

Gleichgewichtsfiguren magnetischer Flüssigkeiten

K. BEYER

Herrn Prof. Dr. Paul Günther zum 60. Geburtstag gewidmet

Es werden Gleichgewichtsfiguren magnetischer Flüssigkeitstropfen unter dem Einfluß eines Magnetfeldes und der Oberflächenspannung untersucht. Nachgewiesen werden Existenz und Unität derartiger Figuren in Kugelnähe bei hinreichend schwachem Außenfeld.

Исследуются равновесные фигуры капли магнитной жидкости под влиянием магнитного поля и поверхностного натяжения. Считая магнитное поле достаточно слабым доказываются существование и единственность фигур такого рода в окрестности шара.

Equilibrium configurations of magnetic liquid drops subject to an applied magnetic field and to surface tension are investigated. Existence and uniqueness of such configurations in the neighbourhood of a sphere in sufficiently weak fields are proved.

1. Magnetische Flüssigkeiten (*Ferrofluide*) sind Materialien mit magnetischen und Flüssigkeitseigenschaften [11]. Ein in einem äußeren Magnetfeld befindlicher Tropfen eines Ferrofluids wird daher eine merkliche Abweichung von seiner unter der Oberflächenspannung ursprünglichen Kugelform erfahren. Wir stellen uns hier die Aufgabe, diese Deformation in einem homogenen Magnetfeld zu berechnen. Auf die Verhältnisse in allgemeineren Feldern soll noch an anderer Stelle eingegangen werden. Die freie Oberfläche S des (inkompressiblen) Tropfens ist durch das Prinzip der virtuellen Arbeit bestimmt, nach dem die Gesamtenergie der Konfiguration stationär bezüglich der mit den Nebenbedingungen verträglichen Variationen sein muß. Die Energie setzt sich aus der Oberflächenenergie αS und der freien magnetischen Energie $E_m(S)$ zusammen, wofür bei linearem Zusammenhang zwischen Feldstärke und Magnetisierung

$$E_m(S) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega(S)} \vec{H}_a \vec{M} \, dx \quad (1.1)$$

gilt [10]. Hierbei bezeichnet α die (konstante) Oberflächenspannung, S den Flächeninhalt der freien Oberfläche, $\vec{H}_a = H_a \nabla x_3$ das angelegte Feld und \vec{M} die resultierende Magnetisierung. Die Integration ist über das vom Tropfen eingenommene Gebiet $\Omega(S)$ zu führen. Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit sind die Volumina $\Omega(S) = 4\pi R^3/3$ normierbar. S und Ω werden auch im folgenden entweder zur Bezeichnung einer Menge oder ihres Maßes benutzt.

Berücksichtigen wir die Nebenbedingungen durch Einführung eines Lagrange-schen Multiplikators λ , so gelangen wir zum freien Variationsproblem

$$\delta(\alpha S + E_m(S) - \lambda \Omega(S)) = 0. \quad (1.2)$$

Unsere Untersuchung trägt lokalen Charakter und richtet sich (in schwachen Magnetfeldern) auf die Konstruktion von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer Kugel. Deshalb werden wir die in (1.2) zur Konkurrenz gelangenden Flächen S

später gemäß $S = \{R(1 + u(x)) x : x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2\}$ als Graphen über der Einheitssphäre $S^2 = \{x : |x| = 1\}$ auffassen dürfen, wobei die skalaren Funktionen u in einer Kugel um $u = 0$ des Sobolewraumes $H^s(S^2)$ variieren. Die Ausführung der Variationen in (1.2) liefert neben den bekannten Sprungbedingungen für das Magnetfeld die zusätzliche Gleichgewichtsbedingung

$$-2\alpha C + ((\sigma^- - \sigma^+) n, n) = \text{const längs } S. \quad (1.3)$$

Hier bezeichnen n den nach außen gerichteten Normalenvektor, C die mittlere Krümmung von S , positiv genommen, falls der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der positiven (d. h. Außen-) Normalen liegt, σ^- und σ^+ die inneren bzw. äußeren Grenzwerte des magnetischen Spannungstensors $\sigma = (\sigma_{ij}) = (H_i B_j - 2^{-1} \bar{H} \bar{E} \delta_{ij})/4\pi$.

In Abschnitt 2 wird unter der Voraussetzung $s > 2$ die Analytizität der Gesamtenergie über einer Nullumgebung U des Raumes $H^s(S^2)$ nachgewiesen (vgl. auch [3, 4]). Anschließend werden die Variationsgleichungen (1.2) durch sukzessive Approximationen in der Nähe der Ausgangsfigur RS^2 aufgelöst (Satz 1). Grundlegend für die Konstruktion ist Hilfssatz 3, nach dem die erste Variation der magnetischen Energie zur Regularitätsklasse $C^\omega(U, H^{s-1}(S^2))$ gehört. Sein Beweis und die Herleitung von (1.3) sind in Abschnitt 3 enthalten.

Zur Beschreibung von Gleichgewichtsfiguren rotierender (nichtmagnetischer) Flüssigkeiten unter dem Einfluß der Oberflächenspannung mittels nichtlinearer Integralgleichungen siehe [8]; eine schwache Lösungstheorie dafür wurde in [2] entwickelt. Verwandte Näherungsrechnungen ohne Konvergenzbeweise findet man in [7].

2. Es bezeichne $H^s = H^s(S^2)$ den Sobolewraum der über der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definierten Distributionen mit quadratisch summierbaren Ableitungen bis zur Ordnung s , normiert durch $\|u\|_s^2 = \|A^s u\|^2 + \|u\|^2$ für $s \geq 0$. Dabei ist $\|\cdot\|$ die L^2 -Norm über S^2 , $A = (-\Delta_2)^{1/2}$ und

$$\Delta_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

der Laplace-Beltrami-Operator von S^2 bei Bezug auf Kugelkoordinaten

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \vartheta.$$

Unter $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbb{R}^3)$ verstehen wir die Vervollständigung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ bezüglich der Norm $\|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi|^2 dx$. Bekanntlich gehören die Elemente dieses Raumes zu $L^s(\mathbb{R}^3)$, mit stetiger Einbettung [9]. Im übrigen gilt

$$\mathcal{W} = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) : \frac{\partial T}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ für } i = 1, 2, 3 \right\} / \mathbb{R}.$$

Sei $U \subset H^s(S^2)$ eine Kugel mit Mittelpunkt Null. Für $u \in U$ definiert

$$S = \{R(1 + u(x)) x : x \in S^2\} \quad (2.1)$$

eine der R -Sphäre benachbarte Fläche mit dem Inhalt

$$S = R^2 \int_{S^2} (1 + u)^2 \left(1 + \frac{|\nabla u|^2}{(1 + u)^2} \right)^{1/2} dS^2 \quad (2.2)$$

(der Gradient ∇ ist hier bezüglich der Metrik von S^2 zu bilden). Es bietet keine Schwierigkeit, S analytisch zu entwickeln. Unter der Voraussetzung $s > 2$, bei der die Funktionen $u \in H^s$ einschließlich ihrer ersten Ableitungen nach dem Sobolewischen Einbettungssatz stetig sind, besitzt (2.2) die in einer Umgebung von $u = 0$ konvergente Entwicklung

$$\frac{S}{R^2} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(u^n) = 4\pi + \int_{S^2} \left((2u + u^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2) dS^2 + O(u^3) \right). \tag{2.3}$$

Ihre Summanden S_n bilden über H^s stetige und symmetrische n -Linearformen, wobei die Abkürzungen $S_n(u^n) = S_n(u, \dots, u)$ eingeführt wurden. Konvergenz besteht in dem Sinn, daß die mit den über H^s berechneten Normen $\|S_n\|$ gebildete Potenzreihe $\sum \|S_n\| z^n (z \in \mathbb{C})$ einen positiven Konvergenzradius besitzt (vgl. dazu [6]). Wichtiger ist die daraus abzuleitende Entwicklung der ersten Variation $\langle S'(u), \delta u \rangle = R^2 \sum n S_n(u^{n-1}, \delta u)$. Über ihre Regularität gibt ein Vergleich mit

$$\begin{aligned} \langle S'(u), \delta u \rangle &= R^2 \int_{S^2} \left(2(1+u) \delta u + \frac{|\nabla u|^2}{1+u} \delta u + \nabla u \nabla \delta u \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{|\nabla u|^2}{(1+u)^2} \right)^{-1/2} dS^2 \end{aligned}$$

Aufschluß, wonach S' eine in $u = 0$ analytische Abbildung von H^s in H^{s-2} definiert: $S' \in C^\omega(U, H^{s-2})$; U ist notfalls zu verkleinern. Wir erinnern schließlich an die Beziehung zur mittleren Krümmung C von S

$$\langle S'(u), \delta u \rangle = -2R \int_S C(x) \delta u \left(\frac{x}{|x|} \right) \frac{(x, n)}{|x|} dS(x) \tag{2.4}$$

mit der vereinbarten Vorzeichenwahl [5].

Die entsprechende Entwicklung der Feldenergie (1.1) erfordert einige Weiterungen. Zur Auswertung dieses Integrals ist zunächst das unter $\vec{H}_a = H_a \nabla x_3$ induzierte Gesamtfeld \vec{H} zu berechnen. In der Flüssigkeit bestehe der lineare Zusammenhang $\vec{M} = \chi \vec{H}$, $\chi = (\mu - 1)/4\pi$ zwischen Feldstärke und Magnetisierung mit konstanter Permeabilität $\mu \neq 1$. Im umgebenden nichtmagnetischen Medium $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ist im folgenden stets $\mu = 1$ zu setzen. Geht man (bei gegebener Berandung S) von dem Ansatz

$$\vec{H} = \vec{H}_a + H_a R \nabla \psi = H_a \nabla (x_3 + R\psi), \quad \psi \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^3), \tag{2.5}$$

für das gesuchte Feld aus, so ist $\psi = \psi(S)$ nach bekannten Vorschriften der Magnetostatik gemäß

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 \text{ in } \Omega(S) \text{ und } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}(S), \\ \psi^- - \psi^+ &= 0, \quad \mu \frac{\partial \psi^-}{\partial n} - \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = \frac{1 - \mu}{R} \frac{\partial x_3}{\partial n} \text{ längs } S \end{aligned}$$

festzulegen. Wie vorn ist n die Außennormale von S , und obere Signa kennzeichnen Grenzwerte von außen bzw. innen. Offensichtlich ist $\psi(S)$ Extremale des Variationsproblems

$$F(S, \psi) \rightarrow \min_{\psi \in \mathcal{W}} \tag{2.6}$$

für den in der Variablen ψ quadratischen Ausdruck

$$F(S, \psi) = \frac{1}{2R} \int_{\mathbf{R}^3} \mu |\nabla \psi|^2 dx + \frac{\mu - 1}{R^2} \int_{\Omega(S)} \nabla x_3 \nabla \psi dx; \quad (2.7)$$

man beachte die stückweise Konstanz der Permeabilität. (2.7) ist positiv definit über \mathcal{W} :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mu |\nabla \psi|^2 dx \geq \min \{1, \mu\} \|\psi\|_{\mathcal{W}}^2,$$

woraus Existenz und Unität der Extremalen folgen. Ein Vergleich der Variationsgleichungen zu (2.6) mit (1.1) zeigt nun:

$$E_m(S) = -\frac{\chi}{2} H_a^2 \Omega(S) - \beta F(S, \psi(S)), \quad \beta = \frac{H_a^2 R^3}{4\pi}. \quad (2.8)$$

Im nächsten Schritt sei $T: H^s(S^2) \rightarrow H^{s+1/2}(R^3)$, $Tu = \tilde{u}$ und $\tilde{u}|_S = u$, ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator (s. dazu z. B. [13]). Die Bildfunktionen u sollen finite und in ihrer Gesamtheit gleichmäßig beschränkte Träger besitzen. Wir benutzen die Fortsetzungen der Funktionen $u \in U$ zur Einführung neuer Koordinaten y_i gemäß

$$\frac{1}{R} x_i = \theta_i(y) = y_i (1 + \tilde{u}(y)) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.9)$$

Für $u \in U$ definieren diese Vorschrift Diffeomorphismen von \mathbf{R}^3 auf sich (gegebenfalls ist U nochmals zu verkleinern). In den neuen Koordinaten ist $y_i y_i = 1$ (Summation über doppelte Indizes) die Gleichung für die Vergleichsflächen (2.1). Mit der üblichen Symbolik

$$g_{ij} = \theta_{k,y_i} \theta_{k,y_j}, \quad \text{und} \quad g = \det(g_{ij}) \quad (2.10)$$

schreibt sich das Variationsintegral (2.7) nach Transformation als

$$F(S, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \mu \sqrt{g} g^{ij} \psi_{y_i} \psi_{y_j} dy + (\mu - 1) \int_{B^-} \sqrt{g} g^{ij} \theta_{3,y_i} \psi_{y_j} dy \quad (2.11)$$

mit $B^- = \{y: |y| < 1\}$. Wir berechnen den Minimalwert (2.6) erneut, wobei wir die Bezeichnung $\psi(S)$ für die Extremale (in den neuen Koordinaten) beibehalten. $\psi(S)$ genügt den Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (\sqrt{g} g^{ij} \psi_{y_j}) = 0 \quad \text{in } B^- \quad \text{und} \quad B^+ = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}^-, \quad (2.12)$$

$$\mu \frac{\partial \psi^-}{\partial n_g} - \frac{\partial \psi^+}{\partial n_g} = (1 - \mu) \frac{\partial \theta_3}{\partial n_g} \quad \text{längs } |y| = 1$$

sowie $\psi^- - \psi^+ = 0$ ($\partial/\partial n_g = \sqrt{g} g^{ij} y_i \partial/\partial y_j$ bezeichnet die Konormalenableitung). Speziell gilt

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial n_g} = A_{3i} y_i \quad \text{wegen} \quad \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \theta_3}{\partial y_j} = A_{3i}, \quad (2.13)$$

wobei A_{ij} das algebraische Komplement von $\partial \theta_i / \partial y_j$ in der entsprechenden Funktionalmatrix ist.

Hilfssatz 1: *Unter der Voraussetzung $s > 2$ ist der Minimalwert $E(S) = F(S, \psi(S))$ über $H^s(S^2)$ analytisch in $u = 0$.*

Beweis: Für $u \in H^s$ und $s > 2$ gehört $g_{ij} = g_{ij}(u)$ wegen (2.10) zu $H_{loc}^{s-1/2}(\mathbb{R}^3)$, ferner gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$ außerhalb einer von u unabhängigen Kugel in \mathbb{R}^3 . Wegen des Sobolewschen Einbettungssatzes sind diese Funktionen demzufolge stetig und beschränkt über \mathbb{R}^3 . Ein Blick auf

$$g_{ij}(u) = (1+u)^2 \delta_{ij} + (1+u)(y_i u_{vj} + y_j u_{vi}) + |y|^2 u_v u_{vj}$$

zeigt die Analytizität der vermittelten Abbildungen $g_{ij}: H^s(S^2) \rightarrow C(\mathbb{R}^3)$. Über der Banachalgebra $C(\mathbb{R}^3)$ besitzen \sqrt{g} und g^{ij} die gleiche Eigenschaft. Damit ist nachgewiesen, daß sich die Koeffizienten des Variationsintegrals (2.11) in über $C(\mathbb{R}^3)$ konvergente Reihen nach Potenzen von u entwickeln lassen. Man denke sich diese Entwicklungen nun in (2.11) eingetragen und vertausche Integration mit Summation. Damit ist F nach Potenzen von u entwickelt:

$$F(S, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a_n(u^n, \psi, \psi) + b_n(u^n, \psi) \right)$$

mit $a_n \in L((H^s)^n, \mathcal{W}, \mathcal{W}; \mathbb{R})$ und $b_n \in L((H^s)^n, \mathcal{W}; \mathbb{R})$, wobei die Entwicklung der in ψ linearen Glieder wegen (2.13) bei $n = 2$ abbricht. Lösen wir anschließend die entsprechend entwickelten Variationsgleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(u^n, \psi, \varphi) + b_n(u^n, \varphi)) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{W} \quad (2.14)$$

lokal durch den Satz über implizite Funktionen auf, so folgt die Behauptung aus der Analytizität ihrer Auflösungsfunktion

$$\psi(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(u^n). \quad \blacksquare \quad (2.15)$$

Im Sinne einer Näherungsrechnung notieren wir im Hinblick auf (2.14)

$$E(S) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^2 b_n(u^n, \psi(S)) = \frac{1}{2} (b_0(\psi_0) + 2b_1(u, \psi_0) + a_1(u, \psi_0^2)) + O(u^2). \quad (2.16)$$

Zur Berechnung von ψ_0 ist das Kopplungsproblem (2.12) zu lösen, wobei dort g^{ij} durch δ^{ij} zu ersetzen ist. Die Lösung lautet

$$\psi_0 = \begin{cases} A \kappa \cos \vartheta & \text{für } r < 1 \\ \frac{A}{r^2} \cos \vartheta & \text{für } r > 1 \end{cases}, \quad A = \frac{1-\mu}{2+\mu}$$

bei Bezug auf Kugelkoordinaten. Das liefert nach einfachen Umformungen

$$E(S) = \text{const} - \frac{A^2}{4} \int_{S^2} (5 + \mu - 9 \cos^2 \vartheta) u \, dS^2 + O(u^2). \quad (2.17)$$

Der folgende Regularitätssatz bildet eine wichtige Ergänzung zu Hilfssatz 1. Dazu sind die Faktorräume

$$\mathcal{W}^m(B) = \{T \in \mathcal{D}'(B): D^\alpha T \in L^2(B) \text{ für } 0 < |\alpha| \leq m\} / \mathbb{R}$$

über den Gebieten $B = B^-$ bzw. $B = B^+$ einzuführen. Unter der Norm $\|\cdot\|; \mathcal{W}^m(B)\|^2 = \sum \|D^\alpha \cdot\|; L^2(B)\|^2$ (Summation über $0 < |\alpha| \leq m$) ist $\mathcal{W}^m(B)$ ein Hilbertraum.

Hilfssatz 2: *Unter der Voraussetzung $s > 2$ konvergiert (2.15) in $\mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+)$ mit der Norm*

$$\begin{aligned} & \|\cdot\|; \mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+) \| \\ &= \|\cdot\|; \mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \| + \|\cdot\|_{B^-}; \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \| + \|\cdot\|_{B^+}; \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+) \|. \end{aligned}$$

Beweis: Im distributiven Sinn ist $\psi(S)$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} (\mu \sqrt{g} g^{ij} \psi_{\nu_i}) = \frac{\partial}{\partial y_j} ((\mu - 1) A_{3_j})$$

bzw.

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \mu \psi_{\nu_i} = \frac{\partial}{\partial y_j} (\mu - 1) A_{3_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} \mu (\sqrt{g} g^{ij} - \delta^{ij}) \psi_{\nu_i}. \quad (2.18)$$

Da die Sobolevräume $H^{s-1/2}(B)$ unter der Voraussetzung $s > 2$ Banach-Algebren bilden (s. z. B. [1]), gilt für die Koeffizienten

$$A_{3_j} \in H^{s-1/2}(B^-), \quad \sqrt{g} g^{ij} - \delta^{ij} \in H^{s-1/2}(B^-) \cap H^{s-1/2}(B^+).$$

Gehört daher ψ zu $\mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+)$, so folgt

$$(\mu - 1) A_{3_j} + \mu (\sqrt{g} g^{ij} - \delta^{ij}) \psi_{\nu_i} \in L^2(\mathbf{R}^3) \cap H^{s-1/2}(B^-) \cap H^{s-1/2}(B^+),$$

wobei die durch die letzte Zeile definierten Abbildungen den Produktraum $H^s(S^2) \times \mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+)$ analytisch in $L^2(\mathbf{R}^3) \cap H^{s-1/2}(B^-) \cap H^{s-1/2}(B^+)$ überführen. Auf der anderen Seite besteht für die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} (\mu \psi_{\nu_i}) = \frac{\partial f_j}{\partial y_j} \quad (\text{über } \mathbf{R}^3)$$

zum Fréchet'schen Differential von (2.18) in $u = 0$ der fundamentale Regularitätssatz

$$\|\psi; \mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^m(B^-) \cap \mathcal{W}^m(B^+)\| \leq C \sum_{j=1}^3 \|f_j; L^2(\mathbf{R}^3) \cap H^{m-1}(B^-) \cap H^{m-1}(B^+)\|$$

mit einer von den Funktionen f_j unabhängigen Konstanten C (vgl. [12]). Die auf dem Satz über implizite Funktionen beruhende Entwicklung (2.15) ist daher ebensogut über den Räumen $\mathcal{W}(\mathbf{R}^3) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^-) \cap \mathcal{W}^{s+1/2}(B^+)$ herleitbar ■

In den bisherigen Entwicklungen ist schließlich die Volumenkonstanz

$$\begin{aligned} \Omega(S) - \frac{4\pi}{3} R^3 &= \frac{R^3}{3} \int_{S^2} (1 + u)^3 dS^2 - \frac{4\pi}{3} R^3 \\ &= R^3 \int_{S^2} \left(u + u^2 + \frac{u^3}{3} \right) dS^2 = 0 \end{aligned}$$

zu berücksichtigen. Führen wir den Teilraum \dot{H}^s derjenigen Funktionen von H^s mit Mittelwert Null über S^2 ein, so läßt sich diese lokal durch den Ansatz

$u = v + f(v) \mathbf{1}$ ($v \in V \subset \dot{H}^s$) mit einer in einer Nullumgebung $V \subset \dot{H}^s$ definierten analytischen Funktion f befriedigen. Koeffizientenvergleich liefert $f(v) = -(4\pi)^{-1} \int_{S^2} v^2 dS^2 + O(v^3)$. Setzen wir nun obigen Ansatz in die Entwicklungen

(2.3), (2.17) für S bzw. E ein, und setzen wir $\tilde{S}(v) = S(v + f(v) \mathbf{1})$ und $\tilde{E}(v) = E(S(v + f(v) \mathbf{1}))$, so folgt mit Rücksicht auf die Entwicklung von f

$$\frac{1}{R^2} \tilde{S}(v) = 4\pi + \frac{1}{2} \int_{S^2} (|\nabla v|^2 - 2v^2) dS^2 + O(v^3), \tag{2.19}$$

$$\tilde{E}(v) = \text{const} + \frac{9}{4} A^2 \int_{S^2} v \cos^2 \vartheta dS^2 + O(v^2).$$

Zugleich ist (0.2) wegen (2.8) auf

$$\alpha \tilde{S}'(v) - \beta \tilde{E}'(v) = 0 \quad (v \in V) \tag{2.20}$$

zurückgeführt. Umgekehrt, ist v Lösung dieser Gleichung, so löst die Fläche $S(u) = S(v + f(v) \mathbf{1})$ das Variationsproblem (1.2), und zwar zu $\lambda = \langle \alpha S'(u) + E_m'(u), \mathbf{1} \rangle / \langle \Omega'(u), \mathbf{1} \rangle$.

Wir machen nun in Vorgriff auf Hilfssatz 3 darauf aufmerksam, daß \tilde{S}' , $\tilde{E}' \in C^\omega(V, \dot{H}^{s-2})$ wegen $S' \in C^\omega(U, H^{s-2})$ bzw. $E' \in C^\omega(U, H^{s-1}) \subset C^\omega(U, H^{s-2})$ ist. Deshalb kann (2.20) für hinreichend kleine $\beta/\alpha R^2$ über dem Raumpaar $(\dot{H}^s, \dot{H}^{s-2})$ aufgelöst werden. Die für die Auflösung wichtige Linearisierung $L = S''(0)$ lautet im Hinblick auf (2.19) $Lv = R^2(-\Delta_2 v - 2v)$ und besitzt die sphärischen Funktionen y_i/S^2 ($i = 1, 2, 3$) als Eigenfunktionen zum Eigenwert 0. Den bekannten Entwicklungen nach sphärischen Funktionen liest man aber ab, daß der Jacobische Operator L das orthogonale Komplement $\dot{H}^s \ominus V_3$ isomorph auf $\dot{H}^{s-2} \ominus V_3$ abbildet, wenn V_3 der von den obigen Eigenfunktionen aufgespannte dreidimensionale Eigenraum ist. Über $\dot{H}^s \ominus V_3$ ist somit wenigstens die modifizierte Gleichung

$$P(\alpha \tilde{S}'(v) - \beta \tilde{E}'(v)) = 0 \quad (v \in V \ominus V_3) \tag{2.21}$$

für hinreichend kleine $\beta/\alpha R^2$ eindeutig nach v auflösbar, wobei P die orthogonale Projektion von \dot{H}^{s-2} auf $\dot{H}^{s-2} \ominus V_3$ bezeichnet.

Die restlichen Gleichgewichtsbedingungen

$$\langle \alpha \tilde{S}'(v) - \beta \tilde{E}'(v), y_i|_{S^2} \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind wegen der Translationsinvarianz von S und E automatisch erfüllt. In der Tat, τ sei eine Translation in \mathbf{R}^3 und führe S in $\tau(S)$ über. Sind u und u' die Parametrisierungen der Flächen S bzw. $\tau(S)$, so gilt neben $S(u') = S(u)$ auch $E(S(u')) = E(S(u))$. Hieraus folgt etwa für eine Translation $\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + Rh)$ in x_3 -Richtung $u' = -1 + h \cos \vartheta + ((1 + u)^2 - h^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}$ und

$$\langle S'(u), \cos \vartheta \rangle = \langle E'(S(u)), \cos \vartheta \rangle = 0.$$

Offensichtlich genügen auch \tilde{S} und \tilde{E} diesen Beziehungen.

Man erhält so

Satz 1: Es sei $s > 2$. Bei hinreichender Kleinheit des Quotienten $\beta/\alpha R^2$ sind die Variationsgleichungen (1.2) im Sinne unserer Parametrisierung über einer

$H^2(S^2) \ominus V_3$ -Kugel $V = \{u: \|u\| \leq r\}$ eindeutig auflösbar. Ihre Lösung $S(u)$ hängt analytisch von $\beta/\alpha R^2$ ab, wobei

$$u = \beta_{20} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{\beta}{\alpha R^2} \right),$$

$$\beta_{20} = \frac{3}{8} \frac{A^2 \beta}{\alpha R^2} = \frac{3}{32} \frac{H^2 R}{\pi \alpha} \left(\frac{1 - \mu}{2 + \mu} \right)^2$$

(β_{20} - Quadrupoldeformation des Tropfens) gilt.

Da sich die Gleichungen (2.21) bei Spiegelung an der (x_1, x_2) -Ebene sowie bei Drehungen um die x_3 -Achse kovariant transformieren, besitzen die Lösungsflächen neben der Symmetrieebene $x_3 = 0$ Rotationsymmetrie bezüglich der x_3 -Achse: $u = u(\vartheta) = u(\pi - \vartheta)$ für $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Insbesondere ist $\int_{\Omega(S)} x_i dx^i = 0$ für $i = 1, 2, 3$.

3. Dieser Abschnitt enthält die Herleitung der Gleichgewichtsbedingung (1.3). Wir knüpfen an (2.11) an. Setzt man (2.15) in diese Formel ein und differenziert, so erhält man

$$J = \frac{1}{2} \int_{R^3} \mu \delta(\sqrt{g} g^{ij}) \psi(S)_{y_i} \psi(S)_{y_j} dy + (\mu - 1) \int_{B^-} \psi(S)_{y_i} \delta A_{3i} dy$$

als analytischen Ausdruck für die erste Variation $J = \langle E'(S), \delta u \rangle$ des Minimalwerts (2.16), wobei δA_{3i} und $\delta(\sqrt{g} g^{ij})$ die bei der Änderung δu von S resultierenden Variationen der algebraischen Komplemente (2.13) und der Metrik (2.10) sind. Führt man die Variationen $\delta \theta_i = y_i \delta \bar{u}$ der Abbildungsvorschriften (2.9) ein, dann erhält man nach einfachen Rechnungen

$$\delta A_{3i} = \frac{1}{\sqrt{g}} (A_{jk} A_{3i} - A_{ji} A_{3k}) \frac{\partial \delta \theta_k}{\partial y_i},$$

$$\delta(\sqrt{g} g^{ij}) = (A_{ki} g^{jj} - A_{kj} g^{ii} - A_{ki} g^{ii}) \frac{\partial \delta \theta_k}{\partial y_i}$$

und daraus folgend

$$\psi(S)_{y_i} \delta A_{3i} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} (A_{jk} A_{3i} - A_{ji} A_{3k}) \psi(S)_{y_i} \delta \theta_j \right),$$

$$\delta(\sqrt{g} g^{ij}) \psi(S)_{y_i} \psi(S)_{y_j} = \frac{\partial}{\partial y_l} ((A_{kl} g^{ij} - 2A_{ki} g^{jl}) \psi(S)_{y_i} \psi(S)_{y_j} \delta \theta_k)$$

bei Beachtung von (2.12). Ersetzt man die Integranden in J demgemäß, so folgt nach partieller Integration einerseits

$$J = \frac{1}{2} \int_{S^2} (A_{kl} g^{ij} - 2A_{ki} g^{jl}) (\mu \psi_{y_i}^- \psi_{y_j}^- - \psi_{y_i}^+ \psi_{y_j}^+) y_k y_l \delta u dS^2$$

$$+ (\mu - 1) \int_{S^2} g^{-1/2} (A_{jk} A_{3i} - A_{ji} A_{3k}) (\psi_{y_i}^- - \psi_{y_i}^+) y_j y_k \delta u dS^2 \quad (3.1)$$

und bei Rücktransformation (2.9) andererseits

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_{R^3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \psi|^2 \delta \theta_i - 2\psi_{x_i} \psi_{x_j} \delta \theta_j) dx \\
 &+ \frac{\mu - 1}{R} \int_{\Omega(S)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_{x_i} \delta \theta_i) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\psi_{x_i} \delta \theta_i) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_S (|\nabla \psi^-|^2 - |\nabla \psi^+|^2) n_i y_i - 2(\mu \psi_{x_i}^- \psi_{x_j}^- - \psi_{x_i}^+ \psi_{x_j}^+) n_i y_i \, du \, dS(x) \\
 &+ \frac{\mu - 1}{R} \int_S (\psi_{x_i}^- n_i y_i - \psi_{x_i}^- n_3 y_i) \, du \, dS(x). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Wie vorn bezeichnen dabei obere Indizes Grenzwerte längs S^2 bzw. S und n_i die Komponenten des Außennormalenvektors von S .

Hilfssatz 3: *Unter der Voraussetzung $s > 2$ vermittelt E' eine in $u = 0$ analytische Abbildung von $H^s(S^2)$ nach $H^{s-1}(S^2)$.*

Beweis: In der Darstellung (3.1) definieren die Spuren $\psi(S)_{x_i}/S^2$ nach Hilfssatz 2 und den Randeinbettungssätzen Abbildungen der Regularitätsklasse $C^\omega(U, H^{s-1})$. Natürlich gilt $\theta_{j,x_i}/S^2 \in C^\omega(U, H^{s-1})$ und daraus folgend $A_{kl}, g^{ij}/S^2 \in C^\omega(U, H^{s-1})$, da die Räume $H^{s-1}(S^2)$ bei $s > 2$ Banach-Algebren bilden. Diese Eigenschaft läßt schließlich auch die behauptete Regularität des Integranden erkennen ■

Der Beweis von (1.3) stützt sich nun auf (3.2). Berücksichtigen wir dort den Zusammenhang (2.5) zum Gesamtfeld, so folgt nach einfachen Umformungen

$$\beta J = \int_S \left(((\sigma^+ - \sigma^-) n, n) - \frac{\kappa}{2} H_a^2 \right) n_i y_i R \, du \, dS(x). \quad (3.3)$$

Die auf S umtransformierte Variation des Volumens lautet

$$\langle \Omega'(S), \delta u \rangle = R^3 \int_{S^2} (1 + u)^2 \delta u \, dS^2 = \int_S n_i y_i R \, du \, dS(x). \quad (3.4)$$

Vergleichen wir jetzt (2.4), (2.8), (3.3), (3.4) mit (1.2), so erhalten wir als Ergänzung zu Satz 1 schließlich

Satz 2: *Längs der nach Satz 1 konstruierten Lösungsflächen S gilt die Beziehung (1.3), in der das zwischen den magnetischen und Oberflächenkräften und dem Druck bestehende Gleichgewicht zum Ausdruck gelangt.*

LITERATUR

- [1] ADAMS, R. A.: Sobolev spaces. New York: Academic Press 1975.
- [2] ALBANO, S., and E. H. A. GONZALEZ: Rotating drops. Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 687–702.
- [3] BEYER, K.: Oberflächeninstabilitäten magnetischer Flüssigkeiten. Z. Anal. Anw. 2 (1983), 385–399.
- [4] BEYER, K.: Bifurcation and Stability of Cellular States in Magnetic Fluids. Z. Anal. Anw. 4 (1985), 413–428.

- [5] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin: Springer-Verlag 1930.
- [6] BOURBAKI, N.: Variétés différentielles et analytiques. Fasc. de résultats. Paris: Hermann 1967.
- [7] BRANCHER, J. P., et O. SERO GUILLAUME: Etude de la déformation d'un liquide magnétique. Arch. Rat. Mech. Anal. **90** (1985), 57–85.
- [8] HÖLDER, E.: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung Math. Z. **25** (1926), 188–208.
- [9] LADYSHENSKAJA, O. A.: Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1965.
- [10] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VIII. Berlin: Akademie-Verlag 1974.
- [11] ROSENSWEIG, R. E.: Fluid dynamics and science of magnetic liquids. Adv. in Electronics and Electron Physics **48** (1979), 103–199.
- [12] ШЕФТЕЛЬ, З. Г.: Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Сиб. матем. ж. **6** (1965), 636–668.
- [13] WŁOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1982.

Manuskripteingang: 07. 05. 1986

VERFASSER:

Prof. Dr. KLAUS BEYER
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock