Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (2) 1987, S. 113–125

Критерий регулярности бесконечно удаленной точки для задачи Зарембы в полуцилиндре[1])

Т. М. Керимов, В. Г., Мазья и А. А. Новрузов

Es wird das asymptotische Verhalten im Unendlichen der Lösungen des Zaremba-Problems für den Laplace-Operator in einem Halbzylinder untersucht. Mittels des Begriffes der Wienerschen Kapazität werden punktweise Abschätzungen für die Lösungen, die Greensche Funktion und das harmonische Maß angegeben. Das Hauptergebnis ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität eines Punktes im Unendlichen.

Исследуется поведение на бесконечности решений задачи Зарембы для оператора Лапласа в полуцилиндре. Получены точечные оценки решений, функции Грина и гармонической меры, формулируемые в терминах гармонической емкости. Основной результат — необходимое и достаточное условие регулярности бесконечно удаленной точки.

The asymptotic behaviour at infinity of solutions to the Zaremba problem for the Laplace operator in a half-cylinder is studied. Pointwise estimates for solutions, the Green function and the harmonic measure are obtained in terms of the Wiener capacity. The main result is a necessary and sufficient condition for regularity of a point at infinity.

§ 1. Постановка задачи Зарембы

Пусть G — полуцилиндр $\{x = (x', x_n): x_n > 0; x' \in \omega\}$, где ω — область в $\mathbf{R}^{n-1}$ с гладкой границей и компактным замыканием. Предположим, что на ∂G выделено замкнутое подмножество F, имеющее предельные точки на бесконечности. Пусть еще

$$G_\tau = \{x \in G: x_n > \tau\}, \qquad S_\tau = \{x \in G: x_n = \tau\}, \qquad F_\tau = \{x \in F: x_n > \tau\}.$$

Через $k, k_0, k_1, \ldots$ будем обозначать положительные константы, зависящие от n и области ω. В случае $n > 2$ через $\operatorname{cap}(e)$ обозначим гармоническую емкость борелевского множества $e \subset \mathbf{R}^n$. При $n = 2$ то же обозначение примем для емкости, порожденной оператором $-\triangle + 1$. Термин ,,квази-всюду" означает ,,вне множества емкости нуль". Введем пространство $\mathring{L}_2^1(G; F)$ функций на G с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathring{L}_2^1(G;F)} = \Big(\int_G (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \int_{G\setminus G_1} u^2\, dx\Big)^{1/2}, \tag{1.1}$$

равных нулю квази-всюду на F. Следствием неравенства Харди является эквивалентность этой и следующей нормы

$$\Big(\int_G [(\operatorname{grad} u)^2 + (x_n + 1)^{-2} u^2]\, dx\Big)^{1/2}. \tag{1.2}$$

---

[1]) Формулировки доказываемых далее утверждений были опубликованы в заметке авторов [5].

Отсюда заключаем, что множество функций из $\mathring{L}_2^1(G; F)$ с компактными носителями в G плотно в $\mathring{L}_2^1(G; F)$. Поскольку каждую функцию из упомянутого множества можно приблизить в $W_2^1(G)$ последовательностью гладких функций, равных нулю вблизи F, то пространство $C_0^\infty(\overline{G} \setminus F)$ плотно в $\mathring{L}_2^1(G; F)$ (см. [4]). Пусть $L_2^{-1}(G; F)$ — пространство линейных функционалов на $\mathring{L}_2^1(G; F)$. Любой функционал $f \in L_2^{-1}(G; F)$ представим в виде

$$f(v) = \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + f_0 v \right) dx \qquad \left(v \in \mathring{L}_2^1(G; F)\right), \tag{1.3}$$

где f_i, $(x_n + 1) f_0 \in L_2(G)$ [6]. Отметим, что при любом $\tau \in (0, \infty)$

$$\|u\|^2_{L_2(G \setminus G_\tau)} \leqq \frac{k(\tau)}{\operatorname{cap}(F \setminus F_\tau)} \|\operatorname{grad} u\|^2_{L_2(G \setminus G_\tau)},$$

см. [9: гл. 10]. Поэтому если F имеет положительную емкость, что далее будем всегда предполагать, то норма (1.1) эквивалентна норме $\|\operatorname{grad} u\|_{L_2(G)}$.

Рассмотрим интегральное тождество

$$\int\limits_G \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx = f(v), \tag{1.4}$$

где $f \in L_2^{-1}(G; F)$, $v \in C_0^\infty(\overline{G} \setminus F)$, $u \in W_2^1(G \setminus G_\tau)$ при любом τ и равна нулю квазивсюду на F. Если предположить дополнительно, что в (1.3) $f_i \in W_2^1(G)$, то, как известно (см. [2: § 15]) $u \in W_2^2$ в малой окрестности произвольной точки множества $\overline{G} \setminus F$ и равенство (1.4) можно понимать в сильном смысле:

$$-\triangle u = f_0 - \operatorname{div} f \text{ в } G, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \cdot \nu \quad \text{на} \quad \partial G \setminus F,$$

$$u = 0 \quad \text{квази-всюду на } F,$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и ν — внешняя нормаль к ∂G. Поэтому функцию u естественно называть (*обобщенным*) *решением задачи Зарембы*. Если $u \in \mathring{L}_2^1(G; F)$, то будем говорить о *решении с конечным интегралом Дирихле*. В этом случае в качестве v в (1.4) можно взять любую функцию из $\mathring{L}_2^1(G; F)$. Поскольку в левой части (1.4) находится скалярное произведение в $\mathring{L}_2^1(G; F)$, а в правой — линейный функционал на $\mathring{L}_2^1(G; F)$, то решение с конечным интегралом Дирихле существует и единственно.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Настоящий параграф содержит два вспомогательных утверждения и нужные сведения о решениях одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма 2.1: *Пусть функция u имеет конечную норму* (1.2) *и удовлетворяет неравенству $\triangle u \leqq 0$ на G и краевому условию $\partial u/\partial \nu \geqq 0$ на $\partial G \setminus F$ в том смысле, что*

$$\int\limits_G \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx \geqq 0 \quad \textit{при} \quad 0 \leqq v \in \mathring{L}_2^1(G; F). \tag{2.1}$$

Пусть, кроме того, $u(x) \geqq 0$ квази-всюду на F. Тогда $u(x) \geqq 0$ на $\overline{G} \setminus F$.

Доказательство: Так как $u_- = (|u| - u)/2 = 0$ квази-всюду на F, то $u_- \in \mathring{L}_2^1(G; F)$ и в (2.1) можно подставить $v = u_-$. Тогда $\|\operatorname{grad} u_-\|_{L_2(G)} = 0$ и

$u_- = \text{const}$. Эта константа равна нулю, поскольку $u_- = 0$ на множестве положительной емкости ∎

Лемма 2.2: *Пусть $f = 0$ на G_t и u — решение задачи Зарембы с конечным интегралом Дирихле. Тогда*

$$\sup_{S_{\lambda+1}} |u| \leqq k \,\|u\|_{L_2(G_\lambda \setminus G_{\lambda+2})} \quad \text{при} \quad \lambda > \tau. \tag{2.2}$$

Оценка (2.2) для решений эллиптических уравнений второго порядка в дивергентной форме с измеримыми ограниченными коэффициентами доказана Мозером [10]. Точнее, в [10] получена внутренняя локальная оценка типа (2.2), однако, доказательство легко распространяется на рассматриваемый здесь случай.

Приведем некоторые используемые в дальнейшем сведения о решениях обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi''(\sigma) - p(\sigma)\,\xi(\sigma) = 0 \tag{2.3}$$

на полуоси $(0, \infty)$, где p — неотрицательная измеримая функция, отличная от тождественного нуля. Обозначим через Z решение уравнения (2.3), удовлетворяющее начальным условиям $Z(0) = 1$, $Z'(0) = 0$. Ясно, что Z — выпуклая вниз неубывающая функция, удовлетворяющая неравенствам $Z(\sigma) \geqq 1$ и $\lim\limits_{\sigma\to\infty} Z(\sigma)/\sigma > 0$. Пусть $z(\sigma) = Z(\sigma) \int\limits_\sigma^\infty \frac{d\tau}{Z(\tau)^2}$ — еще одно положительное при $\sigma > 0$ решение уравнения (2.3). Вронскиан $zZ' - z'Z$ равен единице и $z'(0) = -1$. Функция z — невозрастающая, так как

$$z'(\sigma) = Z'(\sigma) \int\limits_\sigma^\infty \frac{d\sigma}{Z(\sigma)^2} - \frac{1}{Z(\sigma)} \leqq \int\limits_\sigma^\infty \frac{Z'(\sigma)\,d\sigma}{Z(\sigma)^2} - \frac{1}{Z(\sigma)} = 0.$$

В силу (2.3) функция Z' не убывает и стремится к нулю на бесконечности. Поэтому при любом $a > 0$

$$\int\limits_a^\infty [z'(\sigma)^2 + p(\sigma)\,z(\sigma)^2]\,d\sigma = z(\sigma)\,z'(\sigma)|_a^\infty = -z(a)\,z'(a).$$

Используя это тождество, заключаем, что функция $\sigma \to Az(\sigma)/z(a)$ реализует минимум функционала

$$\xi \to \int\limits_a^\infty [\xi'(\sigma)^2 + p(\sigma)\,\xi(\sigma)^2]\,d\sigma$$

на множестве абсолютно непрерывных функций, подчиненных условию $\xi(a) = A$ и этот минимум равен $-A^2z'(a)/Z(a)$. Отметим также, что $AZ(\sigma)/Z(a)$ сообщает минимальное значение $A^2Z'(a)/Z(a)$ функционалу

$$\xi \to \int\limits_0^a [\xi'(\sigma)^2 + p(\sigma)\,\xi(\sigma)^2]\,d\sigma,$$

где $a \in (0, \infty)$, а ξ — любая абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\xi(a) = A$. Из сказанного о минимизации этих функционалов следует, что при увеличении функции p отношения $|z'|/z$ и Z'/Z не уменьшаются. Отсюда нетрудно получить оценки для решений z и Z при дополнительных ограничениях на p. Если, например, $p(\sigma) \leqq \varkappa = \mathrm{const}$, что всегда имеет место для функций p, возникающих в дальнейшем, то сравнивая (2.3) с уравнением $\xi'' - \varkappa\xi = 0$, получаем

$$0 \leqq \frac{Z'(\sigma)}{Z(\sigma)} \leqq \varkappa^{1/2} \operatorname{th}(\varkappa^{1/2}\sigma) \leqq \varkappa^{1/2} \quad \text{и} \quad -\varkappa^{1/2} \leqq \frac{z'(\sigma)}{z(\sigma)} \leqq 0.$$

Поэтому при любых a, $\sigma > 0$

$$Z(\sigma) \leqq Z(\sigma + a) \leqq Z(\sigma)\, e^{\varkappa^{1/2} a} \quad \text{и} \quad z(\sigma)\, e^{-\varkappa^{1/2} a} \leqq z(\sigma + a) \leqq z(\sigma).$$

§ 3. Оценки решений задачи Заремба

Положим $\mathfrak{C}(\sigma) = \operatorname{cap}(F_\sigma \setminus F_{\sigma+1})$ и рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\xi''(\sigma) - k\mathfrak{C}(\sigma)\, \xi(\sigma) = 0, \quad \sigma > 0. \tag{3.1}$$

Тем самым мы полагаем в (2.3) $p(\sigma) = k\mathfrak{C}(\sigma)$. Соответствующие этому выбору невозрастающее и неубывающее решения уравнения (2.3), определенные в § 2, будем обозначать по-прежнему через z и Z. Следующая лемма, близкая к аналогичным утверждениям для задачи Дирихле, полученным в [3, 8], является ключевой.

Лемма 3.1: *Пусть $f = 0$ на G_τ и u — решение задачи Заремба с конечным интегралом Дирихле. Тогда*

$$\int_\omega u(x)^2\, dx' \leqq \frac{z(x_n)}{z(y_n)} \int_\omega u(y)^2\, dy' \quad \text{при} \quad x_n > y_n > \tau. \tag{3.2}$$

Доказательство: Пусть $s \to \eta(s)$ — кусочно-линейная функция на $\mathbf{R}^1$, равная нулю при $s < 0$ и единице при $s > 1$. Подставим в (1.4) функцию $x \to v(x) = \eta\big(\varepsilon^{-1}(t - \sigma)\big)\, u(x)$ $(x \in G)$, где $t > \sigma > \tau$. Тогда

$$\int_G \eta\left(\frac{t-\sigma}{\varepsilon}\right) (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_G \eta'\left(\frac{t-\sigma}{\varepsilon}\right) u(x) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\, dx = 0$$

или, что равносильно,

$$\int_G \eta\left(\frac{t-\sigma}{\varepsilon}\right) (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \frac{\mathfrak{F}(\sigma + \varepsilon) - \mathfrak{F}(\sigma)}{2\varepsilon} = 0,$$

где $\mathfrak{F}(\sigma) = \|u\|^2_{L_2(S_\sigma)}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$\int_{G_\sigma} (\operatorname{grad} u)^2\, dx = -\frac{\mathfrak{F}'(\sigma)}{2}. \tag{3.3}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\int_{G_\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_\sigma^\infty \int_{G_t \setminus G_{t+1}} (\operatorname{grad} u)^2\, dx\, d\sigma \leqq -\mathfrak{F}'(\sigma). \tag{3.4}$$

Воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{G_t\setminus G_{t+1}} (\operatorname{grad} u)^2\,dx \geqq k\mathfrak{C}(t)\int\limits_{G_t\setminus G_{t+1}} u^2\,dx.$$

Отсюда и из известного неравенства

$$\int\limits_{S_t} u^2\,dx' \leqq k\int\limits_{G_t\setminus G_{t+1}} [(\operatorname{grad} u)^2 + u^2]\,dx$$

следует оценка

$$\int\limits_{G_t\setminus G_{t+1}} (\operatorname{grad} u)^2\,dx \geqq k\mathfrak{C}(t)\,\mathfrak{F}(t).$$

Подставляя ее в (3.4), находим

$$\int\limits_{\omega} dx \int\limits_{G}^{\infty} [u_t^2 + k\mathfrak{C}(t)\,u^2]\,dt \leqq -\mathfrak{F}'(\sigma), \tag{3.5}$$

где $u_t(x', t) = \partial u(x', t)/\partial t$. Функционал

$$\xi \to \int\limits_{\sigma}^{\infty}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + k\mathfrak{C}(t)\,\xi^2\right]dt,$$

определенный на функциях, удовлетворяющих условию $\xi(\sigma) = u(x', \sigma)$, достигает минимума на решении $t \to u(x', \sigma)\,z(t)/z(\sigma)$ уравнения (3.1) и этот минимум равен $-u^2(x', \sigma)\,z'(\sigma)/z(\sigma)$ (см. § 2). Поэтому из (3.5) следует дифференциальное неравенство $\big(z'(\sigma)/z(\sigma)\big)\,\mathfrak{F}(\sigma) \geqq \mathfrak{F}'(\sigma)$, которое и приводит к (3.2) ▮

Следствие 3.1: *Пусть $f = 0$ на G_τ и u — решение задачи Зарембы с конечным интегралом Дирихле. Тогда* $\big(y = (y', y_n)\big)$

$$\sup_{x'\in\omega} u(x)^2 \leqq k\,\frac{z(x_n)}{z(y_n)}\int\limits_{\omega} u(y)^2\,dy' \quad \textit{при} \quad x_n - 1 > y_n > \tau. \tag{3.6}$$

Доказательство: Используя (2.2) и монотонность функции $\mathfrak{F}$ (см. (3.3)), находим

$$\sup_{S_t} u^2 \leqq k\,\|u\|_{L_2(G_{t-1}\setminus G_{t+1})} \leqq k[2\mathfrak{F}(t-1)]^{1/2} \quad \text{при} \quad t - 1 > \tau,$$

что вместе с (3.2) приводит к оценке

$$\sup_{S_t} u^2 \leqq k\left[2\,\frac{z(t-1)}{z(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma)\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad t - 1 > \sigma > \tau.$$

Остается применить неравенство $z(\sigma)\,e^{-\varkappa^{1/2}a} \leqq z(\sigma + a)$ (см. конец § 2) ▮

Замечание: Если функция $\mathfrak{C}$ ведет себя достаточно правильно на бесконечности или имеет правильную миноранту, то, используя известные асимптотические формулы или оценки для решений уравнения (3.1), из (3.2) и (3.6) можно получить конкретную информацию о решениях задачи Зарембы. Грубо говоря, имеются следующие три возможности:

$$\frac{z(t)}{z(\sigma)} = \begin{cases} O\left(\exp\left(-k\int\limits_{\sigma}^{t}\sqrt{\mathfrak{C}(s)}\,ds\right)\right) & \text{если} \quad \mathfrak{C}(s) \gg s^{-2}, \\ O((\sigma/t)^k) & \text{если} \quad \mathfrak{C}(s) \sim s^{-2}, \\ O\left(\exp\left(-k\int\limits_{\sigma}^{t} s\mathfrak{C}(s)\,ds\right)\right) & \text{если} \quad \mathfrak{C}(s) \ll s^{-2} \end{cases} \tag{3.7}$$

(см. [12: гл. II], [11]). Для того, чтобы поверить в это, достаточно свести (3.1) к уравнению Риккати $Y'(\sigma) + Y^2(\sigma) = k\mathfrak{C}(\sigma)$, где $Y(\sigma) = \xi'(\sigma)/\xi(\sigma)$ и заметить, что сформулированные оценки для функции z возникают, соответственно, при $Y' \ll Y^2$, $Y' \approx Y^2$, $Y' \gg Y^2$ на бесконечности. Аналогичные оценки справедливы и для возрастающего решения Z.

§ 4. Критерий регулярности бесконечно удаленной точки

Будем говорить, что бесконечно удаленная точка *регулярна для задачи Зарембы*, если для всех $f \in L_2^{-1}(G, F)$ с ограниченными носителями решения с конечным интегралом Дирихле стремятся к нулю при $x_n \to \infty$, $x \in G$. Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4.1: *Бесконечно удаленная точка регулярна для задачи Зарембы в том и только в том случае, если функция $t\mathfrak{C}(t)$ не суммируема на $(0, \infty)$ или, что равносильно,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \operatorname{cap}(F_j \setminus F_{j+1}) = \infty. \tag{4.1}$$

Приведем пример множества F, для которого сформулированный критерий регулярности может быть представлен в явном виде. Обозначим через p — точку на $\partial\omega$ и через ψ — убывающую положительную непрерывную функцию на полуоси $[0, \infty]$, $\psi(0) = 1$. Пусть

$$F = \{x \in \partial G : (x' - p)/\psi(x_n) \in \sigma, x_n \geqq 0\},$$

где σ — область на $\partial\omega$. Из известных оценок емкости параллелепипеда (см. [1]) следуют неравенства

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{k_1}{\log \dfrac{k_2}{\psi(j+1)}} \\[2ex] k_5\psi(j+1)^{n-3} \end{matrix}\right\} \leqq \operatorname{cap}(F_j \setminus F_{j+1}) \leqq \left\{\begin{matrix} \dfrac{k_3}{\log \dfrac{k_4}{\psi(j)}} & (n = 3) \\[2ex] k_6\psi(j)^{n-3} & (n > 3). \end{matrix}\right.$$

Поэтому условие (4.1) выполнено в том и только случае, если

$$\int^{\infty} \frac{s\,ds}{|\log \psi(s)|} = \infty \quad \text{при} \quad n = 3, \qquad \int^{\infty} \psi(s)^{n-3} s\,ds = \infty \quad \text{при} \quad n > 3.$$

Доказательство теоремы 4.1: *Достаточность*. Пусть u и z — те же функции, что и в лемме 3.1. В силу следствия 3.1 $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$ $(x \in G)$ если $z(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Допустим, что предел $z(\infty)$ положителен. Так как $z'(\infty) = 0$ и при больших σ справедливо неравенство $z(\sigma) > z(\infty)/2$, то интегрируя уравнение (3.1) от σ до ∞, находим

$$-z'(\sigma) \geqq \frac{k}{2} z(\infty) \int_{\sigma}^{\infty} \operatorname{cap}(F_\mu \setminus F_{\mu+1})\, d\mu.$$

Отсюда следует оценка

$$z(t) - z(\infty) \geqq \frac{k}{2} z(\infty) \int_t^{\infty} d\sigma \int_{\sigma}^{\infty} \operatorname{cap}(F_\mu \setminus F_{\mu+1})\, d\mu$$

$$= \frac{k_0}{2} z(\infty) \int_t^{\infty} (\mu - t) \operatorname{cap}(F_\mu \setminus F_{\mu+1})\, d\mu.$$

Поэтому $\int^{\infty} \mu \operatorname{cap}(F_\mu \setminus F_{\mu+1})\, d\mu < \infty$, что равносильно (4.1).

Необходимость будет установлена при помощи следующей леммы об оценках функции Неймана $N(x, y)$ в полуцилиндре.

Лемма 4.1: *Пусть $y \in \overline{G}$ и $N(x, y)$ — исчезающее при $x \to \infty$ и любом фиксированном y решение задачи*

$$-\Delta_x N(x, y) = \delta(x - y) - \lambda(x) \text{ в } G, \qquad \frac{\partial N(x, y)}{\partial \nu_x} = 0 \text{ на } \partial G \setminus \{y\},$$

где $\lambda \in C_0^\infty(\overline{G})$, $\int_G \lambda(x)\, dx = 1$. Пусть еще γ_1^2 — первое положительное собственное число оператора Лапласа в ω с однородным краевым условием Неймана на $\partial\omega$ и $|\omega| = \operatorname{mes}_{n-1} \omega$.

Существуют такие положительные постоянные $\varkappa$ и k, зависящие от n, ω и λ, что

(i) $|N(x, y)| \leqq k\, e^{-\gamma_1(x_n - y_n)}$ *при* $x_n - y_n > \varkappa$,

(ii) $\left| N(x, y) + \dfrac{x_n - y_n}{|\omega|} \right| \leqq k\, e^{\gamma_1(x_n - y_n)}$ *при* $y_n - x_n > \varkappa$,

(iii) *в зоне $|x - y| < \varkappa$ отношение N к фундаментальному решению оператора Лапласа в $\mathbf{R}^n$ ограничено сверху и отделено от нуля положительными константами.*

Отложив оправдание этих свойств до конца параграфа, проведем доказательство необходимости условия (4.1). Пусть

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) \operatorname{cap}(F_j \setminus F_{j+1}) < \infty. \tag{4.2}$$

Предположим, что бесконечно удаленная точка регулярна. Поскольку умножение решения задачи Зарембы в G_t на гладкую функцию в $\overline{G}$ с носителем в $\overline{G}_t$, равную единице в окрестности бесконечности, приводит к решению аналогичной задачи в G, то бесконечно удаленная точка регулярна и для полуцилиндра G_t при любом $t > 0$. Следовательно, можно с самого начала считать сумму ряда (4.2) достаточно малой. Пусть

$$F_j \setminus F_{j+1} = \bigcup_{k=1}^{L} F_j^{(k)} \text{ с } \operatorname{diam} F_j^{(k)} < \frac{\varkappa}{4}, \quad F_j^{(k_1)} \cap F_j^{(k_2)} = \emptyset \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2.$$

Здесь $\varkappa$ — та же константа, что и в формулировке леммы 4.1. Так как $\operatorname{cap} F_j^{(k)} \leqq \operatorname{cap}(F_j \setminus F_{j+1})$, то сумма $\sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) \sum_{k=1}^{L} \operatorname{cap} F_j^{(k)}$ достаточно мала. Обозначим через $\mu_j^{(k)}$ равновесную меру множества $F_j^{(k)}$ (см. [7: гл. II]) и введем потенциал

$$V_j^{(k)}(x) = \int_{F^{(k)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y),$$

где N — функция Неймана из леммы 4.1. Из определения функции N следует, что потенциал $V_j^{(k)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V_j^{(k)}(x) = \int_{F_j^{(k)}} \lambda(x)\, d\mu_j^{(k)}(y) = \lambda(x) \operatorname{cap} F_j^{(k)} \quad \text{в } G \tag{4.3}$$

и краевому условию

$$\partial V_j^{(k)}/\partial\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial G \setminus F_j^{(k)}. \tag{4.4}$$

Ограничимся случаем $n > 2$; при $n = 2$ следует всюду заменить $c\,|x-y|^{2-n}$ фундаментальным решением оператора $-\triangle + 1$. В силу леммы 4.1

$$|V_j^{(k)}(x)| \leqq k \int\limits_{F_j^{(k)}} \frac{d\mu_j^{(k)}(y)}{|x-y|^{n-2}} \qquad (x \in G_{j-1} \setminus G_j),$$

из леммы 4.1/(i) получаем оценку

$$|V_j^{(k)}(x)| \leqq k \operatorname{cap} F_j^{(k)} \qquad (x \in G_{j+1}),$$

а из леммы 4.1/(ii) оценку

$$|V_j^{(k)}(x)| \leqq c \int\limits_{F^{(k)}} (y_n + 1)\, d\mu_j^{(k)}(y) \leqq k(j+1) \operatorname{cap} F_j^{(k)} \qquad (x \in G \setminus G_{j-1}).$$

Так как

$$\int\limits_{F_j^{(k)}} \frac{d\mu_j^{(k)}(y)}{|x-y|^{n-2}} \leqq 1 \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

(см.[7: с. 175]), то из этих оценок вытекает

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{L} V_j^{(k)} \leqq k\left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \sum_{k=1}^{L} \operatorname{cap} F_j^{(k)}\right).$$

Имеем

$$\int\limits_G (\operatorname{grad} U)^2\, dx = \int\limits_{\partial G} d\mu(\xi) \int\limits_{\partial G} d\mu(\eta) \int\limits_G \operatorname{grad}_x N(x,\xi) \operatorname{grad}_x N(x,y)\, dx,$$

где $\mu = \sum\limits_{j,k} \mu_j^{(k)}$. Используя определение функции N, получаем

$$\int\limits_G \operatorname{grad}_x N(x,\xi) \operatorname{grad}_x N(x,\eta)\, dx = N(\xi,\eta) - \int\limits_G \lambda(x) N(x,\eta)\, dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_G (\operatorname{grad} U)^2\, dx = \int\limits_{\partial G} U(\xi)\, d\mu(\xi) - \mu(G) \int\limits_G \lambda(x) U(x)\, dx.$$

Так как мера μ конечна, а функция U ограничена, то U имеет конечный интеграл Дирихле. Кроме того, согласно (4.3) и (4.4), U — решение задачи

$$\Delta U(x) = \lambda(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{L} \operatorname{cap} F_j^{(k)} \ \text{в}\ G, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \ \text{на}\ \partial G \setminus F.$$

Из леммы 4.1/(iii) получаем

$$V_j^{(k)}(x) = k \int\limits_{F_j^{(k)}} \frac{d\mu_j^{(k)}(y)}{|x-y|^{n-2}} \quad \text{при} \quad \varrho(x, F_j^{(k)}) < \frac{\varkappa}{2}$$

(ϱ — расстояние). Поэтому

$$V_j^{(k)}(x) \geqq k_0 = \text{const} > 0 \quad \text{для квази-всех } x \in F_j^{(k)}. \tag{4.5}$$

Если же $\varrho(x, F_j^{(k)}) \geqq \varkappa/2$, то из леммы 4.1 вытекает

$$|V_j^{(k)}(x)| \leqq k(j+1)\,\mu_j^{(k)}(F_j^{(k)}) \leqq k(j+1)\operatorname{cap} F_j^{(k)}. \tag{4.6}$$

Пусть $x \in F_{j_0}^{(k_0)}$. Представим $U(x)$ в виде

$$U(x) = \sum_{j,k}{}' \int_{F_j^{(k)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y) + \sum_{j,k}{}'' \int_{F_j^{(k)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y),$$

где в первую сумму попадают те j и k, для которых множества $F_j^{(k)}$ имеют непустое пересечение с $\varkappa/2$-окрестностью $O_{j_0}^{(k_0)}$ множества $F_{j_0}^{(k_0)}$. Имеем

$$\sum_{j,k}{}' \int_{F_j^{(k)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y) = \int_{F_{j_0}^{(k_0)}} N(x, y)\, d\mu_{j_0}^{(k_0)}(y)$$
$$+ \sum_{(j,k)\neq(j_0,k_0)}{}' \int_{F_j^{(k)}\cap O_{j_0}^{(k_0)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y) + \sum_{(j,k)\neq(j_0,k_0)} \int_{F_j^{(k)}\setminus O_{j_0}^{(k_0)}} N(x, y)\, d(\mu_j^{(k)}y).$$

В силу (4.5) первый интеграл справа не меньше, чем k_0, и в силу леммы 4.1/(iii) каждый из интегралов по $F_j^{(k)} \cap O_{j_0}^{(k_0)}$ неотрицателен. Из леммы 4.1 следует неравенство

$$\left| \int_{F_j^{(k)}\setminus O_{j_0}^{(k_0)}} N(x, y)\, d\mu_j^{(k)}(y) \right| \leqq k \operatorname{cap} F_j^{(k)}.$$

Согласно (4.6) интеграл по $F_j^{(k)}$ в сумме $\sum''$ не превосходит $k(j+1)\operatorname{cap} F_j^{(k)}$. Итак,

$$U(x) \geqq k - k\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{L}\operatorname{cap} F^{(k)} \geqq \frac{k_0}{2} \quad (x \in F_{j_0}^{(k_0)}).$$

Так как j_0 и k_0 произвольны, то $U(x) \geqq k_0/2$ квази-всюду на F. Пусть для определенности точка $x' = 0$ удалена от $\partial\omega$ на расстояние 1. Тогда любая точка $(0, x_n)$, $x_n > 1$, удалена на расстояние 1 от множества F. В силу (4.6)

$$|U(0, x_n)| = \sum_{j,k} |V_j^{(k)}(0, x_n)| \leqq k_1 \sum_{j,k} (j+1)\operatorname{cap} F_j^{(k)}.$$

Последнюю сумму с самого начала можно было считать меньшей, чем $k_0/4k_1$. Поэтому $U(0, x_n) < k_0/4$. Обозначим через ξ бесконечно дифференцируемую функцию в $\bar{G}$, неотрицательную, равную единице при $x_n \geqq 2$ и нулю при $x_n \leqq 1$. Так как

$$\int_G \operatorname{grad} U \operatorname{grad} v\, dx = 0 \quad \left(v \in \mathring{L}_2^1(G; F)\right),$$

то функция $V = (U - k_0/2)\,\xi$ удовлетворяет равенству

$$\int_G \operatorname{grad} V \operatorname{grad} v\, dx = f(v) := \int_G \operatorname{grad} \xi (U \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} U)\, dx \tag{4.7}$$

где f — линейный функционал на пространстве $\mathring{L}_2^1(G; F)$, сосредоточенный на множестве $\{x \in G: 1 \leqq x_n \leqq 2\}$. Обозначим через S функцию из $\mathring{L}_2^1(G; F)$, удовлетворяющую равенству (4.7) при всех $v \in \mathring{L}_2^1(G; F)$. Так как разность $V - S$ является гармонической функцией в G, подчинена однородному условию Неймана на $\partial G \setminus F$ и квази-всюду на F неотрицательна, то по лемме 2.1 она неотрицательна в области G. Поскольку, по предположению, бесконечно удаленная точка регулярна, то $S(x) \to 0$ при $x \to \infty$ $(x \in G)$. С другой стороны, при $x_n > 2$ имеем $S(0, x_n) \leqq V(0, x_n) = U(0, x_n) - k_0/2 \leqq -k_0/4$. Полученное противоречие показывает, что бесконечно удаленная точка иррегулярна ∎

Доказательство леммы 4.1: Обозначим через Λ решение задачи Неймана $\Delta\Lambda = \lambda$ в G, $\partial\Lambda/\partial\nu = 0$ на ∂G, $\Lambda(x) = O(x_n)$ при $x_n \to \infty$. Так как $\int\limits_G \lambda\, dx = 1$, то $\Lambda(x) = |\omega|\, x_n + \text{const} + O(e^{-\gamma_1 x_n})$, где $|\omega|$ — $(n-1)$-мерная мера ω. Это известное соотношение проверяется либо методом фурье, либо при помощи преобразования Лапласа по x_n. Пусть $\Gamma(x, y)$ — фундаментальное решение задачи Неймана в цилиндре $\omega \times \mathbf{R}^1$, т.е. решение задачи

$$-\Delta_x \Gamma(x, y) = \delta(x - y) \quad (x, y \in \mathbf{R}^1), \quad \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial \nu_x} = 0$$

$$(x \in \partial\omega \times \mathbf{R}^1,\ y \in \omega \times \mathbf{R}^1),$$

допускающее оценку $O(|x_n|)$ при $|x_n| \to \infty$. Методом Фурье получаем для Γ представление

$$\Gamma(x', x_n; y', y_n)$$

$$= \frac{|x_n - y_n|}{2\,|\omega|} + \text{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x')\,\varphi_k(y')}{2\gamma_k^2}\, e^{-\gamma_k|x_n - y_n|},$$

где $\{\gamma_k^2\}$ и $\{\varphi_k\}$ — последовательность положительных собственных чисел и ортонормированная последовательность собственных функций оператора Лапласа в ω с однородным условием Неймана на $\partial\omega$. Ряд в правой части сходится в некотором слабом смысле, уточнять который нет необходимости. В силу известной оценки $|\varphi_k| \leqq k_0 \gamma_k^M$ (k_0, M — положительные константы) имеем

$$\left|\Gamma(x, y) - \frac{|x_n - y_n|}{2\,|\omega|} - \text{const}\right| \leqq k\, e^{-\gamma_1|x - y|} \quad \text{при} \quad |x_n - y_n| > \varkappa.$$

Справедливость свойства (iii) для функции Γ можно считать известной (в основу доказательства можно положить тот факт, что фундаментальное решение задачи Неймана в полупространстве есть сумма фундаментального решения оператора Лапласа в $\mathbf{R}^n$ и его отражения в граничной гиперплоскости). Остается заметить, что

$$N(x, y) = \Gamma(x', x_n, y', y_n) + \Gamma(x', -x_n, y', y_n) - \Lambda(x) + \text{const} \blacksquare$$

§ 5. Оценки функции Грина и гармонической меры для задачи Зарембы

Настоящий параграф содержит некоторую количественную информацию о решениях задачи Зарембы.

Лемма 5.1: *Пусть $f = 0$ на $G \setminus G_\tau$ и u — решение задачи Зарембы. Тогда*

$$\int\limits_\omega u(x)^2\, dx' \geqq \frac{Z(x_n)}{Z(y_n)} \int\limits_\omega u(y)^2\, dy' \quad \textit{при} \quad \tau > x_n > y_n.$$

Доказательство близко к доказательству леммы 3.1 и мы лишь кратко наметим его. Подставляя в (1.4) ,,срезающую'' функцию, аналогично (3.3) получаем

$$\int\limits_{G \setminus G_\sigma} (\operatorname{grad} u)^2\, dx = \frac{\mathfrak{F}'(\sigma)}{2} \qquad (0 < \sigma < \tau,\ \mathfrak{F}(\sigma) = \|u\|^2_{L_2(S_\sigma)}).$$

Отсюда, так же как (3.5) из (3.3), выводится неравенство

$$\int_\omega dx' \int_0^\sigma [u_t^2 + k\mathfrak{E}(t)\, u^2]\, dt \leqq \mathfrak{F}'(\sigma), \qquad u_t(x', t) = \frac{\partial u(x', t)}{\partial t}.$$

Из сказанного в конце § 2 вытекает, что функционал

$$\xi \to \int_0^\sigma \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + k\mathfrak{E}(t)\, \xi^2\right] dt,$$

определенный на функциях, удовлетворяющих условию $\xi(\sigma) = u(x', \sigma)$, достигает минимума на решении $t \to u(x', \sigma)\, Z(t)/Z(\sigma)$ уравнения (3.1) и этот минимум равен $u(x', \sigma)\, Z'(\sigma)/Z(\sigma)$. Отсюда выводим оценку $\big(Z'(\sigma)/Z(\sigma)\big)\, \mathfrak{F}(\sigma) \leqq \mathfrak{F}'(\sigma)$. Интегрируя это неравенство, заканчиваем доказательство ▌

Следствие 5.1 (Принцип Фрагмена-Линделёфа): *Если u — решение задачи Зарембы и f — функционал с ограниченным носителем, то справедлива следующая альтернатива: если u имеет конечный интеграл Дирихле, то*

$$\overline{\lim_{x_n \to \infty}} \frac{|u(x)|}{z(x_n)^{1/2}} < \infty, \tag{5.1}$$

в противном случае

$$\overline{\lim_{x_n \to \infty}} \frac{\|u(\cdot, x_n)\|_{L_2(\omega)}}{Z(x_n)^{1/2}} > 0.$$

Доказательство: Для того, чтобы получить (5.1), достаточно сослаться на следствие 3.1. Пусть u — решение задачи Зарембы с бесконечным интегралом Дирихле. Обозначим через v решение той же задачи с конечным интегралом Дирихле и применим к разности $u - v$ лемму 5.1. Так как $z(x_n) = o\big(Z(x_n)\big)$ и v удовлетворяет неравенству (3.2), то следствие доказано ▌

Пусть $y = (y', y_n) \in G$. Назовем *функцией Грина задачи Зарембы* решение задачи

$$-\Delta_x g(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{при} \quad x \in G,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial G \setminus F, \quad g(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in F,$$

имеющее конечный интеграл Дирихле вне любой окрестности точки y. Уравнение и условие Неймана на $\partial G \setminus F$ следует понимать в смысле интегрального тождества

$$\int_G \operatorname{grad}_x g(x, y) \operatorname{grad} v(x)\, dx = v(y) \qquad \big(v \in C_0^\infty(\bar{G} \setminus F)\big),$$

где условие Дирихле на F должно быть выполнено квази-всюду. Выделяя из g фундаментальное решение оператора Лапласа, умноженное на „срезающую" функцию с носителем вблизи точки y и используя однозначную разрешимость задачи Зарембы в классе $\mathring{L}_2^1(G, F)$, получаем существование и единственность функции g. Пусть g_0 — функция Грина задачи Дирихле в области G. Так как $\partial g_0/\partial \nu \geqq 0$ на ∂G, то к разности $g - g_0$ можно применить лемму 2.1. Следовательно, $g \geqq g_0$ на G и тем более $g \geqq 0$. Следующее предложение содержут точечные оценки функции g.

Предложение 5.1: *Функция Грина задачи Зарембы допускает в зоне* $|x_n - y_n| > 1$ *оценки*

$$g(x, y) \leqq \begin{cases} k\big(z(x_n)/z(y_n)\big)^{1/2}, & \text{если} \quad x_n > y_n + 1, \\ k\big(z(y_n)/z(x_n)\big)^{1/2}, & \text{если} \quad y_n > x_n + 1. \end{cases}$$

Кроме того, в зоне $|x_n - y_n| \leqq 1$ *справедливы оценки*

$$g(x, y) \leqq \begin{cases} k\,|x - y|^{2-n} & \text{при} \quad n > 2, \\ k \log(2/|x - y|) & \text{при} \quad n = 2. \end{cases}$$

Доказательство: Два последних неравенства хорошо известны, и мы не будем останавливаться на их стандартном выводе, основанном на лемме 2.1. Два первых неравенства непосредственно вытекают из последних и следствия 3.1 ∎

Замечание: Из предложения 5.1 и представления решения задачи

$$-\Delta u = f \text{ на } G, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial G \setminus F, \quad u = 0 \text{ на } F$$

при помощи функции Грина следуют различные оценки для u. Нетрудно проверить, например, что при условии $|f(x)| \leqq F(x_n)$ на G имеем

$$|u(x)| \leqq k \left(z(x_n)^{1/2} \int_0^{x_n} z(t)^{-1/2} F(t)\, dt + z(x_n)^{-1/2} \int_{x_n}^{\infty} z(t)^{1/2} F(t)\, dt \right).$$

Пусть $\mathring{C}(F)$ — снабженное нормой $\|u\|_{\mathring{C}(F)} = \sup\{|u(x)|: x \in F\}$ пространство непрерывных функций, стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$. Через $\mathring{C}^\infty(F)$ обозначим пространство сужений на F функций из пространства $C_0^\infty(\bar{G})$ гладких функций на $\bar{G}$ с компактными носителями. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta v = 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial G \setminus F, \qquad v = \varphi \text{ на } F. \tag{5.2}$$

Если $\varphi \in \mathring{C}^\infty(F)$, то эта задача немедленно сводится к рассмотренной в § 1 и поэтому однозначно разрешима в классе функций с конечной нормой (1.2). В силу леммы 2.1 из неравенств $0 \leqq \varphi \leqq 1$ на F следуют неравенства $0 \leqq u \leqq 1$ на $G \setminus F$. Поэтому решение задачи (5.2) представимо в виде

$$v(x) = \int_F \varphi(y)\, H(x, dy), \tag{5.3}$$

где $H(x, e)$ — мера множества $e \subset F$, $0 \leqq H \leqq 1$. Это равенство позволяет распространить обратный оператор задачи (5.2) на пространство $\mathring{C}(F)$. Функции из области значений полученного расширения оператора (5.3) будем называть *решениями задачи* (5.2) *с непрерывными данными Дирихле.*

Предложение 5.2: *Если* $x_n > s$, *то*

$$H(x, F \setminus F_s) \leqq k\big(z(x_n)/z(s)\big)^{1/2}. \tag{5.4}$$

Доказательство: Поскольку $0 \leqq H \leqq 1$, то достаточно получить (5.4) при условии $x_n > s + 2$. Пусть φ — любая функция из $\mathring{C}^\infty(F)$ с носителем в $F \setminus F_{s+1}$. Согласно следствию 3.1

$$\left| \int_F \varphi(y)\, H(x, dy) \right| \leqq k \left(\frac{z(x_n)}{z(s)} \right)^{1/2} \max_{F \setminus F_s} |\varphi|,$$

что в силу произвольности функции φ приводит к (5.4) ∎

Следствие 5.2: *Пусть $\varphi \in \mathring{C}(F)$ и $\gamma(s) = \sup \{|\varphi(x)| : x \in F_s\}$. Тогда для решения задачи* (5.2) *с непрерывными данными Дирихле справедлива оценка*

$$|v(x)| \leqq \gamma(x_n) + kz(x_n)^{1/2} \int_0^{x_n} \frac{|d\gamma(s)|}{z(s)^{1/2}} \qquad (x \in \bar{G} \setminus F).$$

Доказательство: В силу (5.3)

$$|v(x)| \leqq \int_F \gamma(y_n)\, H(x, dy) \leqq \gamma(x_n) + \int_F [\gamma(y_n) - \gamma(x_n)]_+ \, H(x, dy),$$

где w_+ — положительная часть w. Последний интеграл можно переписать в виде $\int_0^{x_n} [\gamma(s) - \gamma(x_n)]\, dH(x, F \setminus F_s)$. Поэтому

$$|v(x)| \leqq \gamma(x_n) - \int_0^{x_n} H(x, F \setminus F_s)\, d\gamma(s).$$

Остается применить неравенство (5.4) ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Adams, D. R.: Lectures on L_p-potential theory. Dept. of Math. Univ. of Umeå. Preprint Nr. 2 (1981), 1—74.

[2] Агмон, С., Дуглис, А., и Л. Ниренберг: Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. Москва: Изд-во Иностр. лит-ы 1962.

[3] Вержбинский, Г. М., и В. Г. Мазья: Асимптотическое поведение решений уравнений второго порядка вблизи границы I. Сиб. мат. ж. **12** (1971), 1217—1249.

[4] Hedberg, L. I.: Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem. Acta math. **147** (1981), 237—264.

[5] Керимов, Т. М., Мазья, В. Г., и А. А. Новрузов: Аналог критерия Винера для задачи Зарембы в цилиндрической области. Функц. анализ и его прил-ия **16** (1982) 4, 70—71.

[6] Kufner, A., John, O., and S. Fučik: Function Spaces. Prague: Academia 1977.

[7] Ландкоф, Н. С.: Основы современной теории потенциала. Москва: Изд-во Наука 1966.

[8] Мазья, В. Г.: О регулярности на границе решений эллиптических уравнений и конформного отображения. Докл. Акад. Наук СССР **152** (1963), 1297—1300.

[9] Мазья, В. Г.: Пространства С. Л. Соболева. Ленинград: Изд-во ЛГУ 1985.

[10] Moser, J. A New Proof of de Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations. Comm. Pure and Appl. Math. **13** (1960), 457—468.

[11] Федорюк, М. В.: Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Наука 1983.

[12] Хартман, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Изд-во Мир 1970.

Manuskripteingang 10. 04. 1986

VERFASSER:

Т. М. Керимов и А. А. Новрузов

Проф. Д-р Владимир Гилелвич Мазья
ул. Петра Алексеева д. 3, кв. 21
СССР-190031 Ленинград