{L}(l^p(n))$ und C_ξ den Faltungsoperator $(\xi_{k \dot{-} l}) \in \mathcal{L}(l^p(n))$ bezeichnen, wobei $k \dot{-} l$ diejenige Zahl aus $\{-r, \ldots, r\}$ ist, die sich von $k - l$ nur um ein ganzzahliges Vielfaches von n unterscheidet. Die Matrix M_ξ ist also eine Diagonalmatrix und C_ξ ein Zirkulant. Für $A_n \in \mathcal{L}(l^p(n))$ sei $\hat{A}_n = UA_nU^{-1}$. Wie man leicht sieht, ist A_n genau dann ein Zirkulant, wenn es ein $\xi \in \mathbf{C}^n$ mit $A_n = UM_\xi U^{-1}$ gibt. Es gilt $C_\eta = \hat{M}_\xi$ genau dann, wenn $\eta = n^{-1/2}U\xi$, d. h. $\xi = n^{+1/2}U^{-1}\eta$ ist. In Analogie zu den Faltungsoperatoren auf der reellen Achse erhält man die Youngsche Ungleichung $\|C_\xi\|_p \leqq \|\xi\|_1$ $(\xi \in l^1(n))$.

2.2 In den folgenden Abschnitten treten Zirkulanten $\hat{\varrho}_n$ auf, deren Eigenwerte Funktionswerte einer Funktion $\varrho \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ sind:

$$\varrho_n := \left(\varrho(\exp(i2\pi k/n))\, \delta_{j,k}\right)_{j,k=-r}^{r}, \quad \hat{\varrho}_n = U\varrho_n U^{-1}$$

Lemma 2.1: *Es sei $1 < p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, daß für alle Funktionen $\varrho \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ mit beschränkter Variation* Var ϱ *die Abschätzung* $\|\hat{\varrho}_n\|_p \leqq C\{\sup |\varrho(t)| + \text{Var}\,\varrho\}$ *erfüllt ist.*

Beweis: a) Zuerst sei ϱ die charakteristische Funktion des Kreisbogens zwischen zwei beliebigen festen Punkten auf Γ_0. Offensichtlich kann vorausgesetzt werden, daß -1 kein innerer Punkt des Trägers supp ϱ ist. Wenn $P_n \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ durch $P_n\left(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)\, t^k\right) = \sum\limits_{k=-r}^{r} \hat{f}(k)\, t^k$ definiert wird, dann gibt es zwei von n abhängige Zahlen $u, v \in \mathbf{Z}$ derart, daß der Operator $P_n t^{-u} Q_{\Gamma_0} t^u t^v P_{\Gamma_0} t^{-v}|_{\text{im}\,P_n} \in \mathcal{L}(\text{im}\,P_n)$ in der Basis $\{t^l\}_{l=-r}^{r}$ die Matrix ϱ_n hat. Der gleiche Operator besitzt bezüglich der Basis

$$\{\psi_k\}_{k=-r}^{r}, \qquad \psi_k(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=-r}^{r} \exp\left(-i2\pi kj/n\right) t^j, \tag{2.1}$$

die Matrix $\hat{\varrho}_n$. Aus $\psi_k(\exp(i2\pi j/n)) = \delta_{k,j}$ $(k, j = -r, \ldots, r)$ und [23: Kap. X/(7.6), (7.7)] folgt die Existenz einer Konstanten $D > 0$, so daß

$$D^{-1} n^{-1/p} \|\xi\|_p \leqq \left\| \sum_{k=-r}^{r} \xi_k \psi_k \right\|_{L^p(\Gamma_0)} \leqq D n^{-1/p} \|\xi\|_p \qquad \left(\xi \in l^p(n)\right) \tag{2.2}$$

gilt. Folglich ist die mit D^2 multiplizierte Operatornorm eines Operators aus $\mathcal{L}(\text{im}\,P_n)$ größer oder gleich der $\mathcal{L}(l^p(n))$-Norm seiner Matrix bezüglich der Basis $\{\psi_k\}$. Weil aber die Operatoren $P_n t^{-u} Q_{\Gamma_0} t^u t^v P_{\Gamma_0} t^{-v}|_{\text{im}\,P_n}$ für alle $u, v \in \mathbf{Z}$ und $n \in \mathbf{N}$ gleichmäßig beschränkt sind, gibt es eine von der charakteristischen Funktion ϱ unabhängige Konstante $C > 0$ mit $\|\hat{\varrho}_n\|_p < C$.

b) Es sei jetzt ϱ eine stückweise konstante Funktion, d. h., für alle t aus dem Kreisbogen zwischen $\exp(i2\pi s_k)$ und $\exp(i2\pi s_{k+1})$ $(0 = s_0 < s_1 \cdots < s_N = 1)$ sei $\varrho(t) = \beta_k \in \mathbf{C}$. Wenn χ^k $(k = 1, \ldots, N)$ die charakteristische Funktion des Bogens zwischen 1 und $\exp(i2\pi s_k)$ bezeichnet, dann gilt

$$\varrho = \sum_{k=1}^{N-1} (\beta_{k-1} - \beta_k)\, \chi^k + \beta_{N-1} \chi^N,$$

$$\|\hat{\varrho}_n\|_p \leqq \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} |\beta_k - \beta_{k-1}| + |\beta_{N-1}| \right\} \sup_{k=1,\ldots,N} \|(\chi^k)_n{}^\wedge\|_p.$$

Aus a) folgt $\|\hat{\varrho}_n\|_p \leqq C\{\sup |\varrho(t)| + \text{Var}\,\varrho\}$.

c) Schließlich sei $\varrho \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ eine beliebige Funktion mit beschränkter Variation. Dann existiert eine Folge $\{\varrho^k\}$ stückweise konstanter Funktionen, die für $k \to \infty$ in der Supremumnorm gegen ϱ konvergiert und für die Var $\varrho^k <$ Var ϱ gilt. Für jedes feste n und $k \to \infty$ konvergieren die Operatoren $(\varrho^k)_n{}^\wedge$ gegen $\hat{\varrho}_n$. Mithin ergibt sich

$$\|\hat{\varrho}_n\|_p \leqq \limsup_{k\to\infty} \|(\varrho^k)_n{}^\wedge\|_p \leqq C\{\sup |\varrho(t)| + \text{Var}\,\varrho\} \quad \blacksquare$$

3. Spline-Räume und Projektoren

In diesem Abschnitt werden Interpolations- und Orthoprojektoren auf die Spline-Räume $S_n{}^d$ untersucht. Für diese Projektoren lassen sich unter Verwendung der im Abschnitt 2.2 betrachteten Zirkulanten gewisse explizite Darstellungsformeln angeben. Mit diesen wird dann die starke Konvergenz der Projektoren gezeigt und im nächsten Abschnitt die Diagonal-Zirkulanten-Struktur der Matrizen beim Kollokations- und Galerkin-Verfahren nachgewiesen.

3.1 Im Raum S_n^d läßt sich eine Basis $\{\varphi_k^{(n)}\}$ wie folgt angeben (vgl. [3: Section 4.2]): Erklärt man die Faltung $f * g$ zweier auf $\mathbf{R}$ definierter Funktionen f und g als Integral

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t-s)\, g(s)\, ds \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ist Π^0 die auf $\mathbf{R}$ erklärte charakteristische Funktion des Intervalls $[-1/2, 1/2]$ und Π^d die $(d+1)$-fache Faltung von Π^0, so sei

$$\varphi_k^{(n)}(\gamma(s)) = \Pi^d(sn - k) \quad (k \in \{-r, \ldots, r\}, \quad s \in [-1/2 + k/n, 1/2 + k/n]).$$

Lemma 3.1 [5]: *Es sei $1 < p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $\xi \in l^p(n)$ gilt*

$$C^{-1} n^{-1/p} \|\xi\|_p \leqq \left\| \sum_{j=-r}^{r} \xi_j \varphi_j^{(n)} \right\|_{L^p(\Gamma)} \leqq C n^{-1/p} \|\xi\|_p .$$

3.2 Für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\Gamma)$ soll das Skalarprodukt durch

$$(f, g) = \int_{-1/2}^{1/2} f(\gamma(s))\, \overline{g(\gamma(s))}\, ds$$

definiert sein. Den Orthoprojektor L_n des Raumes $L^2(\Gamma)$ auf S_n^d kann man auch im Raum $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ definieren: Für $f \in L^p(\Gamma)$ soll $L_n f \in S_n^d$ diejenige Funktion sein, die für alle $\varphi^{(n)} \in S_n^d$ die Gleichung $(L_n f, \varphi^{(n)}) = (f, \varphi^{(n)})$ erfüllt. Um eine explizite Formel für L_n zu erhalten, setzt man $L_n f = \sum_{k=-r}^{r} \xi_k \varphi_k^{(n)}$ und $\eta_k = (f, \varphi_k^{(n)})$. Dann folgt aus der Definition von L_n

$$\left((\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\right)_{j,k=-r}^{r} \xi = \eta, \qquad \xi = (\xi_{-r}, \ldots, \xi_r)^{\mathrm{T}}, \qquad \eta = (\eta_{-r}, \ldots, \eta_r)^{\mathrm{T}}. \tag{3.1}$$

Die Elemente $(\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})$ der Gramschen Matrix lassen sich über die Fourier-Koeffizienten bestimmen. Es gilt

$$(\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} (\varphi_k^{(n)})^\wedge(l)\, \overline{(\varphi_j^{(n)})^\wedge(l)}.$$

Unter Benutzung der für alle $p, k \in \mathbf{Z}$ und $\varphi^{(n)} \in S_n^d$ in [1] bewiesenen Formel

$$(\varphi^{(n)})^\wedge(p + kn) = (-1)^{k(d+1)} (\varphi^{(n)})^\wedge(p)\, p^{d+1}/(p + kn)^{d+1} \tag{3.2}$$

und der für $u \in \{-r, \ldots, r\}$ gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} (\varphi_u^{(n)} \circ \gamma)(s) &= (\varphi_0^{(n)} \circ \gamma)(s - u/n), \\ (\varphi_u^{(n)})^\wedge(k) &= \exp \frac{-i2\pi k u}{n} (\varphi_0^{(n)})^\wedge(k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

erhält man

$$(\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=0}^{n-1} \exp\left(i2\pi s(j-k)/n\right) \alpha\left(\exp(i2\pi s/n)\right) \tag{3.4}$$

mit

$$\alpha\big(\exp(i2\pi s)\big) := |(\Pi^d)^\wedge(s)|^2 s^{2(d+1)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (s+k)^{-2(d+1)},$$
$$(\Pi^d)^\wedge(s) := \int_{\mathbf{R}} \exp(-i2\pi ys)\, \Pi^d(y)\, dy \qquad \big(s\in(0,1)\big).$$

Die Gramsche Matrix $\big((\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\big)$ ist also ein Zirkulant und hat die Gestalt $n^{-1}\hat{\alpha}_n$. Wenn $[\cdot,\cdot]$ das übliche Skalarprodukt des Raumes $l^2(n)$ bezeichnet, dann folgt aus Lemma 3.1

$$[\zeta,\zeta] \leqq C^2 n\left(\sum_{k=-r}^{r}\zeta_k\varphi_k^{(n)},\quad \sum_{j=-r}^{r}\zeta_j\varphi_j^{(n)}\right) = C^2[\hat{\alpha}_n\zeta,\zeta] \qquad \big(\zeta\in l^2(n)\big).$$

Somit genügen die Eigenwerte von $\hat{\alpha}_n$, d. h. die Funktionswerte $\alpha\big(\exp(i2\pi k/n)\big)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, der Abschätzung $C^{-2} \leqq \big|\alpha\big(\exp(i2\pi k/n)\big)\big|$. Die Funktion α besitzt also auf Γ_0 keine Nullstellen, und aus (3.1) erhält man als gesuchte Darstellung für den Projektor L_n

$$\xi = n(\alpha^{-1})_n^\wedge\, \eta. \tag{3.5}$$

Lemma 3.2 (vgl. [4]): *Die Folge $\{L_n\}$ ist in $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ gleichmäßig beschränkt und konvergiert stark gegen den identischen Operator.*

Beweis: Aus der Hölderschen Ungleichung und Lemma 3.1 folgt für eine geeignete Konstante $C > 0$

$$|\eta_k| \leqq \left\|(f\circ\gamma)\Big|\left(\tfrac{k-(d+1)/2}{n},\tfrac{k+(d+1)/2}{n}\right)\right\|_{L^p} \|(\varphi_k^{(n)}\circ\gamma)\|_{L^q} \leqq Cn^{-1/q}\,\|(f\circ\gamma)|_{(\ldots\ldots)}\|_{L^p},$$
$$\|\eta\|_p \leqq Cn^{-1/q}\,\|f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Hieraus ergibt sich zusammen mit (3.5), Lemma 2.1 und Lemma 3.1

$$\|L_nf\|_{L^p(\Gamma)} = \left\|\sum_{k=-r}^{r}\xi_k\varphi_k\right\|_{L^p(\Gamma)} \leqq Cn^{-1/p}\,\|\xi\|_p$$
$$\leqq Cn^{1-1/p}\left\{\operatorname{Var}\alpha^{-1} + \sup_{t\in\Gamma_0}|\alpha^{-1}(t)|\right\}\|\eta\|_p \leqq C\,\|f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Die Folge $\{L_n\}$ ist also in allen Räumen $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ gleichmäßig beschränkt. In $L^2(\Gamma)$ folgt die starke Konvergenz aus [7: Theorem 1]. Unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung ergibt sich aus ihr die L^p-Konvergenz ∎

3.3 Der Interpolationsprojektor K_n mit dem Bildraum S_n^d wird für Riemann-integrierbare Funktionen f durch $(K_nf)\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big) = f\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big)$ $(k = -r, \ldots, r)$ erklärt. Für alle $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$ ist in [19] die Existenz dieses Projektors gezeigt. Um wieder eine explizite Formel herzuleiten, setzt man $K_nf = \sum_{k=-r}^{r}\xi_k\varphi_k^{(n)}$ und $\eta_k = f\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big)$. Dann folgt

$$\Big(\varphi_k^{(n)}\big(\gamma((j+\varepsilon)/n)\big)\Big)_{j,k=-r}^{r}\,\xi = \eta. \tag{3.6}$$

Die Elemente der hier links stehenden Matrix können nun über die Fourier-Reihe berechnet werden. Es ergibt sich

$$\varphi_k^{(n)}\big(\gamma((j+\varepsilon)/n)\big) = \sum_{l\in\mathbf{Z}}(\varphi_k^{(n)})^\wedge(l)\exp\big(i2\pi(j+\varepsilon)\,l/n\big).$$

Unter Ausnutzung von (3.2) und (3.3) erhält man

$$\varphi_k^{(n)}\big(\gamma((j+\varepsilon)/n)\big) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\exp\big(i2\pi s(j-k)/n\big)\,\varrho\big(\exp(i2\pi s/n)\big)$$

mit, für $s \in (0, 1)$,

$$\varrho\big(\exp(i2\pi s)\big) = (\Pi^d)^\wedge(s)\, s^{d+1}\exp(i2\pi\varepsilon s)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{\exp\big(i\pi k(2\varepsilon+d+1)\big)}{(s+k)^{d+1}}.$$

Folglich gilt $\big(\varphi_k^{(n)}\big(\gamma((j+\varepsilon)/n)\big)\big)_{j,k=-r}^r = \hat{\varrho}_n$. Durch Berechnung von $(\Pi^d)^\wedge$ (vgl. [14: Beweis zu Lemma 2.1]) sieht man, daß ϱ auf Γ_0 keine Nullstellen besitzt (vgl. [19]). Aus (3.6) ergibt sich nun

$$\xi = (\varrho^{-1})_n^\wedge\,\eta. \tag{3.7}$$

Lemma 3.3: *Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen f auf Γ gilt $K_n f \to f$ $(n \to \infty)$ in der Norm von $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$.*

Beweis: Analog zu [15: Lemma 2.1] zeigt man $f - D^{-1}\sum_{k=-r}^{r}\eta_k\varphi_k^{(n)} \to 0$, wobei D die von ε, j und n unabhängige Summe $\sum_{k=-r}^{r}\varphi_k^{(n)}\big(\gamma((j+\varepsilon)/n)\big)$ bezeichnet. Es muß also nur noch

$$K_n f - D^{-1}\sum_{k=-r}^{r}\eta_k\varphi_k^{(n)} \to 0, \qquad \text{d. h.} \quad n^{-1/p}\,\|(\varrho^{-1})_n^\wedge\,\eta - D^{-1}\eta\|_p \to 0$$

bewiesen werden. Nach Lemma 2.1 genügt es,

$$n^{-1/p}\,\|\eta - D^{-1}\hat{\varrho}_n\eta\|_p \to 0, \qquad \text{d. h.} \quad \sum_{k=-r}^{r}\big(\eta_k - D^{-1}(\hat{\varrho}_n\eta)_k\big)\,\varphi_k^{(n)} \to 0$$

zu zeigen. Letzteres beweist man analog zu [15: Lemma 2.1]. Dabei ist zu beachten, daß in jeder Zeile von $\hat{\varrho}_n$ nur d von 0 verschiedene Elemente stehen ∎

4. Die Näherungsoperatoren für Spline-Methoden

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Matrizen der Näherungsoperatoren für singuläre Integraloperatoren zu bestimmen, die bei Kollokations- und Galerkin-Verfahren mit Spline-Ansatzfunktionen auftreten. Außerdem soll hier die starke Konvergenz dieser Näherungsoperatoren gegen den singulären Integraloperator in $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ bewiesen werden. Wenn K_n und L_n die in Abschnitt 3 definierten Projektoren bezeichnen, dann läßt sich das Näherungssystem des Kollokations- bzw. des Galerkin-Verfahrens als Operatorgleichung der Form $K_nAx_n = K_ny$ bzw. $L_nAx_n = L_ny$ schreiben. Es müssen also die Näherungsoperatoren $K_nA|_{S_n^d} \in \mathscr{L}(S_n^d)$ und $L_nA|_{S_n^d} \in \mathscr{L}(S_n^d)$ untersucht werden.

4.1 Zuerst sollen die Näherungsoperatoren für den Multiplikationsoperator untersucht werden. Es sei $a \in \overline{PC}(\Gamma)$. Dann folgt aus (3.7), daß $K_na|_{S_n^d}$ in der Basis $\{\varphi_k^{(n)}\}$ die Matrix

$$(\varrho^{-1})_n^\wedge\,a_n\hat{\varrho}_n \quad \text{mit} \quad a_n = \big(\delta_{k,l}\,a\big(\gamma((k+\varepsilon)/n)\big)\big)_{k,l=-r}^r \tag{4.1}$$

besitzt. (Für lateinische Buchstaben, z. B. a, soll die Matrix a_n wie in (4.1) erklärt sein. Für griechische Buchstaben, z. B. ϱ, soll ϱ_n wie in Abschnitt 2.2 definiert werden.)

Lemma 4.1: *Es sei $a \in \overline{PC}(\Gamma)$. Die Operatoren $K_n a|_{S_n^d}$ sind in $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ gleichmäßig beschränkt, und $\{K_n a L_n\}$ konvergiert stark gegen a.*

Beweis: Aus (4.1), $\|a_n\|_p \leqq \sup\{|a(\tau)| : \tau \in \Gamma\}$, Lemma 2.1 und Lemma 3.1 folgt die gleichmäßige Beschränktheit. Es genügt also, die Konvergenz $K_n a L_n f \to af$ für stetige Funktionen f zu beweisen.

Für $k, l \in \mathbf{Z}$ soll $k \dot{-} l \in \{-r, \ldots, r\}$ wieder diejenige Zahl sein, die sich von $k - l$ nur um ein ganzzahliges Vielfaches von n unterscheidet. Es sei $\varrho \in Fl^1$. Dann hängt das Element der k-ten Zeile und l-ten Spalte des Zirkulanten $\hat{\varrho}_n$ nur von $k \dot{-} l$ ab und soll im weiteren mit $\hat{\varrho}_{n,k \dot{-} l}$ bezeichnet werden. Falls ϱ eine Potenzfunktion $\varrho(t) = t^u$ $(u \in \mathbf{Z})$ ist, dann gilt $\hat{\varrho}_{n,k} = 1$, wenn $u + k$ ein Vielfaches von n ist, und $\hat{\varrho}_{n,k} = 0$, wenn $u + k$ nicht durch n teilbar ist. Es ergibt sich

$$\hat{\varrho}_{n,k} = \sum_{q \in \mathbf{Z}} \hat{\varrho}(nq - k), \qquad \text{falls} \quad \varrho(t) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \hat{\varrho}(s)\, t^s \in Fl^1. \tag{4.2}$$

Aus dieser Formel und der Youngschen Ungleichung erhält man $\|\hat{\varrho}_n\|_\infty \leqq \|\varrho\|_{Fl^1}$. Zusammen mit dieser Abschätzung folgt aus dem Beweis zu Lemma 3.2, daß die Folge $\{L_n\}$ auch in dem mit der Supremumnorm versehenen Raum $C(\Gamma)$ gleichmäßig beschränkt ist. Für $d \geqq 1$ ergibt sich aus [7: Theorem 1] die starke Konvergenz von $\{L_n\}$ gegen den identischen Operator des Raumes $C(\Gamma)$. Hieraus schließt man zusammen mit der Beschränktheit des Multiplikationsoperators $a \in \mathscr{L}\big(\overline{PC}(\Gamma)\big)$ und der starken Konvergenz von $\{K_n\}$ gegen den Einbettungsoperator von $\overline{PC}(\Gamma)$ in $L^p(\Gamma)$ (vgl. Lemma 3.3), daß $\{K_n a L_n\}$ stark gegen den Operator $a: C(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ konvergiert. Für $d = 0$ folgt die Behauptung des Lemmas aus dem Beweis von [15: Lemma 4.1 (b)] ∎

Etwas komplizierter gestaltet sich der Fall des Galerkin-Verfahrens. Wenn $\omega(a, \delta)$ den Stetigkeitsmodul einer Funktion $a \in C(\Gamma)$ bezeichnet, so gilt

$$(a\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) = a\big(\gamma(j/n)\big)\, (\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) + O\big(n^{-1}\omega(a, n^{-1})\big).$$

Da nur $4d + 1$ Diagonalen der Matrix $\big((a\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\big)_{j,k=-r}^r$ von 0 verschiedene Elemente enthalten, ergibt sich

$$\Big\|\big((a\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\big)_{j,k=-r}^r - a_n n^{-1} \hat{\alpha}_n\Big\|_p = O\big(n^{-1}\omega(a, n^{-1})\big).$$

Damit erhält man aus (3.5) für die Matrix $L_n a|_{S_n^d}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_k^{(n)}\}$ die Beziehungen

$$L_n a|_{S_n^d} = n(\alpha^{-1})_n^\wedge \big((a\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\big)_{j,k}, \quad \|L_n a|_{S_n^d} - (\alpha^{-1})_n^\wedge a_n \hat{\alpha}_n\|_p \to 0. \tag{4.3}$$

Es sei nun $d = 0$ und $a \in PC(\Gamma_0)$. Die Unstetigkeitsstellen von a sollen in der Menge $\big\{\exp\big(i\pi(2k + 1)/n_0\big) : k = 0, \ldots, n_0 - 1\big\}$ für ein gewisses $n_0 \in \mathbf{N}$ enthalten und n ein ungerades Vielfaches von n_0 sein. Dann fallen die Sprungstellen von a unter die Unstetigkeitsstellen der Funktionen aus S_n^0. In diesem Falle läßt sich (4.3) genauso wie für stetige Funktionen a beweisen.

4.2 Der Näherungsoperator der Kollokation für den Cauchyschen singulären Operator besitzt bezüglich der Basis $\{\varphi_n^{(k)}\}$ die Matrix (vgl. (3.7))

$$K_n S_{\Gamma_0}|_{S_n^d} = (\varrho^{-1})_n^\wedge \Big((S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)})\,\big(\gamma_0((j + \varepsilon)/n)\big)\Big)_{j,k=-r}^r. \tag{4.4}$$

Die Matrixelemente $(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)})\left(\gamma_0((j+\varepsilon)/n)\right)$ lassen sich über die Fourier-Reihe wie folgt bestimmen:

$$(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)})\left(\gamma_0\left(\frac{j+\varepsilon}{n}\right)\right) = \sum_{s\in\mathbf{Z}} (\varphi_k^{(n)})^\wedge(s) \operatorname{sign}\left(s+\frac{1}{2}\right) \exp\frac{i2\pi s(j+\varepsilon)}{n}.$$

Unter Verwendung der Beziehungen (3.2) und (3.3) ergibt sich analog zur Berechnung von $\varphi_k^{(n)}\left(\gamma((j+\varepsilon)/n)\right)$

$$(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)})\left(\gamma_0\left(\frac{j+\varepsilon}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \exp\frac{i2\pi s(j-k)}{n}\, \sigma\left(\exp\left(i2\pi\frac{s}{n}\right)\right)$$

mit, für $x \in (0, 1)$,

$$\sigma\left(\exp(i2\pi x)\right) := (\Pi^d)^\wedge(x)\, x^{d+1} \exp(i2\pi\varepsilon x) \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\exp\left(i\pi k(2\varepsilon+d+1)\right)}{(x+k)^{d+1}} \operatorname{sign}\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Zusammen mit (4.4) erhält man

$$K_n S_{\Gamma_0}|_{S_n^d} = (\varrho^{-1})_n^\wedge\, \hat{\sigma}_n = (\varrho^{-1}\sigma)_n^\wedge. \tag{4.5}$$

Lemma 4.2: *Die Operatoren $K_nS_{\Gamma_0}|_{S_n^d}$ sind in $L^p(\Gamma_0)$ $(1 < p < \infty)$ gleichmäßig beschränkt, und $\{K_nS_{\Gamma_0}L_n\}$ konvergiert stark gegen S_{Γ_0}.*

Beweis: Die Beschränktheit folgt aus (4.5), Lemma 3.1 und Lemma 2.1. Die starke Konvergenz zeigt man wie im Beweis zu [15: Lemma 3.3] ∎

Für die Matrix $L_nS_{\Gamma_0}|_{S_n^d}$ ergibt sich unter Benutzung von (3.5)

$$L_nS_{\Gamma_0}|_{S_n^d} = n(\alpha^{-1})_n^\wedge\left((S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})\right)_{j,k=-r}^{r}. \tag{4.6}$$

Das Skalarprodukt $(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})$ wird mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten wie folgt bestimmt:

$$(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) = \sum_{s\in\mathbf{Z}} (\varphi_k^{(n)})^\wedge(s) \operatorname{sign}(s+1/2)\, \overline{(\varphi_j^{(n)})^\wedge(s)}.$$

Analog zur Berechnung von $(\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)})$ erhält man

$$(S_{\Gamma_0}\varphi_k^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) = \frac{1}{n^2}\sum_{s=0}^{n-1} \exp\left(i2\pi s(j-k)/n\right) \beta\left(\exp(i2\pi s/n)\right)$$

mit, für $x \in (0, 1)$,

$$\beta\left(\exp(i2\pi x)\right) := |(\Pi^d)^\wedge(x)|^2\, x^{2(d+1)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (x+k)^{-2(d+1)} \operatorname{sign}(k+1/2).$$

Zusammen mit (4.6) ergibt sich also

$$L_nS_{\Gamma_0}|_{S_n^d} = (\alpha^{-1})_n^\wedge\, \hat{\beta}_n = (\alpha^{-1}\beta)_n^\wedge. \tag{4.7}$$

4.3 Nun soll die Matrix des Näherungsoperators für den singulären Operator $A = aI + bS_{\Gamma_0}$ bestimmt werden. Aus der für den Interpolationsprojektor bekannten Beziehung $K_nb(I - K_n) = 0$, aus (4.1) und (4.5) folgt

$$K_nA|_{S_n^d} = K_na|_{S_n^d} + K_nb|_{S_n^d}K_nS_{\Gamma_0}|_{S_n^d} = (\varrho^{-1})_n^\wedge\left(a_n + b_n(\varrho^{-1}\sigma)_n^\wedge\right)\hat{\varrho}_n. \tag{4.8}$$

Für die Orthoprojektoren auf die Spline-Räume gilt eine zu $K_nb(I - K_n) = 0$ analoge Beziehung, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.3 (vgl. [14: Beweis zu Lemma 1.1]): *Es sei* $f \in C(\Gamma)$ *oder* $d = 0$ *und* $f \in PC(\Gamma)$, *und die Sprungstellen von* f *mögen zu den Unstetigkeitsstellen der Funktionen aus* S_n^0 *gehören. Dann gilt* $\|L_n f(I - L_n)\| \to 0$.

Aus diesem Lemma ergibt sich zusammen mit (4.3) und (4.7)

$$\|L_n A|_{S_n^d} - (\alpha^{-1})_n^\wedge \left(a_n + b_n(\alpha^{-1}\beta)_n^\wedge\right) \hat{\alpha}_n\| \to 0. \tag{4.9}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß beim Kollokationsverfahren für den Operator der Gestalt $A = aI + S_{\Gamma_0} b$ mit stetigen Koeffizienten eine zu (4.8) analoge Formel gilt. Dies folgt aus

Lemma 4.4 (vgl. [15: Beweis zu Lemma 4.2]): *Es sei* $d = 0$, *und* f *soll einer Lipschitz-Bedingung genügen. Dann gibt es eine Konstante* $C > 0$ *derart, daß für alle* n *gilt* $\|K_n S_{\Gamma_0}(I - K_n) f L_n\| \leqq C(\log n)/n$.

5. Stabilität spezieller Matrixfolgen mit Zirkulantenstruktur

5.1 Um die Stabilität des Kollokationsverfahrens nachzuweisen, genügt es nach Formel (4.8) und Lemma 2.1, die Stabilität der Folge $\{a_n + b_n(\varrho^{-1}\sigma)_n^\wedge\}$ zu zeigen. Zu diesem Zweck wird im vorliegenden Abschnitt ein Stabilitätskriterium für Matrixfolgen $\{B_n\}$ der Gestalt $B_n = a_n\hat{\alpha}_n + b_n\hat{\beta}_n \in \mathcal{L}(l^p(n))$ mit $a, b, \alpha, \beta \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ bewiesen. Für dieses Kriterium werden Operatoren B_τ und B^τ benötigt, die von $\tau \in \Gamma_0$ und a, b, α, β abhängen und wie folgt definiert sind:

$$B_\tau = a\left(\alpha(\tau + 0)\, P_{\Gamma_0} + \alpha(\tau - 0)\, Q_{\Gamma_0}\right) + b\left(\beta(\tau + 0)\, P_{\Gamma_0} + \beta(\tau - 0)\, Q_{\Gamma_0}\right),$$

$$B^\tau = \left(a(\tau + 0)\, P_{\Gamma_0} + a(\tau - 0)\, Q_{\Gamma_0}\right) \tilde{\alpha} + \left(b(\tau + 0)\, P_{\Gamma_0} + b(\tau - 0)\, Q_{\Gamma_0}\right) \tilde{\beta}.$$

Hierbei wird für $\alpha \in PC(\Gamma_0)$ die Funktion $\tilde{\alpha} \in PC(\Gamma_0)$ durch $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t^{-1})$ erklärt.

Lemma 5.1: *Für beliebige Funktionen* $a, b \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ *und* $\alpha, \beta \in PC^2(\Gamma_0)$ *ist die Folge* $\{B_n\}$ *genau dann stabil, wenn für alle* $\tau \in \Gamma_0$ *die Operatoren* $B_\tau \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ *und* $B^\tau \in \mathcal{L}(Fl^p)$ *invertierbar sind.*

Der Beweis dieses Lemmas wird in den Abschnitten 5.2 bis 5.6 geführt werden.

5.2 Zuerst soll gezeigt werden, daß für stabile Folgen $\{B_n\}$ die Operatoren B_τ aus $\mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ invertierbar sind. Es sei L_n der Orthoprojektor aus Abschnitt 3 mit $d = 0$. Aufgrund des Lemmas 3.1 kann man die Matrix B_n mit dem Operator aus $\mathcal{L}(\text{im } L_n)$ identifizieren, der bezüglich der Basis $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=-r}^{r}$ die Matrixdarstellung B_n besitzt. Wenn $\{B_n\}$ stabil ist, dann existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ derart, daß die Ungleichungen

$$\|B_n L_n f\|_{L^p(\Gamma_0)} \geqq \delta\, \|L_n f\|_{L^p(\Gamma_0)} \qquad \left(f \in L^p(\Gamma_0),\, n \geqq n_0\right) \tag{5.1}$$

erfüllt sind. Außerdem ist dann die Folge der adjungierten Matrizen $B_n^* \in \mathcal{L}(l^q(n))$, $1/p + 1/q = 1$, stabil, und es gilt analog

$$\|B_n^* L_n g\|_{L^q(\Gamma_0)} \geqq \delta\, \|L_n g\|_{L^q(\Gamma_0)}, \qquad \left(g \in L^q(\Gamma_0),\, n \geqq n_0\right). \tag{5.2}$$

In Lemma 5.2 wird aber gezeigt werden, daß $\{B_n L_n\}$ stark gegen $B_1 \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ und $\{B_n^* L_n\}$ stark gegen $B_1^* \in \mathcal{L}(L^q(\Gamma_0))$ konvergiert. Durch Grenzübergang in (5.1) und (5.2) erhält man dann $\|B_1 f\|_{L^p(\Gamma_0)} \geqq \delta\, \|f\|_{L^p(\Gamma_0)}$ und $\|B_1^* g\|_{L^q(\Gamma_0)} \geqq \delta\, \|g\|_{L^q(\Gamma_0)}$; d. h., B_1 ist invertierbar. Die Invertierbarkeit von B_τ für ein beliebiges $\tau \in \Gamma_0$ ergibt sich nun folgendermaßen. Man wählt eine Folge von Matrizen $W_n^\tau \subset \mathcal{L}(l^p(n))$ mit $\|W_n^\tau\|_p = \|(W_n^\tau)^{-1}\|_p = 1$ (siehe unten) und zeigt, daß $\{W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1} L_n\}$ stark gegen B_τ und $\{(W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1})^* L_n\}$ stark gegen B_τ^* konvergiert (siehe Lemma 5.2). Wenn nun $\{B_n\}$ stabil ist, so ist auch $\{W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1}\}$ stabil, und analog zur Invertierbarkeit von B_1 schließt man auf die Invertierbarkeit von B_τ.

Für $\tau = \exp(i2\pi s) \in \Gamma_0$ und $n \in \mathbf{N}$ sei $k(n, \tau) = \min\{k' \in \mathbf{Z} : k' \geqq ns\}$ und $W_n^\tau = (\exp(-i2\pi k(n, \tau)\, u/n)\, \delta_{u,v})_{u,v=-r}^r$. Insbesondere ist W_n^1 die identische Matrix. Wie man leicht zeigen kann, gilt $\|W_n^\tau\|_p = \|(W_n^\tau)^{-1}\|_p = 1$, und für alle $a, \alpha \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ ist

$$W_n^\tau a_n = a_n W_n^\tau,\ W_n^\tau \hat{\alpha}_n (W_n^\tau)^{-1} = (\gamma^n)_n^\wedge,\ \gamma^n(t) := \alpha\left(t \exp \frac{i2\pi k(n, \tau)}{n}\right). \quad (5.3)$$

Lemma 5.2: *Die Folge* $\{W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1} L_n\}$ *konvergiert stark gegen* $B_\tau \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$.

Beweis: Aufgrund von (5.3) ist

$$W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1} = a_n (\gamma^n)_n^\wedge + b_n (\lambda^n)_n^\wedge, \qquad \lambda^n(t) := \beta\left(t \exp \frac{i2\pi k(n, \tau)}{n}\right).$$

Es genügt also, $a_n L_n \to a$ und $(\gamma^n)_n^\wedge L_n \to (\alpha(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + \alpha(\tau - 0) Q_{\Gamma_0})$ zu zeigen. Die Konvergenz $a_n L_n \to a$ folgt aus Lemma 4.1 und Formel (4.1), bei der im Falle $d = 0$ die Funktion ϱ identisch gleich 1 ist. Die starke Konvergenz von $\{(\gamma^n)_n^\wedge L_n\}$ zeigt man analog zum Beweis von Lemma 4.2 ∎

Unter Berücksichtigung von $(W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1})^* = (\overline{\gamma^n})_n^\wedge (\bar{a})_n + (\overline{\lambda^n})_n^\wedge (\bar{b})_n$ folgt aus dem Beweis von Lemma 5.2 die starke Konvergenz $(W_n^\tau B_n (W_n^\tau)^{-1})^* L_n \to B_\tau^*$.

5.3 Analog zum Abschnitt 5.2 läßt sich auch die Invertierbarkeit der Operatoren B^τ $(\tau \in \Gamma_0)$ beweisen. Die Rolle des Projektors L_n aus Abschnitt 5.2 übernimmt jetzt der im Teil a) des Beweises von Lemma 2.1 eingeführte Projektor P_n, der aber im Raum Fl^p betrachtet werden soll. Dann kann man eine Matrix aus $\mathcal{L}(l^p(n))$ mit dem Operator aus $\mathcal{L}(\operatorname{im} P_n)$ identifizieren, der bezüglich der Basis $\{t^j\}_{j=-r}^r$ diese Matrixdarstellung besitzt. An Stelle von W_n^τ benötigt man Matrizen V_n^τ, die wie folgt definiert werden: Für $\tau = \exp(i2\pi s) \in \Gamma_0$ und $n \in \mathbf{N}$ sei $m(n, \tau) = \min\{m' \in \mathbf{Z} : m' \geqq ns - \varepsilon\}$ (vgl. (4.1)) und $V_n^\tau := U^{-1}(\exp(-i2\pi m(n, \tau)\, u/n)\, \delta_{u,v})_{u,v=-r}^r\, U$ (vgl. Abschnitt 2.1). Wie man leicht zeigen kann, gilt $\|V_n^\tau\|_p = \|(V_n^\tau)^{-1}\|_p = 1$ (vgl. Youngsche Ungleichung), und für alle $a, \alpha \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ ist

$$V_n^\tau \hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n V_n^\tau,\ V_n^\tau a_n (V_n^\tau)^{-1} = (c^n)_n,\quad c^n(t) := a\left(t \exp \frac{i2\pi m(n, \tau)}{n}\right). \quad (5.4)$$

Lemma 5.3: *Die Folge* $\{V_n^\tau B_n (V_n^\tau)^{-1} P_n\}$ *konvergiert stark gegen* $B^\tau \in \mathcal{L}(Fl^p)$.

Beweis: Aufgrund von (5.4) ist

$$V_n^\tau B_n (V_n^\tau)^{-1} = (c^n)_n \hat{\alpha}_n + (d^n)_n \hat{\beta}_n, \qquad d^n(t) := b\left(t \exp \frac{i2\pi m(n, \tau)}{n}\right).$$

Es genügt also, $(c^n)_n P_n \to (c(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + c(\tau - 0) Q_{\Gamma_0})$ und $\hat{\alpha}_n P_n \to \hat{\alpha}$ zu zeigen. Die Konvergenz von $\{(c^n)_n P_n\}$ ist aufgrund der Diagonalgestalt der Operatoren bezüglich der Basis $\{t^j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ offensichtlich. Für die Konvergenz von $\{\hat{\alpha}_n P_n\}$ führt man den Interpolationsprojektor M_n ein, der für alle Riemann-integrierbaren Funktionen f durch

$$(M_n f)(\exp(i2\pi k/n)) = f(\exp(i2\pi k/n)), \qquad k = -r, \ldots, r, \quad (5.5)$$

sowie $M_n f \in \operatorname{im} P_n$ erklärt wird (vgl. [23]). Dann hat der Näherungsoperator $M_n\tilde{\alpha}|_{\operatorname{im} P_n}$, der bei der trigonometrischen Kollokation für den Multiplikationsoperator $\tilde{\alpha}$ entsteht, bezüglich der Basis $\{t^j\}_{j=-r}^{r}$ die Matrixdarstellung $\hat{\alpha}_n$. Aus [11: Hilfssatz 2.4] folgt die Fl^2-Konvergenz $\hat{\alpha}_n P_n \to \tilde{\alpha}$. Unter Ausnutzung der gleichmäßigen Beschränktheit von $\{\hat{\alpha}_n P_n\}$ und der Hölderschen Ungleichung ergibt sich die Konvergenz in Fl^p $(1 < p < \infty)$ ∎

Die Matrix $\left(V_n^{\tau} B_n (V_n^{\tau})^{-1}\right)^*$ hat die Gestalt $(\bar{\alpha})_n^\wedge (\overline{c^n})_n + (\bar{\beta})_n^\wedge (\overline{d^n})_n$. Nach Lemma 5.3 gilt also auch $\left(V_n^{\tau} B_n (V_n^{\tau})^{-1}\right)^* P_n \to (B^{\tau})^* \in \mathcal{L}(Fl^q)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Hiermit und unter Benutzung von Lemma 5.3 zeigt man analog zum Abschnitt 5.2 die Invertierbarkeit von $B^{\tau} \in \mathcal{L}(Fl^p)$.

5.4 Die Hinlänglichkeit der in Lemma 5.1 formulierten Stabilitätsbedingungen ergibt sich aus einem lokalen Prinzip für Näherungsverfahren (siehe nachfolgendes Lemma 5.4). Der vollständige Beweis dieses Prinzips ist in [17] angegeben. Er beruht auf den Beweisgedanken zu den lokalen Prinzipien aus [9, 11].

Der Operator L_n $(d = 0)$ soll wie im Abschnitt 3.2 definiert sein. Ähnlich wie in Abschnitt 5.2 werden im weiteren die Räume $\mathcal{L}\left(l^p(n)\right)$ und $\mathcal{L}(\operatorname{im} L_n)$ identifiziert. Da nach Lemma 5.2 die Folge $\{B_n L_n\}$ stark gegen B_1 konvergiert, kann man für den Operator $B_1 \in \mathcal{L}\left(L^p(\Gamma_0)\right)$ das Näherungsverfahren mit den Operatoren B_n betrachten. Um die Stabilität dieses Verfahrens zu beweisen, treffen wir die folgenden Vereinbarungen: Die Menge aller Folgen $\{m_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, wobei m eine auf Γ_0 beliebig oft differenzierbare nichtnegative Funktion ist, sei mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Ferner sei $\{\tau_0 = 1, \tau_1, \ldots, \tau_R\}$ $(R \in \mathbf{N})$ eine fixierte Teilmenge von Γ_0, die alle Sprungstellen der Funktionen α und β enthält, und $W_n^i = W_n^{\tau_i}$ für $i = 0, 1, \ldots, R$. Schließlich sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Linearkombinationen von Matrixfolgen der Form $\{b_n (W_n^i)^{-1} L_n T W_n^i D_n + C_n\}$, wobei $b \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ ist, $T \in \mathcal{L}\left(L^p(\Gamma_0)\right)$ ein kompakter Operator und $C_n, D_n \in \mathcal{L}\left(l^p(n)\right)$ Operatoren mit $\sup\{\|D_n\|_p : n \in \mathbf{N}\} < \infty$ bzw. $\|C_n\|_p \to 0$ sind. Mit diesen Bezeichnungen sollen drei Voraussetzungen erfüllt sein:

a) Es sollen invertierbare Operatoren $B^i \in \mathcal{L}\left(L^p(\Gamma_0)\right)$ derart existieren, daß $\{W_n^i B_n (W_n^i)^{-1} L_n\}$ stark gegen B^i konvergiert.

b) Für alle $\{m_n\} \in \mathfrak{M}$ gelte $\{m_n B_n - B_n m_n\} \in \mathfrak{K}$.

c) Für ein gewisses $N \in \mathbf{N}$ sollen Matrizenfolgen $\{m_n^j\} \in \mathfrak{M}$ und $\{R_n^j\}$ $(j = 1, \ldots, N)$ derart existieren, daß $\sup\{\|R_n^j\|_p : n \in \mathbf{N}\} < \infty$ und $m_n^j B_n R_n^j = m_n^j$ ist. Die Summe $f_n = m_n^1 + \cdots + m_n^N$ soll für genügend großes n invertierbar und die Folge der inversen Matrizen $\{f_n^{-1}\}$ gleichmäßig beschränkt sein.

Lemma 5.4 (siehe [17]): *Wenn die Voraussetzungen* a)—c) *erfüllt sind, dann ist die Folge* $\{B_n\}$ *stabil.*

Für den Beweis der Hinlänglichkeit der Stabilitätsbedingungen aus Lemma 5.1 genügt es also, die Gültigkeit der Bedingungen a)—c) zu zeigen.

5.5 Falls die Stabilitätsbedingungen aus Lemma 5.1 erfüllt sind, folgt die Bedingung a) aus Lemma 5.2. Die Bedingung b) folgt aus $m_n a_n = a_n m_n$, $m_n b_n = b_n m_n$ und dem folgenden

Lemma 5.5: (i) *Aus* $\{m_n\} \in \mathfrak{M}$ *und* $\alpha \in C(\Gamma_0) \cap PC^2(\Gamma_0)$ *folgt* $\|m_n \hat{\alpha}_n - \hat{\alpha}_n m_n\|_p \to 0$.
(ii) *Aus* $\{m_n\} \in \mathfrak{M}$ *und* $\alpha \in PC^2(\Gamma_0)$ *folgt* $\{m_n \hat{\alpha}_n - \hat{\alpha}_n m_n\} \in \mathfrak{K}$.

Beweis: (i) Aus (4.2) und $|\hat{\alpha}(k)| \leq Ck^{-2}$ folgt für eine geeignete (andere) Konstante $C > 0$ und für alle $k \in \{-r, \ldots, r\}$ die Abschätzung $|\hat{\alpha}_{n,k}| \leq Ck^{-2} + Cn^{-2}$. Zusammen mit $\left|m\left(\gamma_0((k + \varepsilon)/n)\right) - m\left(\gamma_0((l + \varepsilon)/n)\right)\right| \leq C(k - l)/n$ ergibt sich für das Element der k-ten Zeile und l-ten Spalte von $(m_n\hat{\alpha}_n - \hat{\alpha}_n m_n)$ die Abschätzung

$$\left|\left(m\big(\gamma_0((k+\varepsilon)/n)\big) - m\big(\gamma_0((l+\varepsilon)/n)\big)\right)\hat{\alpha}_{n,k\dot{-}l}\right| \leqq C(k \dot{-} l)^{-1} n^{-1} + C(k \dot{-} l)\, n^{-3}.$$

Unter Benutzung der Youngschen Ungleichung schließt man

$$\|m_n\hat{\alpha}_n - \hat{\alpha}_n m_n\|_p \leqq C\, \left\|\left(((k \dot{-} l)^{-1} n^{-1} + (k \dot{-} l)\, n^{-3})\right)_{k,l=-r}^{r}\right\|_p \leqq Cn^{-1} \log n \to 0.$$

(ii) Es sei $\varkappa := \varrho^{-1}\sigma$ (vgl. (4.5)), und für $t \in \Gamma_0$ und alle $s \in \Gamma_0$ sei $\varkappa^t(s) := \varkappa(t^{-1}s)$. Dann ist $\alpha' := \alpha - \sum_{j=0}^{R} 1/2\big(\alpha(\tau_j + 0) - \alpha(\tau_j - 0)\big)\, \varkappa^{\tau_j} \in PC^2(\Gamma_0) \cap C(\Gamma_0)$, denn es gilt $\varkappa(1 \pm 0) = \pm 1$. Also genügt es, $\{m_n(\varkappa^{\tau_j})_n{}^\wedge - (\varkappa^{\tau_j})_n{}^\wedge\, m_n\} \in \mathfrak{K}$ zu zeigen. Wenn $\varkappa^n$ $(n \in \mathbb{N})$ durch $\varkappa^n(s) = \varkappa\big(\exp(-i2\pi k(n, \tau_j)/n)\, s\big)$ erklärt wird, konvergiert $\|(\varkappa^{\tau_j})_n - (\varkappa^n)_n\|_2$ aufgrund der Definition von $k(n, \tau_j)$ gegen 0. Weil die Fourier-Transformation $U \in \mathscr{L}\big(l^2(n)\big)$ isometrisch ist, ergibt sich unter Benutzung von (5.3) die Konvergenz $\|(\varkappa^{\tau_j})_n{}^\wedge - (W_n{}^j)^{-1}\, \hat{\varkappa}_n W_n{}^j\|_2 \to 0$. Diese Nullfolge ist in $\mathscr{L}\big(l^p(n)\big)$ $(1 < p < \infty)$ bezüglich n gleichmäßig beschränkt. Aus der Interpolationstheorie (siehe [21]) folgt $\|(\varkappa^{\tau_j})_n{}^\wedge - (W_n{}^j)^{-1}\, \hat{\varkappa}_n W_n{}^j\|_p \to 0$. Es genügt also,

$$\{m_n(W_n{}^j)^{-1}\, \hat{\varkappa}_n W_n{}^j - (W_n{}^j)^{-1}\, \hat{\varkappa}_n W_n{}^j m_n\} \in \mathfrak{K},$$

$$\text{d. h.}\quad \{(W_n{}^j)^{-1}\, (m_n\hat{\varkappa}_n - \hat{\varkappa}_n m_n)\; W_n{}^j\} \in \mathfrak{K}$$

zu zeigen. Die Formeln (4.1) und (4.5) ergeben $m_n\hat{\varkappa}_n - \hat{\varkappa}_n m_n = K_n m K_n S_{\Gamma_0} L_n - K_n S_{\Gamma_0} K_n m L_n$. Dann muß wegen $K_n m(I - K_n) = 0$ und Lemma 4.4 nur noch $\{(W_n{}^j)^{-1}\, K_n(mS_{\Gamma_0} - S_{\Gamma_0}m)\; W_n{}^j\} \in \mathfrak{K}$ bewiesen werden. Da $mS_{\Gamma_0} - S_{\Gamma_0}m$ den Raum $L^p(\Gamma_0)$ kompakt in $C(\Gamma_0)$ abbildet und die Folgen $\{K_n\}$ und $\{L_n\}$ stark gegen die Einbettung von $C(\Gamma_0)$ nach $L^p(\Gamma_0)$ konvergieren (vgl. Lemma 3.3 und Lemma 3.2), ist $\{(K_n - L_n)\,(mS_{\Gamma_0} - S_{\Gamma_0}m)\}$ eine Nullfolge des Raumes $\mathscr{L}\big(L^p(\Gamma_0)\big)$. Aus $\{(W_n{}^j)^{-1}\, L_n(mS_{\Gamma_0} - S_{\Gamma_0}m)\; W_n{}^j\} \in \mathfrak{K}$ folgt die Behauptung ∎

5.6 Jetzt wird bewiesen, daß zu jedem $\tau \in \Gamma_0$ Folgen $\{m_n{}^\tau\} \in \mathfrak{M}$ und $\{R_n{}^\tau\}$ existieren, so daß $m^\tau(\tau) = 1$ und $m_n{}^\tau B_n R_n{}^\tau = m_n{}^\tau$ gilt. Ist dies gezeigt, dann kann man Punkte $\tau_i \in \Gamma_0$ $(i = 1, \ldots, N)$ mit $f = m^{\tau_1} + \cdots + m^{\tau_N} > 0$ wählen, und die Bedingung c) ist für $m_n{}^i = m_n{}^{\tau_i}$ und $R_n{}^i = R_n{}^{\tau_i}$ erfüllt.

Wie im Abschnitt 5.3 soll wieder $\mathscr{L}\big(l^p(n)\big)$ mit $\mathscr{L}(\mathrm{im}\, P_n)$ identifiziert werden. Für alle $\{m_n\}, \{m_n'\}, \{m_n''\}$ mit $m_n m_n'' = m_n$, $m_n'' m_n' = m_n''$ und $m(\tau) = 1$ gilt

$$m_n B_n m_n'(V_n{}^\tau)^{-1} = m_n(P_n B^\tau + D_n{}^1 + \cdots + D_n{}^6)$$

mit

$$D_n{}^1 = (V_n{}^\tau)^{-1}\left[V_n{}^\tau a_n(V_n{}^\tau)^{-1} - \big(a(\tau+0)\, P_{\Gamma_0} + a(\tau-0)\, Q_{\Gamma_0}\big)\right] \times V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1}\, \hat{\alpha}_n V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1},$$

$$D_n{}^2 = (V_n{}^\tau)^{-1}\left[V_n{}^\tau b_n(V_n{}^\tau)^{-1} - \big(b(\tau+0)\, P_{\Gamma_0} + b(\tau-0)\, Q_{\Gamma_0}\big)\right] \times V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1}\, \hat{\beta}_n V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1},$$

$$D_n{}^3 = (V_n{}^\tau)^{-1}\, \big(a(\tau+0)\, P_{\Gamma_0} + a(\tau-0)\, Q_{\Gamma_0}\big)\; V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1} \times [\hat{\alpha}_n - P_n\hat{\alpha}]\; V_n{}^\tau m_n'(V_n{}^\tau)^{-1},$$

$$D_n^4 = (V_n^\tau)^{-1} \big(b(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + b(\tau - 0) Q_{\Gamma_0}\big) V_n^\tau m'_n (V_n^\tau)^{-1}$$
$$\times [\hat{\beta}_n - P_n\tilde{\beta}] V_n^\tau m_n' (V_n^\tau)^{-1},$$

$$D_n^5 = (V_n^\tau)^{-1} V_n^\tau m_n'' (V_n^\tau)^{-1} \big(a(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + a(\tau - 0) Q_{\Gamma_0}\big)$$
$$\times \tilde{\alpha}[V_n^\tau m_n' (V_n^\tau)^{-1} - I],$$

$$D_n^6 = (V_n^\tau)^{-1} V_n^\tau m_n'' (V_n^\tau)^{-1} \big(b(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + b(\tau - 0) Q_{\Gamma_0}\big)$$
$$\times \tilde{\beta}[V_n^\tau m_n' (V_n^\tau)^{-1} - I].$$

Wenn die Operatoren B^τ invertierbar sind, ergibt sich

$$m_n B_n m_n' (V_n^\tau)^{-1} (B^\tau)^{-1} P_n = m_n(I + D_n),\ D_n = (D_n^1 + \cdots + D_n^6)(B^\tau)^{-1} P_n.$$

Falls $\|D_n\|_p < 1/2$ gilt, ist für $R_n = m_n'(V_n^\tau)^{-1} (B^\tau)^{-1} P_n(I + D_n)^{-1}$ die gesuchte Beziehung $m_n B_n R_n = m_n$ erfüllt. Es genügt also zu zeigen, daß durch geeignete Wahl der Folgen $\{m_n\}$, $\{m_n'\}$ und $\{m_n''\}$ die Operatoren $D_n^1, \ldots, D_n^6$ genügend klein gemacht werden können. Für die Operatoren D_n^1, D_n^2 folgt dies aus dem folgenden Lemma, welches sich analog zu [13: Lemma 3.2] beweisen läßt.

Lemma 5.6: *Es sei* $a \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ *und* $\delta > 0$. *Dann gibt es eine Umgebung des Punktes* 1 *auf* Γ_0, *so daß für alle* $m \in C(\Gamma_0)$ *mit* $m(\Gamma_0) \subset [0, 1]$ *und* supp $m \subseteqq U$ *gilt* $\left\|\left\{V_n^\tau a_n (V_n^\tau)^{-1} - \big(a(\tau + 0) P_{\Gamma_0} + a(\tau - 0) Q_{\Gamma_0}\big)\right\} m_n\right\|_{\mathcal{L}(\operatorname{im} P_n)} < \delta.$

Die gesuchte Abschätzung für die Operatoren D_n^5, D_n^6 ergibt sich aus dem nächsten Lemma, das aus dem Beweis von [17: Lemma 4.2] abgeleitet werden kann.

Lemma 5.7: *Zu jedem* $\tau \in \Gamma_0$, $\delta > 0$ *und jeder Umgebung* U_1 *des Punktes* 1 *auf* Γ_0 *gibt es eine weitere Umgebung* U_2 *auf* Γ_0 *mit* $1 \in U_2 \subseteqq U_1$, *so daß für alle* $m, m' \in C(\Gamma_0)$ *mit* $m(\Gamma_0), m'(\Gamma_0) \subset [0, 1]$ *und* supp $m \subseteqq U_2 \subseteqq U_1 \subseteqq \{t \in \Gamma_0 : m'(t) = 1\}$ *gilt* $\|m_n P_n B^\tau (m_n' - I)\|_{\mathcal{L}(F^p)} < \delta$.

Die Abschätzung für D_n^3 und D_n^4 schließlich folgt aus

Lemma 5.8: *Für* $\alpha \in PC^2(\Gamma_0)$ *und vorgegebenes* $\delta > 0$ *gibt es eine Umgebung* U *des Punktes* 1 *auf* Γ_0, *so daß für alle* $m \in C(\Gamma_0)$ *mit* $m(\Gamma_0) \subset [0, 1]$ *und* supp $m \subseteqq U$ *gilt* $\|m_n(\hat{\alpha}_n - P_n\tilde{\alpha})\, m_n\|_{\mathcal{L}(\operatorname{im} P_n)} < \delta$.

Beweis: a) Zuerst benötigt man eine Abschätzung für die Elemente der Matrix $(\hat{\alpha}_n - P_n\tilde{\alpha}|_{\operatorname{im} P_n})$, und zwar wird die Existenz solcher Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gezeigt, daß gilt (vgl. Beweis zu Lemma 4.1)

$$|(\tilde{\alpha})^\wedge (l) - \hat{\alpha}_{n,l}| \leqq Cn^{-1} \qquad \text{für alle} \quad l \in \mathbf{Z} \quad \text{mit} \quad |l| \leqq \delta n. \tag{5.6}$$

Jedes $s \in \mathbf{Z}$ mit $-kn < s \leqq kn$ ist eindeutig als Summe $s = s^\# + u$ darstellbar, wobei $2k$ ein Teiler von $s^\#$ und $-k < u \leqq k$ ist. Wenn

$$\hat{\alpha}_{n,l,k} = \frac{1}{2kn} \sum_{s=-kn+1}^{kn} \exp(i2\pi sl/2kn)\, \alpha\big(\exp(i2\pi s/2kn)\big)$$

gesetzt wird, dann erhält man

$$\hat{\alpha}_{n,l} = \frac{1}{2kn} \sum_{s=-kn+1}^{kn} \exp(i2\pi ls^\#/2kn)\, \alpha\big(\exp(i2\pi s^\#/2kn)\big).$$

Also gilt $\hat{\alpha}_{n,l,k} - \hat{\alpha}_{n,l} = \hat{\alpha}^1_{n,l,k} + \hat{\alpha}^2_{n,l,k}$ mit

$$\hat{\alpha}^1_{n,l,k} = \sum_{s=-kn+1}^{kn} \frac{\exp(i2\pi ls/2kn)}{2kn} \left[\alpha\left(\exp(i2\pi s/2kn)\right) - \alpha\left(\exp(i2\pi s^\#/2kn)\right)\right],$$

$$\hat{\alpha}^2_{n,l,k} = \sum_{s=-kn+1}^{kn} \frac{\alpha\left(\exp(i2\pi s^\#/2kn)\right)}{2kn} \left[\exp(i2\pi sl/2kn) - \exp(i2\pi ls^\#/2kn)\right].$$

Wenn zwischen $\exp(i2\pi s/2kn)$ und $\exp(i2\pi s^\#/2kn)$ keine Sprungstelle von α liegt, gilt $|\alpha(\exp(i2\pi s/2kn)) - \alpha(\exp(i2\pi s^\#/2kn))| < Cn^{-1}$. Somit ergibt sich $|\hat{\alpha}^1_{n,l,k}| < Cn^{-1}$. Für $\hat{\alpha}^2_{n,l,k}$ erhält man

$$\hat{\alpha}^2_{n,l,k} = \hat{\alpha}_{n,l}\beta_{n,l,k} \quad \text{mit} \quad \beta_{n,l,k} = \frac{1}{2k} \sum_{u=-k+1}^{k} [\exp(i2\pi lu/2kn) - 1].$$

Mit Hilfe der Summenformel für die geometrische Reihe schließt man

$$\beta_{n,l,k} = \frac{\sin(\pi l/n)}{\pi l/n} \frac{i2\pi l/2kn}{\exp(i2\pi l/2kn) - 1} \exp(i2\pi l/2kn) - 1$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{n,l,k} = \frac{\sin(\pi l/n)}{\pi l/n} - 1 = (l/n) \left\{\pi \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{(2u+1)!} (\pi l/n)^{2u-1}\right\}.$$

Folglich gilt für $(\tilde{\alpha})^\wedge(l) - \hat{\alpha}_{n,l} = \lim_{k\to\infty} (\hat{\alpha}_{n,l,k} - \hat{\alpha}_{n,l})$ die Abschätzung $|(\tilde{\alpha})^\wedge(l) - \hat{\alpha}_{n,l}| \leqq Cn^{-1} + C|\hat{\alpha}_{n,l}|\, ln^{-1}$. Zusammen mit $|(\tilde{\alpha})^\wedge(l)| \leqq Cl^{-1}$ ergibt sich $|(\tilde{\alpha})^\wedge(l) - \hat{\alpha}_{n,l}| \leqq Cn^{-1} + C|(\tilde{\alpha})^\wedge(l) - \hat{\alpha}_{n,l}|\, ln^{-1}$, woraus unmittelbar (5.6) folgt.

b) Wenn die Umgebung U in Lemma 5.8 genügend klein gewählt wird, dann enthält die Matrix $\{m_n(\hat{\alpha}_n - P_n\tilde{\alpha})\, m_n\}$, abgesehen von einer $[\delta n] \times [\delta n]$-Untermatrix, nur Nullelemente. Die von 0 verschiedenen Elemente dieser Matrix sind aufgrund von a) kleiner oder gleich Cn^{-1}. Aus der Youngschen Ungleichung folgt aber, daß die Norm einer solchen Matrix kleiner oder gleich $2C\delta$ ist ∎.

6. Stabilität spezieller Näherungsverfahren

6.1 Es soll zuerst das ε-Kollokationsverfahren mit Spline-Ansatzfunktionen für $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$ betrachtet werden. Dazu sei $\varkappa$ die Funktion $\varrho^{-1}\sigma$ aus (4.5), d. h., für $x \in (0, 1)$ sei

$$\varkappa\left(\exp(i2\pi x)\right) := \frac{\sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\left(i\pi k(2\varepsilon + d + 1)\right) (x+k)^{-d-1} \operatorname{sign}(k + 1/2)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\left(i\pi k(2\varepsilon + d + 1)\right) (x+k)^{-d-1}}.$$

Satz 6.1: *Für $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$, $a, b \in \overline{PC}(\Gamma)$ und $A = aI + bS_\Gamma \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ $(1 < p < \infty)$ ist die ε-Kollokation genau dann stabil, wenn der Operator $A \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ und für alle $\tau \in \Gamma$ die Operatoren*

$$A^\tau := P_{\Gamma_0}\left(a(\tau + 0) + b(\tau + 0)\, \tilde{\varkappa}\right) + Q_{\Gamma_0}\left(a(\tau - 0) + b(\tau - 0)\, \tilde{\varkappa}\right) \in \mathcal{L}(Fl^p)$$

invertierbar sind.

Beweis: a) Zuerst sei $\Gamma = \Gamma_0$. Nach Abschnitt 5.1 ist die ε-Kollokation genau dann stabil, wenn die Folge $\{a_n + b_n\hat{x}_n\}$ stabil ist. Aus Lemma 5.1 folgt die Behauptung.

b) Es sei γ die Parameterdarstellung einer beliebigen Kurve Γ. Wenn $\{\varphi_k^{(n)}\}$ die in Abschnitt 3.1 definierte Basis des Raumes S_n^d auf Γ und $\{\varphi_{0,k}^{(n)}\}$ die entsprechende Basis des Spline-Raumes $S_{0,n}^d$ auf Γ_0 bezeichnen, dann gilt $\varphi_k^{(n)} = \varphi_{0,k}^n \circ \chi^{-1}$ ($k = 0, \ldots, n-1$; $\chi := \gamma \circ \gamma_0^{-1}$). Es sei K_n der in Abschnitt 3.3 eingeführte Interpolationsprojektor auf Γ und $K_{0,n}$ der entsprechende Projektor auf Γ_0. Ferner sei $a_0 := a \circ \chi$, $b_0 := b \circ \chi$, $A_0 := a_0 I + b_0 S_{\Gamma_0}$ und für $x \in L^p(\Gamma_0)$ der Operator T durch

$$(Tx)(t) = b_0(t) \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} x(s) \left\{\chi'(s) \left(\chi(s) - \chi(t)\right)^{-1} - (s-t)^{-1}\right\} ds$$

definiert. Offensichtlich besitzt der Kollokationsoperator $K_n A|_{S_n^d}$ bezüglich $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ die gleiche Matrix wie $K_{0,n}(A_0 + T)|_{S_{0,n}^d}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{0,k}^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$. Aus Lemma 3.1 folgt, daß die ε-Kollokation für den Operator A genau dann stabil ist, wenn sie für $A_0 + T$ stabil ist. Der Operator T bildet aber $L^p(\Gamma_0)$ kompakt in $\overline{PC}(\Gamma_0)$ ab. Unter Benutzung bekannter Störungssätze (vgl. [8, 16]) ergibt sich, daß die ε-Kollokation für $A_0 + T$ genau dann stabil ist, wenn sie für A_0 stabil ist. Damit ist der Fall einer beliebigen Kurve Γ auf den Spezialfall $\Gamma = \Gamma_0$ zurückgeführt ∎

Bemerkung 6.1: Für $\Gamma = \Gamma_0$ folgt aus Lemma 4.1 und Lemma 4.2 die Konvergenz $K_n A L_n \to A$. Analog zum Teil b) des vorstehenden Beweises läßt sich diese Konvergenz für eine beliebige Kurve Γ zeigen. Wenn die ε-Kollokation stabil ist und wenn die rechte Seite y Riemann-integrierbar ist, dann konvergieren die Näherungslösungen x_n des Kollokationsverfahrens gegen die exakte Lösung der Gleichung (vgl. Lemma 3.3 und Abschnitt 1.1).

Folgerung 6.1: *Für $a, b \in \overline{PC}(\Gamma)$ und $A = aI + bS_\Gamma \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ ist die 0-Kollokation genau dann stabil, wenn für alle $t \in \Gamma$ entweder die Halbgerade $(-\infty, 0]$ den Kreisbogen K aus* (0.2) *nicht schneidet oder* $(-\infty, 0)$ *den Bogen K in zwei inneren Punkten schneidet.*

Beweis: Es sei $v = \frac{1}{2}(1 + \hat{x})$ und

$$K_1 = \{[d^{-1}c(t+0)\,\mu + (1-\mu)]/[\mu + c^{-1}d(t-0)\,(1-\mu)] : \mu \in [0, 1]\}.$$

Der Operator A^t ist offensichtlich genau dann invertierbar, wenn

$$\begin{aligned}&\left(P_{\Gamma_0}c(t-0)/d(t+0) + Q_{\Gamma_0}\right) A^t\left(a(t-0) + b(t-0)\,\hat{x}\right)^{-1} \\ &= P_{\Gamma_0}\{vd^{-1}c(t+0) + (1-v)]/[v + (1-v)\,c^{-1}d(t-0)]\} + Q_{\Gamma_0}\end{aligned} \tag{6.1}$$

im Raum Fl^p invertierbar ist. Aufgrund des Invertierbarkeitskriteriums aus Abschnitt 1.2 ist dies dann und nur dann der Fall, wenn der Koordinatenursprung nicht in das von K_1 und K eingeschlossene Gebiet G fällt. Aus der für alle ν und $\mu \in [0, 1]$ gültigen Äquivalenz der Beziehungen

$$\nu d^{-1}c(t+0) + (1-\nu)\,d^{-1}c(t-0) = -\mu^{-1}(1-\mu)$$

und

$$\begin{aligned}&\nu[d^{-1}c(t+0)\,\mu + (1-\mu)]/[\mu + (1-\mu)\,c^{-1}d(t-0)] \\ &+ (1-\nu)\,d^{-1}c(t-0) = 0\end{aligned}$$

folgt, daß $(-\infty, 0]$ die Strecke $S = \{\mu d^{-1}c(t+0) + (1-\mu)\,d^{-1}c(t-0) : \mu \in [0, 1]\}$ genau dann schneidet, wenn 0 zu dem von S und K_1 eingeschlossenen Gebiet gehört.

Falls $(-\infty, 0]$ die Strecke S schneidet, liegt 0 dann und nur dann in G, wenn $(-\infty, 0]$ den Bogen K in einem inneren Punkt schneidet. Falls $(-\infty, 0]$ die Strecke S nicht schneidet, liegt 0 wiederum genau dann in G, wenn $(-\infty, 0]$ den Bogen K in einem inneren Punkt schneidet ∎

Im Falle $\varepsilon = 1/2$ existiert kein Interpolationsprojektor mit dem Bildraum $S_n{}^d$. Es sei deshalb $(S_n{}^d)'$ der in der Parameterdarstellung um $(2n)^{-1}$ verschobene Spline-Raum, d. h. ψ gehört zu $(S_n{}^d)'$ genau dann, wenn ein $\varphi \in S_n{}^d$ mit $\psi(\gamma(s)) = \varphi(\gamma(s + (2n)^{-1}))$ für alle $s \in \mathbf{R}$ existiert. Wenn K_n' den durch $K_n'f \in (S_n{}^d)'$ und $(K_n'f)\left(\gamma((k + 1/2)/n)\right) = f\left(\gamma((k + 1/2)/n)\right)$ $(k = -r, \ldots, r)$ definierten Interpolationsprojektor bezeichnet, dann ist das Näherungssystem der 1/2-Kollokation äquivalent zu $K_n'Ax_n = K_n'y$. Analog wie in Abschnitt 1.1 erklärt man die Stabilität der Operatoren $K_n'A|_{S_n{}^d}$: $S_n{}^d \to (S_n{}^d)'$.

Satz 6.2: *Für $a, b \in \overline{PC}(\Gamma)$ und $A = aI + bS_\Gamma \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma))$ $(1 < p < \infty)$ ist die 1/2-Kollokation genau dann stabil, wenn für alle $t \in \Gamma$ entweder die Halbgerade $[0, \infty)$ den Kreisbogen K aus (0.2) nicht schneidet oder $(0, \infty)$ den Bogen K in zwei inneren Punkten schneidet.*

Beweis: Das durch $(\varphi_k{}^{(n)})'\left(\gamma(s)\right) = \varphi_k{}^{(n)}\left(\gamma(s + (2n)^{-1})\right)$ definierte Funktionssystem $\{(\varphi_k{}^{(n)})'\}_{k=0}^{n-1}$ ist eine Basis in $(S_n{}^d)'$. Analog zu (4.8) zeigt man, daß die Matrix von $K_n'A|_{S_n{}^d}$ bezüglich der Basen $\{\varphi_k{}^{(n)}\}$ und $\{(\varphi_k{}^{(n)})'\}$ die Gestalt $(\varrho'^{-1})_n{}^\wedge \{a_n(\varrho\sigma^{-1})_n{}^\wedge + b_n\} \hat{\sigma}_n$ besitzt, wobei ϱ und σ die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt 4 $(\varepsilon = 1/2)$ haben und ϱ' die in Abschnitt 3.3 mit $\varepsilon = 0$ eingeführte Funktion ist. Aus den Beweisen von Satz 6.1 und Folgerung 6.1 folgt die Behauptung ∎

6.2 Beim Galerkin-Verfahren mit Spline-Funktionen soll der Einfachheit halber der Fall $\Gamma = \Gamma_0$ betrachtet werden.

Satz 6.3: *Für $a, b \in C(\Gamma_0)$ und $A = aI + bS_{\Gamma_0} \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ $(1 < p < \infty)$ ist das Galerkin-Verfahren genau dann konvergent, wenn für alle $\lambda \in [-1, 1]$ und $\tau \in \Gamma_0$ die Bedingung $a(\tau) + b(\tau)\,\lambda \neq 0$ erfüllt ist.*

Beweis: Weil $y_n = L_ny \to y$ und $L_nAL_n \to A$ gilt, genügt es, die Stabilität der Folge $\{L_nA|_{S_n{}^d}\}$ zu untersuchen. Aufgrund von (4.9) muß nur die Stabilität der Folge $\{(\alpha^{-1})_n{}^\wedge (a_n + b_n\hat{\varkappa}_n)\,\hat{\alpha}_n\}$ gezeigt werden, wobei $\varkappa := \alpha^{-1}\beta$ gesetzt wird. Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun genau wie im Beweis von Satz 6.1 ∎

Analog zum vorigen Satz und Folgerung 6.1 zeigt man

Satz 6.4: *Die Funktionen $a, b \in PC(\Gamma_0)$ seien außerhalb der Menge $\left\{\exp\left(i\pi(2k + 1)/n_0\right) : k = 0, \ldots, n_0 - 1\right\}$ stetig, und es sei $d = 0$. Außerdem sollen nur solche Unterteilungen in n Teilintervalle und solche Spline-Räume $S_n{}^0$ betrachtet werden, für die n ein ungerades Vielfaches von n_0 ist. Dann ist das Galerkin-Verfahren für $A = aI + bS_{\Gamma_0} \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ $(1 < p < \infty)$ mit Ansatzfunktionen aus $S_n{}^0$ genau dann konvergent, wenn für alle $t \in \Gamma_0$ entweder die Halbgerade $(-\infty, 0]$ den Kreisbogen K aus (0.2) nicht schneidet oder $(-\infty, 0)$ den Bogen K in zwei inneren Punkten schneidet.*

Bemerkung 6.2: Wie man bereits im Falle der Multiplikationsoperatoren sehen kann, garantiert die Bedingung des letzten Satzes nicht die Konvergenz des Galerkin-Verfahrens mit Splines aus $S_n{}^d$ $(d > 0)$. Für diesen Fall erscheint es natürlich, analog zu [14] die verallgemeinerten Spline-Räume PS_d einzuführen. Es läßt sich zeigen, daß die Bedingung aus Satz 6.4 für die L^p-Konvergenz des Galerkin-Verfahrens mit Ansatzfunktionen sowohl aus $S_n{}^d$ als auch aus PS_d $(d > 0)$ notwendig ist. Im Falle $p = 2$ ist die Bedingung des Satzes 6.4, d. h.

$$\mu(d^{-1}c)\,(t + 0) + (1 - \mu)\,(d^{-1}c)\,(t - 0) \notin (-\infty, 0] \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma, \quad \mu \in [0, 1],$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für die L^2-Konvergenz des Galerkin-Verfahrens mit Ansatzfunktionen aus PS_d $(d \geqq 0)$ (siehe [14]).

6.3 Als letztes Verfahren soll die trigonometrische Kollokation betrachtet werden. Bei dieser Methode ist das Kollokationssystem äquivalent zu $M_n A x_n = M_n y$ (vgl. (5.5)).

Satz 6.5: *Für $c, d \in \overline{PC}(\Gamma_0)$ und $A = cP_{\Gamma_0} + dQ_{\Gamma_0} \in \mathcal{L}(L^p(\Gamma_0))$ $(1 < p < \infty)$ ist das trigonometrische Kollokationsverfahren genau dann stabil, wenn A und $A_{-1} = cQ_{\Gamma_0} + dP_{\Gamma_0}$ im Raum $L^p(\Gamma_0)$ invertierbar sind.*

Beweis: Es sei α die charakteristische Funktion des Kreisbogens von 1 nach -1 auf Γ_0 und $\beta = 1 - \alpha$. Dann besitzt $M_n P_{\Gamma_0}|_{T_n} = P_{\Gamma_0}|_{T_n}$ bezüglich $\{t^j\}_{j=-r}^{r}$ die Matrix α_n und bezüglich $\{\psi_k\}_{k=-r}^{r}$ die Matrix $\hat{\alpha}_n$. Der Operator $M_n A|_{T_n}$ hat bezüglich $\{\psi_k\}$ die Gestalt $c_n\hat{\alpha}_n + d_n\hat{\beta}_n$, und aus Lemma 5.1 folgt die Behauptung (vgl. (2.2)) ∎

Die Bemerkung 6.1 gilt auch für die trigonometrische Kollokation.

Alle Resultate dieser Arbeit, die sich auf Näherungsverfahren für den Operator $A = aI + bS_\Gamma$ beziehen, lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Operatoren der Form $A + T$ übertragen, wobei T kompakt ist. Außerdem können mit der benutzten Technik auch Systeme von singulären Integralgleichungen betrachtet werden. Aus Lemma 5.1 lassen sich auch Stabilitätskriterien für die Teilgebietsmethode (vgl. [6]) oder für Quadraturformelmethoden ableiten. Unter Ausnutzung der Approximationseigenschaft und der inversen Eigenschaft für Spline-Funktionen bzw. trigonometrische Polynome erhält man die Stabilität der Verfahren in bestimmten Sobolev-Räumen sowie asymptotische Konvergenzabschätzungen (vgl. [2, 18]).

LITERATUR

[1] ARNOLD, D. N.: A spline-trigonometric Galerkin method and an exponentionally convergent boundary integral method. Math. Comp. **41** (1983), 383–397.

[2] ARNOLD, D. N., and W. L. WENDLAND: The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves. Numer. Math. **46** (1985), 317–341.

[3] AUBIN, J.-P.: Approximation of elliptic boundary value problems. New York—London—Sidney—Toronto: Wiley-Interscience 1972.

[4] DE BOOR, C.: A bound on the L_∞-norm of L_2-approximation by splines in terms of a global mesh ratio. Math. Comp. **30** (1976), 765–771.

[5] DE BOOR, C.: The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory. In: Approximation theory. Proc. Int. Symp., Austin 1973 (Ed.: G. G. LORENTZ). New York—London: Academic Press 1973.

[6] ELSCHNER, J., PRÖSSDORF, S., RATHSFELD, A., and G. SCHMIDT: Spline approximation of singular integral equations. Demonstratio Math. **18** (1985), 661–667.

[7] ELSCHNER, J., and G. SCHMIDT: On spline interpolation in periodic Sobolev spaces. Preprint P-Math-01/83. Berlin: Akad. Wiss. 1984.

[8] GOCHBERG, I. Z., und I. A. FELDMAN: Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung. Berlin: Akademie-Verlag 1974.

[9] GOHBERG, I., und N. KRUPNIK: Einführung in die Theorie der eindimensionalen singulären Integraloperatoren. Basel—Boston—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1979.

[10] JUNGHANNS, P.: Kollokationsverfahren zur näherungsweisen Lösung singulärer Integralgleichungen mit unstetigen Koeffizienten. Math. Nachr. **102** (1981), 17–24.

[11] JUNGHANNS, P., and B. SILBERMANN: Local theory of the collocation method for the approximate solution of singular integral equations. Int. Equ. Op. Theory **7** (1984), 791–807.

[12] NEUMARK, M. A.: Normierte Algebren. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1959 (2., überarbeitete Auflage in Vorbereitung).

[13] PRÖSSDORF, S., and A. RATHSFELD: A spline collocation method for singular integral equations with piecewise continuous coefficients. Int. Equ. Op. Theory **7** (1984), 537–560.

[14] PRÖSSDORF, S., and A. RATHSFELD: On spline Galerkin methods for singular integral equations with piecewise continuous coefficients. Numer. Math. **48** (1986), 99–118.

[15] Prössdorf, S., and G. Schmidt: A finite element collocation method for singular integral equations. Math. Nachr. **100** (1981), 33–60.
[16] Prössdorf, S., und B. Silbermann: Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen (Teubner-Text zur Mathematik: Bd. 12). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977.
[17] Rathsfeld, A.: Reduktionsverfahren für singuläre Integralgleichungen mit stückweise stetigen Koeffizienten. Math. Nachr. **127** (1986), 125–143.
[18] Schmidt, G.: On ε-collocation for pseudodifferential equations on a closed curve. Math. Nachr. **126** (1986), 183–196.
[19] Schmidt, G.: On spline collocation methods for boundary integral equations in the plane. Math. Meth. in Appl. Sci. **7** (1985), 74–89.
[20] Schmidt, G.: The Convergence of Galerkin and Collocation Methods with Splines for Pseudodifferential Equations on Closed Curves. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 371–384.
[21] Triebel, H.: Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin: Dt. Verlag Wiss./Amsterdam–New York–Oxford: North-Hollaud Publ. Comp. 1978.
[22] Wendland, W. L.: On the spline approximation of singular integral equations and one-dimensional pseudo-differential equations on closed curves. In: Numerical solution of singular integral equations. Proc. IMACS Int. Symp. Lehigh Univ. Bethlehem, Pennsylvania (USA), June 21–22, 1984 (Eds: A. Gerasoulis and R. Vichnevetsky).
[23] Zygmund, A.: Trigonometric Series, Vol. II. Cambridge: University Press 1959.

Manuskripteingang: 01. 07. 1985, in revidierter Fassung 24. 04. 1986

VERFASSER:

Prof. Dr. S. Prössdorf und A. Rathsfeld
Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik
der Akademie der Wissenschaften
Mohrenstr. 39
DDR-1086 Berlin