Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (2) 1988, S. 141–148

Бифуркационные значения параметров в задаче о вынужденных колебаниях в системах управления с задержками

Д. И. Петров

Es wird eine Gleichung behandelt, die die Dynamik von Steuerungssystemen mit Verzögerung beschreibt. Mit Hilfe allgemeiner Sätze der nichtlinearen Analysis werden hinreichende Bedingungen für die Existenz eines regulären asymptotischen Verzweigungspunktes sowohl für T-periodische als auch für positive T-periodische Lösungen gefunden.

Рассматривается уравнение, описывающее динамику систем управлений с запаздыванием. На основании общих теорем нелинейного анализа найдены достаточные условия существования правильной асимптотической точки бифуркации как в задаче о вынужденных T-периодических решениях, так и в задаче о положительных T-периодических решениях.

An equation describing the dynamic of systems for control with delay is considered. Using general theorems of nonlinear analysis sufficient conditions are obtained for existence of regular asymptotic point of bifurcation in the problems for forced T-periodic and for positive T-periodic solutions.

1. Постановка задачи. Будем изучать задачу о вынужденных T-периодических колебаниях в системе, динамика которой описывается (см. [1, 6]) уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt};\lambda\right)x(t) = M\left(\frac{d}{dt};\lambda\right)\left\{\gamma(\lambda)\,x(t) + \varphi\big[t, x(t), x\big(t - h_1(t)\big), \dots, x\big(t - h_k(t)\big); \lambda\big]\right\}. \tag{1.1}$$

Здесь

$$L(p;\lambda) = p^n + a_1(\lambda)\,p^{n-1} + \cdots + a_n(\lambda),$$

$$M(p;\lambda) = b_0(\lambda)\,p^m + b_1(\lambda)\,p^{m-1} + \cdots + b_m(\lambda).$$

Функция $\gamma(\lambda)$ и коэффициенты многочленов L и M непрерывны по $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$; справедливо неравенство $n > m$; $b_0(\lambda) \neq 0$ и $a_n(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$. Функция $\varphi(t, x, y_1, \dots, y_k; \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных, T-периодична по переменной t и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\ \sup_{t, y_1, \dots, y_k; \lambda} \frac{|\varphi(t, x, y_1, \dots, y_k; \lambda)|}{|x|} = 0. \tag{1.2}$$

Запаздывания h_j $(j = 1, \dots, k)$ будем считать непрерывными, T-периодичными и удовлетворяющими оценкам $0 < \alpha \leqq h_j(t) \leqq \beta < T$.

Через $\mathbf{C}^0$ обозначим пространство непрерывных на $[0, T]$ функций, для которых $x(T) = x(0)$. Следуя например [3], назовем число $\lambda_* \in (\lambda', \lambda'')$ *правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о T-периодических решениях уравнения* (1.1), если при каждом $\varepsilon > 0$ множество $N(\lambda_*, \varepsilon)$ всех T-периодических $\mathbf{C}^0$-решений уравнения (1.1) при $\lambda \in [\lambda', \lambda''] \cap (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon)$

а) непусто и

б) имеет непустое пересечение с границей $\partial\Omega$ каждой ограниченной области Ω, содержащей некоторый шар $S_{\varrho(\varepsilon)} = \{x \in \mathbf{C}^0 \colon \|x\| \leqq \varrho(\varepsilon)\}$.

Далее, назовем число λ_* *правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о положительных T-периодических решениях уравнения* (1.1), если при каждом $\varepsilon > 0$ множество $N_+(\lambda_*, \varepsilon)$ всех положительных T-периодических $\mathbf{C}^0$-решений уравнения (1.1) при $\lambda \in [\lambda', \lambda''] \cap (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon)$

а) непусто и

б) имеет непустое пересечение с границей $\partial\Omega$ каждой ограниченной области $\Omega \supset S_{\varrho(\varepsilon)}$.

Ниже будут приведены достаточные условия существования правильной асимптотической точки бифуркации двух задач о вынужденных периодических колебаниях. Отметим, что впервые Э. Хопф [2] предложил метод расчета периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, рождающихся из состояния равновесия. Вопросы, которые рассматриваются в этой работе, относятся к глобальной теории бифуркации.

2. Вынужденные периодические колебания. Сначала приведем вспомогательное утверждение и эквивалентное операторное уравнение.

Теорема I (М. А. Красносельский [3: с. 484]): *Пусть в вещественном банаховом пространстве E действует нелинейный оператор $A(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{R})$, $A(\lambda) = A_1(\lambda) + A_2(\lambda)$, где $A_1(\lambda)$ линейный вполне непрерывный оператор, а для оператора $A_2(\lambda)$ справедливо равенство*

$$\lim_{\|x\|_E \to \infty} \sup_{\lambda} \|A_2(\lambda)\|_E / \|x\|_E = 0. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что в каждой окрестности числа λ_* существуют числа λ_1 и λ_2, для которых 1 не является собственным числом операторов $A_1(\lambda_1)$ и $A_1(\lambda_2)$, и что

$$(-1)^{\beta(\lambda_1) + \beta(\lambda_2)} < 0, \tag{2.2}$$

где через $\beta(\lambda)$ обозначена сумма кратностей вещественных и больших чем 1 собственных значений оператора $A_1(\lambda)$. Тогда λ_* является правильной асимптотической точкой бифуркации для уравнения $x = A(x; \lambda)$.

Перейдем к вопросу об эквивалентном операторном уравнении. Рассмотрим числа $x(l) = L(2l\pi i/T; \lambda_*)$ $\left(l = 0, \pm 1, \ldots; i = \sqrt{-1}\right)$. Так как $n < \infty$, то только конечное число из них может быть равно нулю. Положим

$$r_0 = \min \{|\varkappa(l)| \colon \varkappa(l) \neq 0\} \quad \text{и} \quad L_1(p; \lambda) = L(p; \lambda) + r_1,$$

где $r_1 \in (0, r_0/2)$ и $a_n(\lambda)\,[a_n(\lambda) + r_1] > 0$. Тогда все числа $\varkappa_1(l) = L_1(2l\pi i/T; \lambda_*)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$ будут отличны от нуля. Действително, если $\varkappa(l) = 0$, то $\varkappa_1(l) = r_1 > 0$; если $\varkappa(l) \neq 0$, то из определения r_0 следует, что $|\varkappa(l)| \geqq r_0$ и поэтому $|\varkappa_1(l)| > |\varkappa(l)| - r_1 > r_0/2$. Так как коэффициенты многочлена $L(p; \lambda)$ непрерывны по λ, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что из $|\lambda - \lambda_*| \leqq \varepsilon_0$ вытекает отличие от нуля всех чисел $\varkappa_1(l; \lambda) = L_1(2l\pi i/T; \lambda)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$. Следовательно, для каждого $\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_0, \lambda_* + \varepsilon_0]$ определены импульсно-частотные характеристики (см., например, [6]) линейных звенев с передаточными функциями

$$W_1(p;\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)\, M(p;\lambda) + r_1}{L_1(p;\lambda)} \quad \text{и} \quad W_2(p;\lambda) = \frac{M(p;\lambda)}{L_1(p;\lambda)},$$

которые обозначим соответственно через $G_1(t, T;\lambda)$ и $G_2(t, T;\lambda)$. Рассмотрим линейные интегральные операторы

$$G_1(\lambda)\, x(t) = \int_0^T G_1(t-\tau, T;\lambda)\, x(\tau)\, d\tau$$

и

$$G_2(\lambda)\, x(t) = \int_0^T G_2(t-\tau, T;\lambda)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Каждый из них действует и вполне непрерывен и в пространстве $\mathfrak{L}_2[0, T]$, и в пространстве $\mathrm{C}[0, T]$ при каждом фиксированном $\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_0, \lambda_* + \varepsilon_0]$. Из непрерывности коэффициентов функций W_1 и W_2 вытекает непрерывная зависимость этих операторов по норме от параметра λ. Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$[L(p;\lambda) + r_1]\, x(t) = [\gamma(\lambda)\, M(p;\lambda) + r_1]\, x(t) + M(p;\lambda)\, \varphi[t, x(t), x(t-h_1(t)), \ldots, x(t-h_k(t));\lambda],$$

которое будем рассматривать при $\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_0, \lambda_* + \varepsilon_0]$. Оно эквивалентно операторному уравнению

$$x = G_1(\lambda)\, x + G_2(\lambda)\, \Phi(x;\lambda) \tag{2.3}$$

в пространстве C^0, где $\Phi(x(t);\lambda) = \varphi(t, x(t), S_{h_1}x(t), \ldots, S_{h_k}x(t);\lambda)$, а $S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}$ операторы T-периодического продолжения. Действительно, если x_* T-периодическое решение уравнения (1.1), то $x_*(t - h_j(t)) = S_{h_j}x_*(t)$ $(j = 1, \ldots, k)$ для $t \in [0, T]$ и следовательно $x_* = G_1(\lambda)\, x_* + G_2(\lambda)\, \Phi(x_*, \lambda)$. Наоборот, если y_* T-периодическая функция, то $\varphi[t, y_*(t), y_*(t-h_1(t)), \ldots, y_*(t-h_k(t));\lambda] = \varphi(t, y_*(t), S_{h_1}y_*(t), \ldots, S_{h_k}y_*(t);\lambda)$, откуда легко следует эквивалентность.

Теперь перейдём к достаточному условию существования точки бифуркации. Следующая лемма является простым следствием общих теорем [3].

Лемма: *Пусть выполнено условие* (1.2) *и число* λ_* *является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о T-периодических решениях уравнения* (1.1). *Тогда для некоторого целого числа* l_0 *выполнено равенство* $L(2l_0\pi i/T;\lambda_*) = \gamma(\lambda_*)\, M(2l_0\pi i/T;\lambda_*)$.

В силу этой леммы при поиске тех значений $\lambda \in (\lambda', \lambda'')$, которые являются точками бифуркации в задаче о периодических решениях, нужно при каждом $l = 0, 1, \ldots$ изучить уравнение

$$L\left(\frac{2l\pi i}{T};\lambda\right) - \gamma(\lambda)\, M\left(\frac{2l\pi i}{T};\lambda\right) = 0. \tag{2.4}$$

Так как $n > m$, то оно не имеет решений при достаточно больших l. Дальше рассмотрим скалярную функцию

$$\mu(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)\, b_m(\lambda)}{a_n(\lambda)} - 1 \qquad (\lambda' < \lambda < \lambda'').$$

Уравнение $\mu(\lambda) = 0$ — это уравнение (2.4) для $l = 0$.

Теорема 1: *Пусть* $\mu(\lambda_*) = 0$ $(\lambda_* \in (\lambda', \lambda''))$, *функция* μ *принимает в каждой окрестности точки* λ_* *значения разного знака и уравнение* (2.4) *не имеет решений ни при одном* $l = 1, 2, \ldots$ *при значениях параметра* $\lambda \neq \lambda_*$, *но близких к* λ_*. *Тогда* λ_* *является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о* T-*периодических решениях уравнения* (1.1).

Доказательство: Рассмотрим оператор A,

$$A(\lambda)\, x = G_1(\lambda)\, x + G_2(\lambda)\, \Phi(x; \lambda).$$

Он действует в пространстве $\mathbf{C}^0$ и вполне непрерывен по совокупности переменных. Справедлива оценка

$$\|\Phi(x; \lambda)\|_{\mathbf{C}^0} \leqq \eta(\varrho) \qquad \left(\|x\|_{\mathbf{C}^0} \leqq \varrho; \quad \lambda \in (\lambda', \lambda'')\right),$$

в которой

$$\eta(\varrho) = \max_{\substack{|x|, |y_1|, \ldots, |y_k| \\ \lambda' < \lambda < \lambda'', 0 \leqq t \leqq T}} |\varphi(t, x, y_1, \ldots, y_k; \lambda)|,$$

причем из условия (1.2) вытекает соотношение $\eta(\varrho)/\varrho \to 0$ при $\varrho \to \infty$. Поэтому оператор $A_2(\lambda) = G_2(\lambda)\, \Phi(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.1). Следовательно, для применения теоремы I осталось исследовать собственные значения линейного оператора $G_1(\lambda)$. Возьмем произвольно малую окрестность $\{\lambda : |\lambda - \lambda_*| < \delta < \varepsilon_0\}$ точки λ_*. Без ограничения общности можно считать число δ настолько малым, чтобы при $|\lambda - \lambda_*| < \delta$ и $\lambda \neq \lambda_*$ уравнение (2.4) не имело решений ни при одном $l = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Из условий теоремы вытекает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in (\lambda_* - \delta, \lambda_* + \delta)$, для которых выполнено неравенство

$$\mu(\lambda_1)\, \mu(\lambda_2) < 0. \tag{2.5}$$

Сначала покажем, что при этих λ_1 и λ_2 число 1 не является собственным значением операторов $G_1(\lambda_1)$ и $G_1(\lambda_2)$, а потом докажем, что выполнено неравенство (2.2), где $\beta(\lambda)$ — сумма кратностей вещественных и больших чем 1 собственных значений оператора $G_1(\lambda)$. Этим доказательство теоремы будет завершено.

Допустим, что число 1 является собственным значением оператора $G_1(\lambda_1)$, т.е. уравнение $x = G_1(\lambda_1)\, x$ имеет ненулевое T-периодическое решение x_*. Из определения оператора $G_1(\lambda)$ вытекает, что x_* будет T-периодическим решением дифференциального уравнения $[L(p; \lambda_1) + r_1]\, x = [\gamma(\lambda_1)\, M(p; \lambda_1) + r_1]\, x$, т.е. $L(p; \lambda_1)\, x_* = \gamma(\lambda_1)\, M(p; \lambda_1)\, x_*$. Последнее равенство означает, что многочлен $L(p; \lambda_1) - \gamma(\lambda_1)\, M(p; \lambda_1)$ имеет по крайней мере один нуль вида $2l\pi i/T$, где l некоторое целое число. Но, как уже отмечалось, из условий теоремы вытекает, что это невозможно при $l = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Если же $l = 0$, то $\mu(\lambda_1) = 0$, что противоречит неравенству (2.5). Аналогично доказывается, что число 1 не является собственным значением оператора $G_1(\lambda_2)$.

Осталось доказать неравенство (2.2). Сначала найдем число $\beta(\lambda_1)$. Так как оператор $G_1(\lambda_1)$ нормален, то он не имеет присоединенных элементов, отвечающих какому-либо собственному значению. Поэтому кратность каждого собственного числа ν оператора $G_1(\lambda_1)$ совпадает с размерностью подпространства $E(\nu)$ решений уравнения $G_1(\lambda_1)\, x = \nu x$. Нас интересуют собственные числа большие чем 1. Так как оператор $G_1(\lambda_1)$ вполне непрерывный, то эти собственные значения могут быть только конечным числом. Пусть ν_0 одно из них. Кратность этого собственного числа совпадает с числом линейно независимых T-периодических решений уравнения с постоянными коэффициентыми

$$[L(p; \lambda_1) + r_1]\, x = \frac{1}{\nu_0}\, [\gamma(\lambda_1)\, M(p; \lambda_1) + r_1]\, x. \tag{2.6}$$

Если функция-константа не является его решением, то кратность собственного числа ν_0 будет четным числом. Если же функция-константа является его решением, то кратность собственного числа ν_0 будет нечетным числом. Допустим, что функция $x \equiv 1$ является решением уравнения (2.6). Тогда

$$a_n(\lambda_1) + r_1 = \frac{1}{\nu_0} \left[\gamma(\lambda_1)\, b_m(\lambda_1) + r_1\right], \quad \text{т.е.} \quad \nu_0 = \frac{\gamma(\lambda_1)\, b_m(\lambda_1) + r_1}{a_n(\lambda_1) + r_1}.$$

Дальше построим произведение

$$\Delta = \mu(\lambda_1) \left[\frac{\gamma(\lambda_1)\, b_m(\lambda_1) + r_1}{a_n(\lambda_1) + r_1} - 1\right],$$

которое будет положительным в силу выбора числа r_1. Действительно,

$$\Delta = [\gamma(\lambda_1)\, b_m(\lambda_1) - a_n(\lambda_1)]^2/\left[a_n(\lambda_1)\left(a_n(\lambda_1) + r_1\right)\right] > 0.$$

Следовательно, если $\mu(\lambda_1) < 0$ и $x \equiv 1$ является собственной функцией оператора $G_1(\lambda_1)$, то для соответствующего собственного числа ν_0 верна оценка $\nu_0 < 1$. В этом случае все большие чем 1 собственные числа ν оператора $G_1(\lambda_1)$ имеют четную кратность и поэтому $\beta(\lambda_1)$ является четным числом. Если же $\mu(\lambda_1) > 0$ и $x \equiv 1$ является собственной функцией оператора $G_1(\lambda_1)$, то для соответствующего собственного числа ν_0 (оно имеет нечетную кратность) верна оценка $\nu_0 > 1$ и поэтому $\beta(\lambda_1)$ является нечетным числом. Таким образом,

$$\beta(\lambda_1) = \begin{cases} 2p_1 + 1 & \text{при} \quad \mu(\lambda_1) > 0, \\ 2p_1 & \text{при} \quad \mu(\lambda_1) < 0, \end{cases}$$

где p_1 некоторое целое число. Аналогично доказывается, что

$$\beta(\lambda_2) = \begin{cases} 2p_2 + 1 & \text{при} \quad \mu(\lambda_2) > 0, \\ 2p_2 & \text{при} \quad \mu(\lambda_2) < 0, \end{cases}$$

где p_2 некоторое целое число. Из этих равенств вытекает неравенство (2.2) ∎

3. **Вынужденные положительные периодические колебания.** Сначала строим эквивалентное операторное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$x = B(x; \lambda), \tag{3.1}$$

где $B(x; \lambda)$ вполне непрерывный оператор по совокупности переменных в полуупорядоченном телесным конусом $\mathbf{K}$ банаховом пространстве $\mathbf{E}$. Пусть оператор $B(x; \lambda)$ положителен на множестве $\{x \in \mathbf{K}: \|x\| \geqq \varrho_0\}$ и его равномерная асимптотическая производная $B'(\infty; \lambda)$ непрерывно по норме зависит от параметра λ. Наконец, пусть число 1 является простым собственным значением вполне непрерывного оператора $B'(\infty; \lambda_*)$, которому отвечает нормированный собственный вектор e_0, являющийся внутренней точкой конуса $\mathbf{K}$, причем остальные собственные значения оператора $B'(\infty; \lambda_*)$ находятся в круге $\{\mu: |\mu| \leqq q\}$, $q < 1$. Из общей теории линейных операторов вытекает, что для близких к λ_* значений параметра λ оператор $B'(\infty; \lambda)$ имеет единственное простое собственное число $\chi(\lambda)$, близкое к 1; это собственное число вещественно.

Теорема II (М. А. Красносельский [5: с. 228]): *Пусть в каждой окрестности точки λ_* существуют числа λ_1 и λ_2, для которых выполнено неравенство* $[\chi(\lambda_1) - 1] \times [\chi(\lambda_2) - 1] < 0$. *Тогда λ_* является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о положительных решениях уравнения* (3.1).

Ниже эта теорема применяется для изучения периодических решений уравнения (1.1). Через $\mathbf{E}_0$ будем обозначать подпространство пространства $\mathbf{C}^0$, состоящее из функций ортогональных одномерному пространству функций-констант, т. е. $\mathbf{E}_0 = \left\{x \in \mathbf{C}^0 : \int\limits_0^T x(\tau)\, d\tau = 0\right\}$. Положим

$$Px(t) = x(t) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(\tau)\, d\tau .$$

Этот оператор P является линейным проектором на пространство $\mathbf{E}_0$ и удовлетворяет равенству $G_1(\lambda)\, Px = PG_1(\lambda)\, x$ ($x \in \mathbf{C}^0$). Если выполнено условие

$$L\left(\frac{2l\pi i}{T}; \lambda_*\right) + \gamma(\lambda_*)\, M\left(\frac{2l\pi i}{T}; \lambda_*\right) \qquad (l = 1, 2, \ldots), \tag{3.2}$$

то 1 не является собственным числом оператора $PG_1(\lambda_*)$. Действительно, если $PG_1(\lambda_*)\, x = x$, то $x \in \mathbf{E}_0$. Следовательно $Px = x$ и $G_1(\lambda_*)\, x = G_1(\lambda_*)\, Px = PG_1(\lambda_*)\, x = x$, т.е. x является собственной функцией оператора $G_1(\lambda_*)$, соответствующей собственному числу 1. Это равносильно тому, что x является T-периодическим решением уравнения $[L(p; \lambda_*) + r_1]\, x = [\gamma(\lambda_*)\, M(p; \lambda_*) + r_1]\, x$, т.е. уравнения $L(p; \lambda_*)\, x = \gamma(\lambda_*)\, M(p; \lambda_*)\, x$. В силу условия (3.2) эти решения могут быть только функции-константы и поэтому $x \notin \mathbf{E}_0$. Следовательно число 1 не является собственным значением оператора $PG_1(\lambda_*)$. Снова выберем такое $\varepsilon_1 > 0$, что 1 не является собственным числом ни одного оператора $PG_1(\lambda)$ при $\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_1, \lambda_* + \varepsilon_1]$. Тогда при $\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_1, \lambda_* + \varepsilon_1]$ определены линейные операторы $R(\lambda) = [I - PG_1(\lambda)]^{-1}$. Положим $Q = I - P$. Тогда уравнение (2.3) задачи о T-периодических решениях уравнения (1.1) можно переписать в виде

$$x = G_1(\lambda)\, Qx + R(\lambda)\, G_2(\lambda)\, \Phi(x; \lambda). \tag{3.3}$$

Теперь перейдём к достаточному условию существования точки бифуркации. Отметим, что достаточные условия существования точки рождения в бесконечности периодических решений других классов уравнений найдены в [4].

Теорема 2: *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условие* (3.2). *Тогда* λ_* *является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о положительных* T*-периодических решениях уравнения* (1.1).

Доказательство: Рассмотрим множество

$$\mathbf{K} = \left\{x \in \mathbf{C}^0 : \int\limits_0^T x(\tau)\, d\tau \geqq 0,\ \|Px\|_{\mathbf{C}^0} \leqq \alpha\, \|Qx\|_{\mathbf{C}^0}\right\},$$

где α некоторое положительное число. Оно является конусом в пространстве $\mathbf{C}^0$. При достаточно малом α все элементы конуса $\mathbf{K}$ (кроме нулевого) являются строго положительными функциями. Обозначим оператор определенный правой стороной (3.3) через $B(x; \lambda)$, т. е.

$$B(x; \lambda) = G_1(\lambda)\, Qx + R(\lambda)\, G_2(\lambda)\, \Phi(x; \lambda). \tag{3.4}$$

Он вполне непрерывен по совокупности переменных. Для доказательства теоремы покажем, что уравнение (3.1) с этим оператором удовлетворяет условиям теоремы II. Так как $\|R(\lambda)\| \leqq d$ $(\lambda \in [\lambda_* - \varepsilon_1, \lambda_* + \varepsilon_1], d = \text{const})$, то из (1.2) вытекает равенство

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_*|<\varepsilon_1} \frac{\|B(x;\lambda) - G_1(\lambda)\,Qx\|}{\|x\|} = 0, \tag{3.5}$$

которое означает, что оператор $G_1(\lambda)\,Q$ является равномерной асимптотической производной оператора $B(x;\lambda)$, т. е. $B'(\infty;\lambda) = G_1(\lambda)\,Q$.

Перейдем к изучению спектра линейного оператора $B'(\infty;\lambda)$. Так как при каждом фиксированном λ оператор $G_1(\lambda)\,Q$ преобразует все пространство C^0 в одномерное пространство функций-констант, то при каждом λ его спектр состоит из нулевой точки и из одного простого собственного значения $\chi(\lambda)$, которому отвечает собственная функция $e_0 \equiv 1$. Найдем это собственное значение. Так как $Qe_0 = e_0$, то из $G_1(\lambda)\,Qe_0 = \chi(\lambda)\,e_0$ вытекает, что $G_1(\lambda)\,e_0 = \chi(\lambda)\,e_0$, т. е. $\chi(\lambda)\,[L(p;\lambda) + r_1]\,e_0 = [\gamma(\lambda)\,M(p;\lambda) + r_1]\,e_0$. Но $e_0 \equiv 1$ и поэтому

$$\chi(\lambda)\,[a_n(\lambda) + r_1] = \gamma(\lambda)\,b_m(\lambda) + r_1, \quad \text{т. е.} \quad \chi(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)\,b_m(\lambda) + r_1}{a_n(\lambda) + r_1}.$$

Из условий теоремы вытекает существование в каждой окрестности точки λ_* таких чисел λ_1 и λ_2, что

$$\left[\frac{\gamma(\lambda_1)\,b_m(\lambda_1)}{a_n(\lambda_1)} - 1\right]\left[\frac{\gamma(\lambda_2)\,b_m(\lambda_2)}{a_n(\lambda_2)} - 1\right] < 0.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$[\gamma(\lambda_1)\,b_m(\lambda_1) - a_n(\lambda_1)]\,[\gamma(\lambda_2)\,b_m(\lambda_2) - a_n(\lambda_2)] < 0. \tag{3.6}$$

Положим $D = [\chi(\lambda_1) - 1]\,[\chi(\lambda_2) - 1]$, т. е.

$$D = \frac{[\gamma(\lambda_1)\,b_m(\lambda_1) - a_n(\lambda_1)]\,[\gamma(\lambda_2)\,b_m(\lambda_2) - a_n(\lambda_2)]}{[a_n(\lambda_1) + r_1]\,[a_n(\lambda_2) + r_1]}.$$

В силу выбора числа r_1 и в силу неравенства (3.6) выполнено неравенство $D < 0$.

Для завершения доказательства осталось показать положительность оператора (3.4) при больших по норме функциях $x \in \mathbf{K}$. Предположим противное. Тогда существуют последовательности $\{\lambda_s\} \subset [\lambda_* - \varepsilon_1, \lambda_* + \varepsilon_1]$ и $\{x_s\} \subset \mathbf{K}$ такие, что $\|x_s\| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $B(x_s;\lambda_s) \notin \mathbf{K}$ для $s > s_0$. Легко видеть, что $QB(x_s;\lambda_s) > 0$ для $s > s_0$ и поэтому для таких s справедлива оценка $\|PB(x_s;\lambda_s)\| > \alpha\,\|QB(x_s;\lambda_s)\|$. Так как $PG_1(\lambda_s)\,Qx_s = 0$ и $QG_1(\lambda_s)\,Qx_s = G_1(\lambda_s)\,Qx_s = \chi(\lambda_s)\,Qx_s$, то эта оценка эквивалентна неравенству

$$\|PR(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\| > \alpha\,\|\chi(\lambda_s)\,Qx_s + QR(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\|.$$

Поэтому

$$\|\chi(\lambda_s)\,Qx_s\| \leqq \frac{1}{\alpha}\,\|PR(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\| + \|QR(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\|$$
$$\leqq (\|P\|/\alpha + \|Q\|)\,\|R(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\|. \tag{3.7}$$

Но $\chi(\lambda_*) = 1$, а ε_1 можно взять достаточно малым. Тогда можно предполагать, что выполнено неравенство $|\chi(\lambda)| \geqq 1/2$ для $|\lambda - \lambda_*| \leqq \varepsilon_1$. Тогда из (3.7) вытекает оценка

$$\|Qx_s\| \leqq 2(\|P\|/\alpha + \|Q\|)\,\|R(\lambda_s)\,G_2(\lambda_s)\,\Phi(x_s;\lambda_s)\|.$$

Но $\|x_s\| \leqq \|Px_s\| + \|Qx_s\| \leqq (1 + \alpha)\, \|Qx_s\|$, поэтому

$$\|x_s\| \leqq 2(1 + \alpha)\, (\|P\|/\alpha + \|Q\|)\, \|R(\lambda_s)\, G_2(\lambda_s)\, \Phi(x_s; \lambda_s)\|,$$

т. е.

$$\frac{\|R(\lambda_s)\, G_2(\lambda_s)\, \Phi(x_s; \lambda_s)\|}{\|x_s\|} \geqq \frac{1}{2(1 + \alpha)\, (\|P\|/\alpha + \|Q\|)} > 0.$$

Последнее противоречит неравенству (3.5) ∎

Примеры. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} + 3\,\frac{d}{dt} + 1\right) x(t) = \left(2\,\frac{d}{dt} + 1\right) \Big[(1 + \lambda)\, x(t) + \varphi\big(t, x(t), x(t - h_1(t)), \ldots, x(t - h_k(t)); \lambda\big)\Big],$$

где нелинейная функция $\varphi(t, x, y_1, \ldots, y_k; \lambda)$ является 2π-периодической по t, непрерывной и ограниченной, а запаздывания $h_1, \ldots, h_k$ — непрерывными и 2π-периодическими функциями. Из теоремы 1 вытекает, что $\lambda = 0$ является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о 2π-периодических решениях этого уравнения.

Из теоремы 2 вытекает, что $\lambda = 0$ является правильной асимптотической точкой бифуркации задачи о положительных 2π-периодических решениях уравнения

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} + 4\,\frac{d}{dt} + 1\right) x(t) = \left(2\,\frac{d}{dt} + 1\right) \Big[(1 + \lambda)\, x(t) + \varphi\big(t, x(t), x(t - h_1(t)), \ldots, x(t - h_k(t)); \lambda\big)\Big].$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Воронов, А. А.: Основы теории автоматического регулирования и управления. Москва: Изд-во Высшая школа 1977.

[2] Hopf, E.: Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung. Ber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. (Leipzig) 94 (1942) 19, 15—25.

[3] Красносельский, М. А., и П. П. Забрейко: Геометрические методы нелинейного анализа. Москва: Изд-во Наука 1975.

[4] Красносельский, А. М., и М. Г. Юмагулов: Бифуркационные значения параметров в задаче о вынужденных колебаниях систем автоматического регулирования. Докл. Акад. Наук Тадж. ССР 11 (1984), 679—682.

[5] Красносельский, М. А., Лифшиц, Е. А., и Е. А. Соболев: Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов. Москва: Изд-во Наука 1985.

[6] Розенвассер, Е. Н.: Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений. Москва: Изд-во Наука 1969.

Manuskripteingang: 15. 07. 1986; in revidierter Fassung 21. 05. 1987

VERFASSER:

Д-р Д. И. Петров
Центр Математики ВТУ им. А. Кынчева
ул. Комсомольская 8
7004 Русе (Болгария)