Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 6 (6) 1987, S. 575 – 582

Dissipativität und globale Stabilität des komplexen Lorenz-Systems

G. A. Leonov und V. Reitmann

Für das komplexe Lorenz-System werden mit der Methode der Ljapunov-Funktionen die Dissipativität und die globale Asymptotik der Lösungen bei bestimmten Parametern gezeigt.

Для комплексной системы Лоренца методом функций Ляпунова доказываются диссипативность и глобальная устойчивость решений при определённых параметрах.

Using Liapunov functions it is shown that the complex Lorenz-System is dissipative and has a global asymptotic for some parameters.

1. Einleitung

Für die Untersuchung der Ausbreitung von Wellen mit Dispersion in instabilen Systemen wird in [3] ein Zugang von Stuart [4] angewandt, der auf der Störungsrechnung und der Methode der unterschiedlichen Skalierungen beruht. Im Ergebnis dieser Vorgehensweise erhält man die *AB-Gleichungen*, d. h. ein System von Differentialgleichungen für die komplexwertige Größe A (*Amplitude*), und die reellwertige Größe B (*Korrekturterm*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2A}{dT^2} + \Delta_1 \frac{dA}{dT} &= \alpha_1 A - \beta_1 AB, \\ \frac{dB}{dT} + \Delta_2 B &= \left(\frac{d}{dT} + \Delta_3\right) |A|^2, \end{aligned}\right\}$$

wobei Δ_1, α_1 komplexe und Δ_2, Δ_3, β_1 reelle Parameter sind. Wie in [3] gezeigt wurde, entsteht durch einfache Transformation aus den AB-Gleichungen das System

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = -xz + rx - ay, \quad \dot{z} = -bz + \frac{1}{2}(x^*y + xy^*), \tag{1}$$

das man als eine komplexe Verallgemeinerung der bekannten Lorenz-Gleichungen der konvektiven Turbulenz [6, 8, 9] auffassen kann. In ihm sind σ, b positive und $a = 1 - ie$, $r = r_1 + ir_2$ ($e, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$) komplexe Parameter; w^* bezeichnet die zu w konjugiert komplexe Zahl.

Ausgehend von der zweiten der AB-Gleichungen bestimmt die dritte Gleichung von (1) die reelle Größe z ($z = cB$, c reelle Konstante), während die Größen x und y im allgemeinen komplex sind. Damit handelt es sich bei (1) um die komplexe Schreibweise eines Systems von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen. Die globale Existenz der Lösungen von (1) auf $(0, +\infty)$ ergibt sich durch Verwendung der im weiteren angegebenen Ljapunov-Funktionen für alle in Frage kommenden Parameter σ, b, a und r. Setzt man in (1) $r_2 = e = 0$ und verwendet reelle Anfangsbedingungen, so erhält man die *reellen* Lorenz-Gleichungen, für die numerisch bei bestimmten Parametern ein *seltsamer Attraktor* (d. h. eine anziehende Menge im Phasenraum von (1), die nur aus instabilen Trajektorien besteht) gefunden wurde [6, 8, 9]. Auf das reelle Lorenz-System kommt man direkt, wenn man zur Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichungen, die die Bewegung einer Flüssigkeit bei Vorhandensein eines konstanten Temperaturkoeffizienten in der Boussinesq-Näherung beschreiben, einen Ansatz mit Galerkinschen Koordinatenfunktionen durchführt [8].

Wesentliche Eigenschaften des Systems (1) lassen sich durch das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtszustände charakterisieren. Für $\operatorname{Im}(r-a) \neq 0$ sowie $\operatorname{Im}(r-a) = 0$ und $\operatorname{Re}(r-a) \leqq 0$ existiert nur $(0, 0, 0)$ als Gleichgewichtszustand. Für $\operatorname{Im}(r-a) = 0$ und $\operatorname{Re}(r-a) > 0$ kommt außerdem ein Kontinuum von Gleichgewichtszuständen $(H, H, |H|^2/b)$ mit komplexem H und $|H|^2 = b(r_1 - 1)$ hinzu. Im reellen System (1) existiert dagegen bei $0 < r \leqq 1$ nur der Gleichgewichtszustand $(0, 0, 0)$, während bei $r > 1$ noch die beiden Gleichgewichtszustände $\left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$ vorhanden sind. In der vorliegenden Arbeit werden zur Untersuchung der Stabilität dieser Gleichgewichtszustände sowie der Dissipativität des Systems (1) Ljapunov-Funktionen eingesetzt. Es wird nachgewiesen, daß bei beliebigen zulässigen Parametern eine kompakte Menge im Phasenraum existiert, in die alle Trajektorien des Systems gelangen und dort verbleiben. Gleichgewichtslagen, Grenzzyklen, Separatrixschlingen bzw. seltsamer Attraktor liegen, soweit vorhanden, in dieser Menge. Darüber hinaus werden Bedingungen formuliert, bei denen von den genannten Objekten nur Gleichgewichtslagen existieren können. Damit können Ergebnisse, die für das reelle Lorenz-System mit Ljapunov-Funktionen gewonnen wurden [1, 7, 8], teilweise verschärft und auf das komplexe System übertragen werden.

Die in der Arbeit vorkommenden Stabilitätsbegriffe sind in der Literatur üblich. Der Vollständigkeit halber führen wir die entsprechenden Definitionen hier an. Wir betrachten dazu das autonome Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

mit einer Funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, für die die Lösung $x(\cdot\,; x_0)$ mit $x(0; x_0) = x_0$ für beliebige $x_0 \in \mathbf{R}^n$ und $t > 0$ existieren soll. Wie bereits festgestellt wurde, läßt sich bei fixierten Parametern σ, b, a und r das System (1) als System (2) im $\mathbf{R}^5$ auffassen. Im weiteren bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm im $\mathbf{R}^n$.

Definition 1 [10]: Das System (2) heißt *dissipativ* (nach Levinson), wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so daß für jede seiner Lösungen $x(\cdot\,; x_0)$ ein Zeitpunkt $T(x_0) \geqq 0$ mit $\|x(t; x_0)\| \leqq K$ für alle $t \geqq T(x_0)$ existiert.

Definition 2 [2]: Das System M aller Gleichgewichtszustände von (2), d. h. solcher $c \in \mathbf{R}^n$, für die $f(c) = 0$ ist, heißt *stationäre Menge*. Das System (2) nennen wir *global asymptotisch stabil*, wenn für jede seiner Lösungen $x(\cdot\,; x_0)$ ein $c \in M$ mit $\|x(t; x_0) - c\| \to 0$ für $t \to \infty$ existiert.

Definition 3 [12]: Wir sagen, daß die stationäre Menge M des Systems (2) ein *globaler Attraktor* ist, wenn für jede seiner Lösungen $x(\cdot\,; x_0)$ die Beziehung $\varrho(x(t; x_0), M) \to 0$ für $t \to \infty$ gilt, wobei $\varrho(y, M)$ den Abstand des Punktes $y \in \mathbf{R}^n$ zur Menge M bezeichnet.

In [2] wird das System (2), dessen stationäre Menge ein globaler Attraktor ist, ein *System mit globaler Asymptotik* genannt.

2. Dissipativität und globale asymptotische Stabilität

Es ist gut bekannt (siehe z. B. [1, 11]), daß das reelle Lorenz-System (1) bei beliebigen $\sigma > 0$, $r > 0$ und $b > 0$ dissipativ ist. Im folgenden wird die Dissipativität auch für das komplexe System (1) gezeigt und der Nachweis der globalen asymptotischen Stabilität für $|r + 1| < 2$ erbracht. Es soll hier vermerkt werden, daß für das System (1), das die Laser-Dynamik beschreibt, die globale asymptotische Stabilität dem Arbeitsregime des physikalischen Systems entspricht [11]. Aussagen, die diese Stabilitätsart charakterisieren, sind deshalb von praktischem Interesse. Die beim Nachweis der entsprechenden Aussagen verwendeten Ljapunov-Funktionen sind Verallgemeinerungen der in [1, 7, 8] benutzten quadratischen Formen.

Satz 1: *Es sei* $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$, *und es mögen Zahlen* $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\gamma > 0$ *und* Θ *mit*

$$\gamma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4}|\sigma + \gamma r - \Theta|^2 \geqq 0 \tag{3}$$

existieren. Ferner seien gegeben die Zahlen

$$\Gamma = \frac{\Theta^2(b - 2\lambda)^2}{8\lambda\gamma(b - \lambda)} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\Theta^2}{\gamma(1 + \gamma)}\left(\frac{(b - 2\lambda)^2}{4\lambda(b - \lambda)} + 1\right) \tag{4}$$

und die Funktion

$$W: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad W(x, y, z) = \frac{1}{2}[|x|^2 + \gamma(|y|^2 + z^2)] - \Theta z.$$

Dann existiert für eine beliebige Lösung (x, y, z) *von* (1) *und beliebiges* $\delta > 0$ *ein Zeitpunkt* $T = T(\delta, x(0), y(0), z(0))$, *so daß für alle* $t \geqq T$ *gilt*

$$W(x(t), y(t), z(t)) \leqq \Gamma + \delta \tag{5}$$

und

$$|x(t)|^2 < \alpha + 4\delta/(1 + \gamma). \tag{6}$$

Bevor wir zum Beweis vom Satz 1 kommen, wollen wir einige Folgerungen und Bemerkungen einfügen.

Folgerung 1: *Das System* (1) *ist dissipativ.*

Beweis: Offenbar läßt sich immer ein $\gamma > 0$ so wählen, daß $\gamma\sigma - 4^{-1}\gamma^2 r_2^2 > 0$ gilt. Nun setzen wir $\Theta = \sigma + \gamma r_1$. Dann geht (3) in $\gamma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - 4^{-1}\gamma^2 r_2^2 \geqq 0$ über. Dies ist erfüllt, wenn $\lambda > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Die Dissipativität von (1) folgt dann daraus, daß die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R}: W(x, y, z) \leqq \text{const}\}$ kompakt und für eine beliebige Lösung die Ungleichung (5) erfüllt ist ∎

Folgerung 2: *Es sei* $|r + 1| < 2$. *Dann ist das System* (1) *global asymptotisch stabil.*

Beweis: Mit $\gamma = \sigma$ und $\Theta = 0$ geht (3) in $\sigma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - 4^{-1}\sigma^2|r + 1|^2 \geqq 0$ über. Wegen $|r + 1|^2 < 4$ ist dies erfüllt, wenn $\lambda > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Aus (4) erhalten wir mit den gewählten Parametern $\Gamma = \alpha = 0$, so daß sich aus (5) und $\Theta = 0$ die Behauptung ergibt ∎

Bemerkung 1: Bei $|r + 1| < 2$ existiert nur $(0, 0, 0)$ als Gleichgewichtszustand im System (1). Falls r, a reell und $r > 0$ ist, erhalten wir aus Folgerung 2 die bekannte Aussage, daß bei $0 < r < 1$ und beliebigen $\sigma > 0$ und $b > 0$ das reelle Lorenz-System global asymptotisch stabil ist [1, 11].

Bemerkung 2: Für $r = r_1 + ir_2$ mit $r_1 > r_{1c} := 1 + (e + r_2)(e - \sigma r_2)/(\sigma + 1)^2$ existiert immer ein Grenzzyklus [3]

$$x(t) = H\exp(i\omega t), \qquad y(t) = \left(1 + \frac{i\omega}{\sigma}\right)H\exp(i\omega t), \qquad z(t) = |H|^2 b^{-1} \quad (t > 0)$$

mit $\omega = \sigma(e + r_2)/(\sigma + 1)$, und $H \in \mathbf{C}$ beliebig mit $|H|^2 = b(r_1 - r_{1c})$. Für $e + r_2 = 0$ geht dieser in das oben beschriebene Kontinuum von Gleichgewichtszuständen über. Durch einfache Umformungen läßt sich auch unabhängig vom Satz 1 zeigen, daß für beliebiges $r = r_1$

$+ ir_2 \in \mathbf{C}$ mit $r_1 > r_{1c}$ ($\sigma > 0$ beliebig) $|r + 1| \geqq 2$ gilt, d. h., daß die Voraussetzung in Folgerung 2 nicht erfüllt ist. Betrachtet man nun wie in [3] $\sigma = 2$, $b = 0{,}8$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$ und $e = 3$, so ergibt sich für die x-Koordinate des Grenzzyklus $|x(t)|^2 \leqq 0{,}44$ für alle $t > 0$. Satz 1 liefert eine Abschätzung der x-Koordinate des Gebietes im Phasenraum, in dem sich der Grenzzyklus befindet. Wir wählen dazu $\lambda = 0{,}4$, $\Theta = 3$ und $\gamma = 1{,}4$ und erhalten aus (6) für eine beliebige Lösung (x, y, z) des Systems (1) die Ungleichung $\limsup |x(t)|^2 \leqq 2{,}67$ für $t \to \infty$. In [3] wurde bei $r_2 \approx 0{,}1$ ein Übergang zum chaotischen Verhalten der Lösungen des Systems (1) registriert. Aus Folgerung 2 ergibt sich, daß dies nur bei $|r + 1| \geqq 2$ möglich ist.

Beweis von Satz 1: Für eine beliebige Lösung (x, y, z) von (1) gilt für alle $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} W\big(x(t), y(t), z(t)\big) + 2\lambda W\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\
&= -(\sigma - \lambda)\,|x(t)|^2 - \gamma(1 - \lambda)\,|y(t)|^2 - \gamma(b - \lambda)\,z^2(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sigma + \gamma r^* - \Theta)\,x^*(t)\,y(t) + \frac{1}{2}(\sigma + \gamma r - \Theta)\,x(t)\,y^*(t) + \Theta(b - 2\lambda)\,z(t) \\
&\leqq -\gamma(b - \lambda)\,z^2(t) + \Theta(b - 2\lambda)\,z(t) \leqq 2\lambda\Gamma.
\end{aligned} \tag{7}$$

In der Tat, die vorletzte Ungleichung hierin ist erfüllt, weil mit den Voraussetzungen des Satzes immer

$$\begin{aligned}
&-(\sigma - \lambda)\,|x|^2 - \gamma(1 - \lambda)\,|y|^2 + \frac{1}{2}(\sigma + \gamma r^* - \Theta)\,x^* y \\
&+ \frac{1}{2}(\sigma + \gamma r - \Theta)\,x y^* \leqq 0
\end{aligned}$$

für alle komplexen x und y gilt, und die Richtigkeit der letzten Ungleichung ergibt sich aus der Wahl von Γ in (4). Aus (7) folgt durch Umstellung $d(W - \Gamma)/dt + 2\lambda \times (W - \Gamma) \leqq 0$. Integriert man diese Ungleichung entlang der Lösung von (1), so erhält man

$$W\big(x(t), y(t), z(t)\big) \leqq \Gamma + \left[W\big(x(0), y(0), z(0)\big) - \Gamma\right] e^{-2\lambda t}$$

für alle $t > 0$, woraus sofort (5) folgt.

Wir beweisen nun für alle t aus dem Gültigkeitsbereich von (5), für die

$$|x(t)|^2 \geqq \alpha + 4\delta/(1 + \gamma) \tag{8}$$

ist, die Ungleichung

$$d\,|x(t)|^2/dt < 0. \tag{9}$$

Dazu nehmen wir an, dies sei nicht so. Dann gibt es ein t, mit dem die Ungleichungen (5) und (8) erfüllt sind und für das $d\,|x(t)|^2/dt \geqq 0$ ist. Letzteres bedeutet $\dot{x}(t)\,x^*(t) + x(t)\,\dot{x}^*(t) \geqq 0$, woraus sich wegen (1) $-2\sigma\,|x(t)|^2 + \sigma\big(x^*(t)\,y(t) + x(t)\,y^*(t)\big) \geqq 0$ bzw.

$$\frac{1}{2}\big(x^*(t)\,y(t) + x(t)\,y^*(t)\big) \geqq |x(t)|^2 \geqq \alpha + 4\delta/(1 + \gamma) \tag{10}$$

ergibt. Aus der offensichtlichen Ungleichung $(x - y)\,(x - y)^* \geqq 0$ für alle $x, y \in \mathbf{C}$ folgt $|x(t)|^2 + |y(t)|^2 \geqq x(t)\,y^*(t) + x^*(t)\,y(t)$. Hieraus und aus (10) ergibt sich $|y(t)|^2 \geqq |x(t)|^2 \geqq \alpha + 4\delta/(1 + \gamma)$. Benutzen wir dies und außerdem noch α aus (4), so erhalten wir

$$W\big(x(t), y(t), z(t)\big) \geqq \frac{1}{2}\left[\alpha(1+\gamma) + 4\delta + \gamma\left(z(t) - \frac{\Theta}{\gamma}\right)^2 - \frac{\Theta^2}{\gamma}\right]$$

$$\geqq \frac{1}{2}\left[\alpha(1+\gamma) - \frac{\Theta^2}{\gamma}\right] + 2\delta > \Gamma + \delta.$$

Diese Ungleichung widerspricht (5). Damit ist (9) bewiesen.

Genügt die Lösung (x, y, z) von (1) der Ungleichung (5), so gibt es demnach zwei Möglichkeiten:

a) Für ein $t_1 \geqq T$ ist $|x(t_1)|^2 < \alpha + 4\delta/(1+\gamma)$. Dann bleibt eine solche Ungleichung auch für alle $t \geqq t_1$ erhalten. Im anderen Falle würde ein $t_2 > t_1$ existieren, so daß $|x(t_2)|^2 = \alpha + 4\delta/(1+\gamma)$ ist und (9) gilt. Diese Situation ist aber nicht möglich.

b) Für alle $t \geqq T$ ist $|x(t)|^2 > \alpha + 4\delta/(1+\gamma)$ und folglich (9) erfüllt. Da aber die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\,|x(t)|^2 = -2\sigma\,|x(t)|^2 + \sigma\big(x^*(t)\,y(t) + x(t)\,y^*(t)\big)$$

gilt und die Trajektorie wegen (5) einer kompakten Menge angehört, gibt es ein $\varrho > 0$, so daß (9) die stärkere Ungleichung $d\,|x(t)|^2/dt < -\varrho$ für alle $t \geqq T$ impliziert. Dies ist auch nicht möglich, da $|x(t)|^2 \to -\infty$ für $t \to +\infty$ folgen würde ∎

3. Kontinuum von Gleichgewichtszuständen

Bei $r = 1$ verliert im reellen Lorenz-System der Koordinatenursprung seine globale Stabilität, und es entstehen zwei weitere Gleichgewichtszustände. Für $r_1 > r_{1c}$ existiert im komplexen Lorenz-System immer ein Grenzzyklus, der in ein Kontinuum von Gleichgewichtszuständen ausarten kann. Es ist deshalb von Interesse zu untersuchen, wann das Lorenz-System bezüglich der Gesamtheit der Gleichgewichtszustände stabil ist. Für diese Situation werden im Satz 2 hinreichende Bedingungen formuliert. Dieser Satz gestattet außerdem für feste σ und b die Angabe von Bereichen für r, in denen globale asymptotische Stabilität vorliegt, also kein seltsamer Attraktor im (reellen) Lorenz-System auftreten kann. In [1, 7] wird analytisch die globale asymptotische Stabilität des reellen Lorenz-Systems für $r > 1$ untersucht. Der folgende Satz 2 verschärft in seiner Einschränkung auf den reellen Fall diese Ergebnisse und überträgt sie auf das komplexe System (1). Er verallgemeinert auch das Ergebnis von V. I. Yudovich (formuliert in [1]), daß das reelle System (1) mit $2\sigma - b < 0$ global asymptotisch stabil ist.

Satz 2: *Es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) $\operatorname{Im}(r - a) = 0$ *und* $\operatorname{Re}(r - a) > 0$.

(ii) $2\sigma - b \neq 0$. *Falls* $2\sigma - b > 0$ *ist, so wird* $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$ *gesetzt, und es mögen dann Zahlen* $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\gamma > 0$ *und* Θ *existieren mit* (3) *und*

$$\frac{1}{\gamma(1+\gamma)}\,\Theta^2\left[\frac{(b-2\lambda)^2}{4\lambda(b-\lambda)} + 1\right] < \frac{b^2(\sigma+1)}{2\sigma - b}. \tag{11}$$

Dann ist die stationäre Menge des Systems (1) *ein globaler Attraktor.*

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, stellen wir noch eine Hilfsaussage bereit. Wir setzen voraus, daß die Bedingung (i) von Satz 2 erfüllt ist, und führen folgende Variablentransformation durch, die der von V. I. Yudovich für das reelle

System (1) benutzten [1] analog und in der $\varepsilon > 0$ ist:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma}}\,x, \qquad u = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}\,(y - x), \qquad q = \varepsilon^2\left(z - \frac{|x|^2}{b}\right),$$
$$t_{\text{neu}} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon}\,t_{\text{alt}}, \qquad \varepsilon = (r - a)^{-1/2}. \tag{12}$$

Das System (1) geht dann in das folgende System über:

$$\dot\eta = u, \qquad \dot u = -\mu u - q\eta - \varphi(\eta), \qquad \dot q = -Rq - \frac{S}{2}\,(\eta u^* + \eta^* u). \tag{13}$$

Dabei ist $\varphi(\eta) = -\eta + \beta\eta\,|\eta|^2$ für alle $\eta \in \mathbf{C}$, und es gilt

$$\mu = \frac{\varepsilon(a + \sigma)}{\sqrt{\sigma}}, \qquad \beta = \frac{2\sigma}{b}, \qquad R = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{\sigma}}, \qquad S = \frac{2}{b}\,(2\sigma - b).$$

Auf Grund der getroffenen Voraussetzungen sind $\beta > 0$, $R > 0$ und S reell, während μ i.a. komplex ist. Deshalb ist q immer reell; η und u können komplex sein. Das System (13) hat gegenüber dem Ausgangssystem (1) den Vorteil, daß sich für dieses relativ leicht eine Ljapunov-Funktion vom Typ „Quadratische Form + Integral von der Nichtlinearität" angeben läßt.

Lemma: *Gegeben sei für beliebige $\beta > 0$ und $S \neq 0$ aus* (13) *die Funktion V: $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit*

$$V(\eta, u, q) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|S|}\,q^2 + |u|^2 - |\eta|^2 + \frac{\beta}{2}\,|\eta|^4\right). \tag{14}$$

Falls $S > 0$ ist, möge ein $\varepsilon_1 > 0$ existieren, so daß sich für eine beliebige Lösung (η, u, q) von (13) *ein $t_0 = t_0\big(\eta(0), u(0), q(0)\big)$ angeben läßt mit*

$$|\eta(t)|^2 \leqq \frac{R}{S}\,\mathrm{Re}\,\mu - \varepsilon_1 \quad \textit{für alle } t \geqq t_0. \tag{15}$$

Dann gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß für die Ableitung dV/dt entlang einer beliebigen Lösung (η, u, q) von (13) *ein $t_1 = t_1\big(\eta(0), u(0), q(0)\big) > 0$ mit*

$$\frac{d}{dt}\,V\big(\eta(t), u(t), q(t)\big) \leqq -\delta_1\big(q^2(t) + |u(t)|^2\big) \quad \textit{für alle } t \geqq t_1 \tag{16}$$

existiert.

Beweis: Wie man leicht sieht, ist entlang einer beliebigen Lösung (η, u, q) von (13) für alle $t > 0$

$$\frac{d}{dt}\,V\big(\eta(t), u(t), q(t)\big) = -\frac{R}{|S|}\,q^2(t) - \frac{1}{2}\,(\operatorname{sign} S + 1)\,\eta(t)\,q(t)\,u^*(t)$$
$$-\frac{1}{2}\,(\operatorname{sign} S + 1)\,\eta^*(t)\,q(t)\,u(t) - \mathrm{Re}\,\mu\,|u(t)|^2.$$

Wegen $R > 0$ und $\mathrm{Re}\,\mu = \varepsilon(1 + \sigma)\,\sigma^{-1/2} > 0$ gilt die Aussage des Lemmas sofort für $S < 0$, da dann die gemischten Produkte in dV/dt nicht vorkommen. Es sei nun

$S > 0$. Wir betrachten die von $t > 0$ abhängige Form F_t: $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}$,

$$F_t(q, u) = -\frac{R}{S} |q|^2 - \eta(t)\, qu^* - \eta^*(t)\, q^*u - \operatorname{Re} \mu\, |u|^2,$$

und fordern die Existenz eines $\delta_1 > 0$, so daß es für das η einer beliebigen Lösung (η, u, q) von (13) ein $t_0 = t_0(\eta(0), u(0), q(0))$ mit $F_t(q, u) \leqq -\delta_1(|q|^2 + |u|^2)$ für alle $q, u \in \mathbf{C}$ und $t \geqq t_0$ gibt. Dafür sind die Bedingungen $R/S > 0$ und (15) hinreichend ∎

Beweis von Satz 2: Wegen der gestellten Bedingungen gilt für eine beliebige Lösung (x, y, z) von (1) die Ungleichung (6). Anstelle von $x(t)$ setzen wir in (6) wegen (12) $x(t) = \sqrt{2\sigma}\, \varepsilon^{-1}\eta(t)$ und erhalten für $S > 0$ die Beziehung

$$|\eta(t)|^2 < (\varepsilon^2/2\sigma)\, \alpha + 2\delta\varepsilon^2/(1 + \gamma)\, \sigma \quad \text{für alle} \quad t \geqq t_0,$$

wobei $t_0 > 0$ hinreichend groß ist. Um (15) zu gewährleisten, ist die Ungleichung $\varepsilon^2\alpha/2\sigma < (R/S) \operatorname{Re} \mu$ hinreichend. Die Bedingung (11) erhält man dann, wenn in dieser Ungleichung anstelle von R, S, α und μ die Größen aus (4), (12) und (13) gesetzt werden.

Es bezeichne $\bar{x}(\cdot\,; \bar{x}_0)$ eine Lösung (x, y, z) von (1), für die $\bar{x}(0; \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ ist. Weiter sei $V_1: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Funktion, die aus (14) bei der Variablentransformation (12) entsteht. Die Ableitung $dV_1(\bar{x}(t; \bar{x}_0))/dt$ ist wegen (16) nichtpositiv und $V_1(\bar{x}(\cdot\,; \bar{x}_0))$ nach Satz 1 auf $(0, +\infty)$ beschränkt. Folglich existiert ein endlicher Grenzwert $\lim V_1(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) = L$ für $t \to +\infty$. Wegen der Beschränktheit der Lösung $\bar{x}(\cdot\,; \bar{x}_0)$ ist die Menge Ω ihrer ω-Grenzpunkte nicht leer. Es sei $\bar{y} \in \Omega$ und $\bar{x}(\cdot\,; \bar{y})$ eine Lösung von (1) mit dem Anfangszustand $\bar{y}$. Bekanntlich [2] gilt dann $\bar{x}(t; \bar{y}) \in \Omega$ und folglich auch $V_1(\bar{x}(t; \bar{y})) = L$ für $t > 0$. Der Lösung $\bar{x}(\cdot\,; \bar{y})$ mögen die Funktionen $\eta(\cdot\,; \bar{y})$, $u(\cdot\,; \bar{y})$, $q(\cdot\,; \bar{y})$ laut (12) entsprechen. Wegen (16) ist $q(t; \bar{y}) = 0$ und $u(t; \bar{y}) = 0$ für $t > 0$. Aus der ersten Gleichung von (13) ergibt sich $\eta(t; \bar{y}) = \text{const}$ für $t > 0$. Wegen (12) ist $\bar{x}(t; \bar{y}) = \text{const}$ für $t > 0$, und folglich ist Ω in der Menge der Gleichgewichtszustände des Systems (1) enthalten. Der weitere Beweis des Satzes verläuft wie in [2] ∎

Beispiel: Bekanntlich fand E. N. Lorenz [8] im reellen System (1) bei $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ numerisch einen seltsamen Attraktor. Er verwendete dabei einen standardmäßigen 4-Punkte-Runge-Kutta-Algorithmus mit der Schrittweite $h = 0{,}001$. Satz 1 liefert Abschätzungen für das Gebiet im Phasenraum von (1) mit den genannten Parametern, in dem sich der seltsame Attraktor befindet: Unmittelbares Einsetzen in (3) zeigt, daß sich bei den Werten $\lambda = 0{,}47$, $\gamma = 0{,}025$ und $\Theta = 11{,}4$ der seltsame Attraktor in einem Gebiet befindet, das laut (5) durch das Ellipsoid $2^{-1}[x^2 + 0{,}025(y^2 + z^2)] - 11{,}4z = 1\,876{,}44$ begrenzt wird. Wir lassen wie oben $\sigma = 10$, $b = 8/3$ und wollen nun mit Satz 2 Parameterwerte $r > 1$ ermitteln, bei denen globale asymptotische Stabilität vorliegt, also kein seltsamer Attraktor im System (1) auftreten kann. Dazu setzen wir $\lambda = 0{,}4$, $\gamma = 5{,}38$ und $\Theta = 8{,}88$. Die Voraussetzungen von Satz 2 sind mit diesen Werten für $r < 1{,}86$ erfüllt. Die numerisch ermittelte Grenze der globalen asymptotischen Stabilität für $\sigma = 10$, $b = 8/3$ liegt laut [6] bei $r \approx 13{,}926$. Die Auswahl von λ, γ und Θ kann im vorliegenden Beispiel durch den Einsatz numerischer Verfahren noch verbessert werden.

LITERATUR

[1] Белых, В. Н.: Качественные методы нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Учебное пособие. Горький: Из-во Горьк. ун-та 1980.

[2] Гелиг, А. Х., Леонов, Г. А., и В. А. Якубович: Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Москва: Из-во Наука 1978.

[3] Gibbon, J. D.: Dispersive Instabilities in Nonlinear Systems: The real and complex Lorenz equation. In: Chaos and Order in Nature (ed.: H. Haken). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1981, p. 92—101.

[4] ДЖОЗЕФ, Д.: Устойчивость движений жидкости. Москва: Из-во Мир 1981.
[5] HAKEN, H.: Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. Physics Letters **A 53** (1975), 77–81.
[6] ЙОРКЕ, Дж., и Е. ЙОРКЕ: Метастабильный хаос: Переход к устойчивому хаотическому поведению в модели Лоренца. В кн.: Странные аттракторы (пер. с англ./ под ред. Я. Г. СИНАЯ и Л. П. ШИЛЬНИКОВА). Москва: Из-во Мир 1981, 193–212.
[7] ЛЕОНОВ, Г. А.: О глобальной устойчивости системы Лоренца. Прикл. мат. мех. **47** (1983), 869–871.
[8] LORENZ, E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow. J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.
[9] MARSDEN, J. E., and M. McCRACKEN: The Hopf bifurcation and its applications (Lect. Notes in Appl. Math. Sci.: Vol. 18). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1976.
[10] ПЛИСС, В. А.: Нелокальные проблемы теории колебаний. Москва—Ленинград: Из-во Наука 1964.
[11] РАБИНОВИЧ, М. И.: Стохастические автоколебания и турбулентность. Успехи физ. наук **125** (1978), 123–168.
[12] ХЕЙЛ, Дж.: Теория функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Из-во Мир 1984.

Manuskripteingang: 16. 01. 1984; in revidierter Fassung 08. 07. 1986

VERFASSER:

Prof. Dr. GENNADIJ ALEKSEEVIČ LEONOV
Mathematisch-Mechanische Fakultät der Staatlichen Universität
Universitetskaja nab. 7/9
UdSSR - 190000 Leningrad

Dr. VOLKER REITMANN
Sektion Mathematik der Technischen Universität
Mommsenstr. 13
DDR - 8027 Dresden