Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (2) 1988, S. 171–183

Ein abstraktes nichtlineares Cauchy-Kowalewskaja-Theorem mit singulären Koeffizienten II[1])

M. Reissig

Es werden neue qualitative und quantitative Eigenschaften von abstrakten nichtlinearen Cauchy-Kowalewskaja-Problemen mit singulären Koeffizienten dargestellt. Mit Hilfe der Methode der Banachraum-Skalen wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Cauchy-Problems für eine Operatorgleichung in der Skala gezeigt, wobei die Cauchy-Bedingung außerhalb der Singularität $t = 0$ gegeben ist. In einer Teilskala existiert dann die stetige Lösung bis in die Singularität.

Представляются новые качественные и количественные свойства абстрактных нелинейных проблем Коши-Ковалевской с сингулярными коэффициентами. С помощью шкалы Банаховых пространств показывается существование и единственность решения проблемы Коши для операторного уравнения в шкале. Условие Коши дано вне сингулярности $t = 0$. В подшкале существует непрерывное решение вплоть до сингулярности.

New qualitative and quantitative properties of abstract nonlinear Cauchy-Kowalewskaja problems with singular coefficients are represented. By applying the method of the Banach space scales the existence and uniqueness of the solution for a Cauchy problem of an operator equation in the scale can be shown. The Cauchy condition is given outside the singularity $t = 0$. In a subscale there exists the continuous solution up to singularity.

Die Bedeutung und Tragfähigkeit abstrakter Cauchy-Kowalewskaja-Theoreme kommen mit den Resultaten der Arbeit [9] klar zum Ausdruck. Die dort untersuchten Beispiele zeigen, daß durch die Betrachtung abstrakter Probleme Lösbarkeitsaussagen über Gleichungen mathematisch unterschiedlicher Natur aus einer allgemeinen Theorie erzielt werden können.

In [3] wird das abstrakte nichtlineare Cauchy-Kowalewskajasche Anfangswertproblem $dw/dt = \mathcal{L}(t, w)$, $w(0) = 0$ untersucht. Eine Weiterentwicklung der Theorie erfolgt in [5]. Dort werden abstrakte Cauchy-Kowalewskaja-Probleme mit singulären Koeffizienten der Gestalt

$$t^l \frac{dw}{dt} + cw = t^{l-\sigma} \mathring{\mathcal{L}}_1(t, w) + \mathcal{L}_2(t, w) \tag{1}$$

betrachtet, wobei $l \geqq 0$, $0 \leqq \sigma < 1$ reelle und c eine komplexe Konstante sind. Für den stark singulären Fall ($l \geqq 1$) werden dabei in der Banachraum-Skala Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für (1) unter den Voraussetzungen $\operatorname{Re} c > 0$ und $t^l\, dw/dt \to 0$ für $t \to 0$ bewiesen. Schon anhand der gewöhnlichen Differentialgleichung $t^l\, dw/dt + cw = 0$ erkennt man, daß der Fall $l \geqq 1$ und $\operatorname{Re} c < 0$ vollkommen neue Verhaltensweisen aufzeigt — trotz der Bedingung $t^l\, dw/dt \to 0$ für $t \to 0$ erhält man in $t = 0$ eine Lösungsverzweigung. Interessieren uns Lösungen im beschränkten Intervall $[0, T]$, dann wird jeder Lösungsast durch eine Cauchy-Bedingung in $t = T$ eindeutig festgelegt. Diese einfache Vorüberlegung soll die Möglichkeit der Erweite-

[1]) Teil I dieser Arbeit erschien in Bd. 6 (1) 1987, S. 35–41, dieser Zeitschrift.

rung der Beweismethoden auf stark singuläre Cauchy-Kowalewskaja-Probleme vom Typ (1) mit $\operatorname{Re} c < 0$ motivieren. Für diese wird mit Hilfe der Methode der Banachraum-Skalen ein Cauchy-Problem untersucht, wobei die Cauchy-Bedingung in $t = T$ gegeben ist. Die Lösungen existieren dabei im abgeschlossenen Intervall $[0, T]$.

Die Formulierung der Voraussetzungen an $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ und des Satzes der Arbeit erfolgt im Abschnitt 1. Als Hilfsmittel für den Beweis des Satzes, der im Abschnitt 3 geführt wird, dient die im Abschnitt 2 mittels eines Iterationsschemas konstruierte Fundamentalfolge. Die im Satz beschriebenen Skaleneffekte werden im Abschnitt 4 geometrisch veranschaulicht. Schließlich wird im Abschnitt 5 gezeigt, wie sich Lösbarkeitsaussagen für Systeme singulärer partieller Differentialgleichungen aus dem Satz ergeben.

1. Es sei $(B_s, \|\cdot\|_s)_{0<s\leq 1}$ eine Banachraum-Skala. Für gewisse positive reelle η und R sei $\mathcal{M}^s_{\eta,R} = \{t \in \mathbf{R}_1 : |t| < \eta\} \times \mathcal{K}_w{}^s$ mit $\mathcal{K}_w{}^s = \{w \in B_s : \|w\|_s < R\}$ [2]), und $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ seien in $\mathcal{M}^s_{\eta,R}$ definierte Operatoren mit den folgenden Eigenschaften (K, L, N, P — gewisse positive Konstanten; w, v — beliebige Elemente aus $\mathcal{K}_w{}^s$; $w_T \in \mathcal{K}_w{}^s$ fest):

($\mathbf{B}_1$) $\mathcal{L}_1 : \mathcal{M}^s_{\eta,R} \to B_{s'}$ ist stetig im Falle $s' < s$ und

$$\|\mathcal{L}_1(t, w) - \mathcal{L}_1(t, v)\|_{s'} \leqq \frac{P}{s - s'} \|w - v\|_s, \quad \|\mathcal{L}_1(t, w_T)\|_s \leqq \frac{K}{1 - s};$$

($\mathbf{B}_2$) $\mathcal{L}_2 : \mathcal{M}^s_{\eta,R} \to B_s$ ist stetig und

$$\|\mathcal{L}_2(t, w) - \mathcal{L}_2(t, v)\|_s \leqq L \|w - v\|_s, \qquad \|\mathcal{L}_2(T, w_T) - \mathcal{L}_2(t, w_T)\|_s \leqq N(T - t).$$

Dann gilt die folgende Aussage.

Satz: *Es seien $l \geqq 1$ und c eine komplexe Konstante mit $\operatorname{Re} c < 0$, im Falle $l > 1$ sei $T^{l-1} < -\operatorname{Re} c/l$ und außerdem soll für $t = 0$ eine Lösung $\overline{w}(0)$ der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(0, w)$ mit $\|\overline{w}(0)\|_1 < R$ existieren. Die Operatoren $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ mögen den Bedingungen ($\mathbf{B}_1$) und ($\mathbf{B}_2$) genügen, und es sei $-L/\operatorname{Re} c < 1$. Dann existieren positive Konstanten a und $b = b(T)$ so, daß das Cauchy-Problem*

$$t^l \frac{dw}{dt} + cw = t^l \mathcal{L}_1(t, w) + \mathcal{L}_2(t, w), \qquad w(T) = w_T, \tag{2}$$

genau eine stetige Lösung w besitzt mit $w(t) \in \mathcal{K}_w{}^s$ für $T - t < a(1 - s)$, $T < a$ und $t \geqq 0$. Wegen $T < a$ gibt es demnach genau eine stetige Lösung w in der Teilskala $(B_s, \|\cdot\|_s)_{0<s<s_0}$, $s_0 = 1 - T/a$, im Intervall $[0, T]$, die in $(0, T]$ stetig differenzierbar ist. Dabei genügt w_T der Bedingung $\|w_T - \overline{w}(T)\|_1 \leqq b(T)$, wobei $\overline{w}(T) \in \mathcal{K}_w{}^1$ eine Lösung der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(T, w)$ ist.

Bemerkung 1: Die eigentliche Zielstellung, Lösungen von (2) im abgeschlossenen Intervall $[0, T]$ zu konstruieren, wird nur in einer Teilskala realisiert. Wie das zugehörige Skalendiagramm (s. Abb. 3) zeigt, bleiben aber die Skaleneffekte in der gesamten Skala erhalten.

2. Für den Beweis des Satzes benötigen wir die beiden folgenden Hilfssätze.

Lemma 1: *Es sei $l \geqq 1$, g_T sei beliebig und c eine komplexe Konstante mit $\operatorname{Re} c < 0$. Für jede Funktion $g \in \mathcal{C}[0, T]$ existiert dann genau eine Lösung $w \in \mathcal{C}[0, T]$ des Cauchy-Problems $t^l\, dw/dt + cw = g$, $w(T) = g_T$.*

---

[2]) Die t-Variable fließt nicht in die Normierung ein.

Beweis: Es soll hier nur die Lösungsdarstellung

$$w = \begin{cases} \displaystyle\int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\left(-g(\tau)\right) d\tau \\ \displaystyle + g_T \exp\left(\frac{c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{T}\right)^{l-1}\right]\right) \qquad \text{für } l > 1, \\ \displaystyle\int_t^T \tau^{-1} \exp\left(c \ln\left(\frac{\tau}{t}\right)\right)\left(-g(\tau)\right) d\tau \\ \displaystyle + g_T \exp\left(-c \ln\left(\frac{t}{T}\right)\right) \qquad \text{für } l = 1 \end{cases} \tag{3}$$

angegeben werden ∎

Lemma 2: *Der Operator $\mathcal{L}_2(t, w): \mathcal{M}^s_{r,R} \to B_s$ möge der Bedingung* ($\mathbf{B}_2$) *genügen, und für $t = 0$ möge eine Lösung $\overline{w}(0)$ der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(0, w)$ mit $\|\overline{w}(0)\|_1 < R$ existieren. Dann gibt es ein $d > 0$ und eine stetige Funktion $\overline{w}(t)$, die für $t \in [0, d]$ der Operatorgleichung $cw = \mathcal{L}_2(t, w)$ und der Normbedingung $\|\overline{w}(t)\|_1 < R$ genügt.*

Beweis: Wir untersuchen die Fixpunktgleichung $w = \tilde{\mathcal{L}}_2(t, w)$ mit $\tilde{\mathcal{L}}_2(t, w) = \mathcal{L}_2(t, w)/c$. Es sei $\mathcal{M} = \{w \in B_1 : \|w - \overline{w}(0)\|_1 \leqq R_1\}$ mit $R_1 < R - \|\overline{w}(0)\|_1$. Für jedes feste t mit $|t| < \eta$ ist wegen $L < |c|$ die Abbildung $\tilde{\mathcal{L}}_2(t, w)$ kontrahierend auf $\mathcal{M}$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\mathcal{L}}_2$ in einer Umgebung von $\left(0, \overline{w}(0)\right)$ existiert ein $d > 0$ derart, daß

$$\left\|\tilde{\mathcal{L}}_2\left(t, \overline{w}(0)\right) - \tilde{\mathcal{L}}_2\left(0, \overline{w}(0)\right)\right\|_1 \leqq (1 - L/|c|)\, R_1$$

für $t \in [0, d]$ gilt. Damit bekommt man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{L}}_2(t, w) - \overline{w}(0)\|_1 &\leqq \left\|\tilde{\mathcal{L}}_2(t, w) - \tilde{\mathcal{L}}_2\left(t, \overline{w}(0)\right)\right\|_1 \\ &\quad + \left\|\tilde{\mathcal{L}}_2\left(t, \overline{w}(0)\right) - \tilde{\mathcal{L}}_2\left(0, w(0)\right)\right\|_1 \\ &\leqq L\, \|w - \overline{w}(0)\|_1/|c| + (1 - L/|c|)\, R_1 \leqq R_1, \end{aligned}$$

d. h., $\tilde{\mathcal{L}}_2(t, w)$ stellt für $t \in [0, d]$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{M}$ auf sich dar, die demnach wegen ihrer Kontraktivität für $t \in [0, d]$ einen Fixpunkt $\overline{w}(t)$ besitzt. Es seien $t_1, t_2 \in [0, d]$ beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\overline{w}(t_1) - \overline{w}(t_2)\|_1 &= \left\|\tilde{\mathcal{L}}_2\left(t_1, \overline{w}(t_1)\right) - \tilde{\mathcal{L}}_2\left(t_2, \overline{w}(t_2)\right)\right\|_1 \\ &\leqq \left\|\tilde{\mathcal{L}}_2\left(t_1, \overline{w}(t_1)\right) - \tilde{\mathcal{L}}_2\left(t_2, \overline{w}(t_1)\right)\right\|_1 + L\, \|\overline{w}(t_1) - \overline{w}(t_2)\|_1/|c|. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $\tilde{\mathcal{L}}_2$ folgt damit unmittelbar die Stetigkeit von $w(t)$ in $[0, d]$ ∎

Aus (2) ergibt sich das Iterationsschema

$$t^l \frac{dw^{(k)}}{dt} + cw^{(k)} = t^l \mathcal{L}_1(t, w^{(k-1)}) + \mathcal{L}_2(t, w^{(k-1)}),$$

$$w^{(0)} = w_T.$$

Im folgenden soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen $\{w^{(k)}(t)\}$ eine Fundamentalfolge in $\mathcal{K}_{w^s}$ bildet. Mit (3) und der Forderung $w^{(k)}(T) = w_T$ bekommt man für $l > 1$

$$w^{(k)} = \int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\left(-\tau^l \mathcal{L}_1(\tau, w^{(k-1)}) - \mathcal{L}_2(\tau, w^{(k-1)})\right) d\tau$$

$$+ w_T \exp\left(\frac{c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{T}\right)^{l-1}\right]\right)$$

für alle $k \geqq 1$ und $t \geqq 0$. Daraus folgen mit $v^{(k)} = w^{(k+1)} - w^{(k)}$ und nach Anwendung der Abschätzungstechniken bei Integrationen im Banachraum die Abschätzungen

$$\|v^{(0)}(t)\|_s \leqq \int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\left(\tau^l \|\mathcal{L}_1(\tau, w_T)\|_s\right.$$

$$+ \|\mathcal{L}_2(T, w_T) - \mathcal{L}_2(\tau, w_T)\|_s$$

$$\left. + \left\|\mathcal{L}_2(T, w_T) - \mathcal{L}_2(T, \overline{w}(T))\right\|_s + |c| \, \|w_T - \overline{w}(T)\|_s\right) d\tau$$

und

$$\|v^{(k)}(t)\|_s \leqq \int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\left(\tau^l \|\mathcal{L}_1(\tau, w^{(k)})\right.$$

$$\left. - \mathcal{L}_1(\tau, w^{(k-1)})\|_s + \|\mathcal{L}_2(\tau, w^{(k)}) - \mathcal{L}_2(\tau, w^{(k-1)})\|_s\right) d\tau .$$

Durch Anwendung von $(\mathbf{B}_1)$ und $(\mathbf{B}_2)$ ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\|v^{(0)}(t)\|_s \leqq \left(\frac{K}{1-s} + \frac{N}{|\operatorname{Re} c|}\right)(T - t) + \frac{L + |c|}{|\operatorname{Re} c|} \|w_T - \overline{w}(T)\|_s$$

$$\times \left(1 - \exp\left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{T}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\right) \tag{4}$$

und mit $s < s(\tau) < 1$ die Abschätzung

$$\|v^{(k)}(t)\|_s \leqq \int_t^T \frac{P}{s(\tau) - s} \|v^{(k-1)}(\tau)\|_{s(\tau)} \, d\tau$$

$$+ L \int_t^T \|v^{(k-1)}(\tau)\|_s \, \tau^{-l} \exp\left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) d\tau . \tag{5}$$

Zur Auswertung der Integrale in (5) benötigen wir die Funktionale

$$\lambda_k := \sup_{\substack{0 < s < 1, t \geqq 0 \\ T - t < a_{k+1}(1-s)}} \|v^{(k)}\|_s \, (t) \left(\frac{a_k(1-s)}{T-t} - 1\right) \tag{6}$$

mit $\|v^{(k)}\|_s(t) = \sup\{\|v^{(k)}(\tau)\|_s : \tau \in [t, T]\}$. Die Folge $\{a_k\}$ wird wie in [4] nach der Vorschrift $a_{k+1} = a_k(1 - 1/(k+2)^2)$ mit $0 < a_0 < \eta$ beliebig gewählt. Mit $s(\tau) = (1 + s - (T - \tau)/a_k)/2$ und $T - t < a_k(1 - s)$ folgen die Beziehungen

$$\|v^{(k-1)}(\tau)\|_{s(\tau)} \leqq \|v^{(k-1)}\|_{s(\tau)}(\tau) \leqq \frac{\lambda_{k-1}(T-\tau)}{\dfrac{a_{k-1}}{2}\left(1 - s - \dfrac{(T-\tau)}{a_k}\right) - (T-\tau)}.$$

Benutzen wir schließlich $2a_k/a_{k-1} - 1 < 1$, dann ergibt sich mit der letzten Beziehung die Ungleichung

$$\int_t^T \frac{\|v^{(k-1)}\|_{s(\tau)}}{s(\tau) - s}\,d\tau \leqq 4\lambda_{k-1}a_k\left(\frac{a_k(1-s)}{T-t} - 1\right)^{-1}.$$

Durch Einsetzen in (5) bekommt man für $v^{(k)}$ die Normabschätzung

$$\|v^{(k)}(t)\|_s \leqq 4\lambda_{k-1}a_k P\left(\frac{a_k(1-s)}{T-t} - 1\right)^{-1} + \frac{L}{|\mathrm{Re}\,c|}\|v^{(k-1)}\|_s(t).$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung fällt monoton bezüglich t für $T - t < a_k(1 - s)$. Diese Eigenschaft und (6) sichern die Abschätzung

$$\lambda_k \leqq \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\,c|} + 4a_0P\right)\lambda_{k-1} \leqq \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\,c|} + 4a_0P\right)^k \lambda_0. \tag{7}$$

Nun muß noch λ_0 abgeschätzt werden. Nach (4) und (6) ist

$$\lambda_0 \leqq a_0\left(K + \frac{N}{|\mathrm{Re}\,c|}\right) + a_0\frac{L + |c|}{|\mathrm{Re}\,c|}\sup_{\substack{0<s<1,t\geqq 0\\ T-t<a_1(1-s)}}(1-s)\,\|w_T - \overline{w}(T)\|_s$$

$$\times\left(1 - \exp\left(\frac{-\mathrm{Re}\,c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{T}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\right)\Big/(T-t).$$

Im Fall $l > 1$ kann man zeigen, daß unter der Voraussetzung $T^{l-1} < -\mathrm{Re}\,c/l$ die Funktion

$$g: t \to \left(1 - \exp\left(\frac{-\mathrm{Re}\,c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{T}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\right)\Big/(T-t)$$

im Intervall $[0, T]$ ihr Maximum in $t = T$ annimmt, und es gilt an dieser Stelle $g(T) = -\mathrm{Re}\,c/T^l$. Für den Fall $l = 1$ erhält man

$$\max_{\substack{T-t<a_1(1-s)\\ t\geqq 0}} \frac{1 - \exp(\mathrm{Re}\,c\ln(T/t))}{T-t} = \max(1, -\mathrm{Re}\,c)/T.$$

Damit ist gezeigt, daß im Fall $l > 1$

$$\lambda_0 \leqq a_0\left(K + \frac{N}{|\mathrm{Re}\,c|}\right) + a_0\left(\frac{L+|c|}{|\mathrm{Re}\,c|}\right)\sup_{0<s<1}\|w_T - \overline{w}(T)\|_s(1-s)(-\mathrm{Re}\,c/T^l)$$

ist. Wählt man schließlich $b = b(T) = -T^l/\mathrm{Re}\,c$, dann ergibt sich damit

$$\lambda_0 \leqq a_0\big(K + (N + L + |c|)/|\mathrm{Re}\,c|\big). \tag{8}$$

Für $l = 1$ erhält man diese Abschätzung auf gleiche Weise. Wegen $b(T) \leqq a_0$ erhalten wir aus (6) und (7) die folgende Normabschätzung für die $(k+1)$-te Näherung $w^{(k+1)}$ in der Skala $(B_s, \|\cdot\|_s)$:

$$\|w^{(k+1)}\|_s \leqq \lambda_0 \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} + 4a_0P\right)^j \left((j+2)^2 - 1\right) + \|\overline{w}(T)\|_s + a_0.$$

Wenn jetzt sogar

$$\lambda_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} + 4a_0P\right)^j \left((j+2)^2 - 1\right) + a_0 < R - \|\overline{w}(T)\|_1 \tag{9}$$

gilt, dann liegen nach (6) für $k \geqq 0$ und $t \in [\tilde{T}, T]$ mit $\tilde{T} \geqq 0$ und $\tilde{T} > T - a(1-s)$ die Näherungen $w^{(k)}(t)$ in $\mathcal{K}_w{}^s$; dabei wird mit a der positive Limes der Folge $\{a_k\}$ bezeichnet. Nach Lemma 2 existiert eine Konstante h derart, daß $\|\overline{w}(t)\|_1 \leqq h$ für $t \in [0, d]$ gilt. Somit ergibt sich (9) unmittelbar aus der Abschätzung

$$\lambda_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} + 4a_0P\right)^j \left((j+2)^2 - 1\right) + a_0 < R - h. \tag{10}$$

Analog wie in [4, 5] sichern (8) und die Voraussetzung $L/|\mathrm{Re}\, c| < 1$ die Existenz eines a_0 mit $0 < a_0 < \min(\eta, d)$, das der Bedingung (10) genügt. Da uns Lösungen im Intervall $[0, T]$ interessieren, folgt notwendigerweise $\tilde{T} = 0$ bzw. $T < a$. Damit haben wir eine Folge von Näherungen $\{w^{(k)}(t)\}$ konstruiert mit der Eigenschaft, daß für $T - t < a(1-s)$, $t \geqq 0$ und $T < \min\left((-\mathrm{Re}\, c/l)^{1/(l-1)}, a\right)$ $\left(T - t < a(1-s),\right.$ $\left.T < a \text{ und } t \geqq 0\right)$, falls $l > 1$ $(l = 1)$ ist, die Glieder dieser Folge in $\mathcal{K}_w{}^s$ liegen. Wegen der Abschätzung

$$\|w^{(p)} - w^{(q)}\|_s = \left\|\sum_{j=q}^{p-1} v^{(j)}\right\|_s \leqq \lambda_0 \sum_{j=q}^{p-1} \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} + 4a_0P\right)^j \left((j+2)^2 - 1\right) < \varepsilon$$

für alle $p, q \geqq n_0(\varepsilon)$ ist $\{w^{(k)}(t)\}$ eine Fundamentalfolge in $\mathcal{K}_w{}^s$.

Bemerkung 2: Es soll noch einmal zusammengefaßt werden, wie man die Konstanten a und $b = b(T)$ erhält: Nach Lemma 2 kann man d und damit auch die Konstante h berechnen. Dann ergibt sich aus (8) und (10) ein positives a_0 mit $a_0 < \min(\eta, d)$. Die Konstante a erhält man als Limes der Folge $\{a_k\}$. Im Fall $l > 1$ $(l = 1)$ wird nun ein $T < \min\left(a, (-\mathrm{Re}\, c/l)^{1/(l-1)}\right)$ $(T < a)$ fixiert. Dadurch bekommt man alle $s \in (0, s_0)$, für welche $T < a(1-s)$ gilt. Außerdem hat man $\overline{w}(T)$ und damit auch $b(T)$.

3. In diesem Abschnitt beweisen wir mit Hilfe der im Abschnitt 2 konstruierten Fundamentalfolge die Aussagen der Satzes.

Beweis des Satzes: Zuerst zeigen wir die Existenz einer Lösung w von (2) in der Skala $(B_s, \|\cdot\|_s)$. Nach Abschnitt 2, insbesondere (6), (7) und (10), existiert das Grenzelement $w(t)$ der Fundamentalfolge $\{w^{(k)}(t)\}$ mit $w(t) \in \mathcal{K}_w{}^s$ für $T - t < a(1-s)$ und $t \geqq 0$. Außerdem gilt $w(T) = w_T$. Es folgt nun für $s' \in (0, 1)$ eine s'-Normabschätzung für das Integral

$$I_k = \int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right)\left(-\tau^l(\mathcal{L}_1(\tau, w^{(k)})\right.$$
$$\left. - \mathcal{L}_1(\tau, w)) - (\mathcal{L}_2(\tau, w^{(k)}) - \mathcal{L}_2(\tau, w))\right) d\tau.$$

Wegen $(\mathbf{B}_1)$ und $(\mathbf{B}_2)$ erhält man analog wie im Abschnitt 2 mit $s' < s < 1$ die Abschätzung

$$\|I_k\|_{s'} \leqq \frac{P}{s - s'} \int\limits_t^T \|w^{(k)} - w\|_s (\tau)\, d\tau + \frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} \|w^{(k)} - w\|_{s'} (t).$$

Mit den Funktionalen

$$\bar{\lambda}_k = \sup_{\substack{0<s<1,t\geqq 0\\ 0\leqq T-t<a(1-s)}} \|w^{(k)} - w\|_s (t) \left(\frac{a(1-s)}{T-t} - 1\right) \leqq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j$$

folgt daraus die Abschätzung

$$\|I_k\|_{s'} \leqq \frac{P}{s - s'} \bar{\lambda}_k \int\limits_t^T \frac{T-\tau}{a(1-s) - (T-\tau)}\, d\tau + \frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} \|w^{(k)} - w\|_{s'} (t).$$

Wegen der Beschränktheit des Integrals für $T - t < a(1 - s)$ und $t \geqq 0$ gilt $\|I_k\|_{s'} \to 0$ für $k \to \infty$, und damit ergibt sich w als Lösung der Integralgleichung

$$w = \int\limits_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) \left(-\tau^l \mathcal{L}_1(\tau, w) - \mathcal{L}_2(\tau, w)\right) d\tau$$
$$+ w_T \exp\left(\frac{c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{T}\right)^{l-1}\right]\right).$$

Mit Lemma 1 ist w dann auch eine Lösung des Cauchy-Problems (2).

Im nächsten Schritt zeigen wir, daß $\{w^{(k)}\}$ eine Folge stetiger Funktionen bezüglich t mit $T - t < a(1 - s)$ und $t \geqq 0$ ist. Trivialerweise ist $w^{(0)}$ stetig in $[0, T]$. Es seien für $0 \leqq k \leqq m$ die Näherungen $w^{(k)}(t)$ stetig bezüglich t in der s-Norm mit $T - t < a(1 - s)$, $t \geqq 0$ und $s \in (0, 1)$. Wählen wir zu einem $s \in (0, 1)$ ein $s' < s < 1$, dann stellt nach $(\mathbf{B}_1)$ und $(\mathbf{B}_2)$ die Funktion $g\colon \tau \to -\tau^l \mathcal{L}_1(\tau, w^{(m)}) - \mathcal{L}_2(\tau, w^{(m)})$ eine stetige Abbildung von B_s in $B_{s'}$ dar. Nach Anwendung von Lemma 1 erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz des Integrals in (3) für $w^{(m+1)}(t)$ und damit auch die Stetigkeit von $w^{(m+1)}(t)$ bezüglich t in der s-Norm mit $T - t < a(1 - s)$, $t \geqq 0$ und $s \in (0, 1)$. Wegen (6) und (7) ist damit die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{w^{(k)}(t)\}$ gesichert, d. h. aber $w = w(t)$ als Grenzfunktion ist stetig bezüglich t in der oben beschriebenen Menge. Wegen $(\mathbf{B}_1)$ und $(\mathbf{B}_2)$ ergibt sich aus der Stetigkeit von w in der Darstellung (2) die stetige Differenzierbarkeit bezüglich t im Intervall $(0, T]$ für alle $s \in (0, s_0)$ mit $T < a(1 - s)$.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit der Lösung w in der Skala $(B_s, \|\cdot\|_s)$ zu zeigen. Es seien also w und v zwei stetige Lösungen von (2) mit $w(t), v(t) \in \mathcal{K}_w{}^s$ für $T - t < a(1 - s)$ und $t \geqq 0$. Mit $s_1 \in (0, 1)$ beliebig sei das Funktional

$$\lambda = \sup_{\substack{0<s<s_1,\delta\leqq t\\ 0\leqq T-t<a(s_1-s)}} \|w - v\|_s \left(\frac{a(s_1 - s)}{T-t} - 1\right) \tag{11}$$

gegeben. Durch analoge Abschätzungen wie im Abschnitt 2 erhalten wir die Abschätzung

$$\|w - v\|_s \leqq 4aP \int\limits_t^T \frac{\lambda}{\left(a(s_1 - s) - (T-\tau)\right)^2}\, d\tau$$
$$+ \int\limits_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-\mathrm{Re}\, c}{l-1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) L \|w - v\|_s\, d\tau$$

und daraus die Abschätzung

$$\|w - v\|_s \leqq 4aP\lambda \left(\frac{a(s_1 - s)}{T - t} - 1\right)^{-1}$$

$$+ \int_t^T \tau^{-l} \exp\left(\frac{-\operatorname{Re} c}{l - 1}\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{t}\right)^{l-1}\right]\right) L \|w - v\|_s \, d\tau.$$

Benutzt man nun die Ungleichung

$$a(s_1 - s)/(T - t) - 1 \leqq a(s_1 - s)/(T - \tau) - 1 \qquad \text{für } \tau \in [t, T],$$

so schlußfolgert man aus der letzten Beziehung $\lambda \leqq \lambda(4a_0P + L/|\operatorname{Re} c|)$. In (11) garantieren die Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösungen $\lambda < \infty$, und daraus folgt mit der letzten Ungleichung $\lambda = 0$. Die Endlichkeit von λ folgt daraus, daß

$$\sup_{\substack{0<s<s_1,\delta\leqq t\\ 0\leqq T-t<a(s_1-s)}} \left\|\frac{(w - v)(t) - (w - v)(T)}{t - T}\right\|_s \big(a(s_1 - s) - (T - t)\big)$$

$$\leqq \sup_{\substack{0<s<s_1,\delta\leqq t\\ 0\leqq T-t<a(s_1-s)}} \left\|\frac{d(w - v)}{dt}\right\|_s \big(a(s_1 - s) - (T - t)\big)$$

$$= \sup_{\substack{0<s<s_1,\delta\leqq t\\ 0\leqq T-t<a(s_1-s)}} \frac{\|\mathcal{L}_1(t, w) - \mathcal{L}_1(t, v) + t^{-l}(\mathcal{L}_2(t, w) - \mathcal{L}_2(t, v) - c(w - v))\|_s}{\big(a(s_1 - s) - (T - t)\big)^{-1}} < \infty$$

ist. Damit ist $\|w - v\|_s = 0$ für $0 < s < s_1$, $0 \leqq T - t < a(s_1 - s)$ und $t \geqq \delta$. Da $\delta > 0$ und $s_1 \in (0, 1)$ beliebig wählbar sind, ist damit $\|w - v\|_s = 0$ für $s \in (0, 1)$, $0 \leqq T - t < a(1 - s)$ und $t > 0$. Die Differenz $w - v$ ist nach Annahme stetig bezüglich t in $[0, T]$ für $s \in (0, s_0)$. Daraus und mit obiger Aussage folgt sofort $\|(w - v)(0)\|_s = 0$ für $s \in (0, s_0)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen, wenn man noch bemerkt, daß der Beweis für den Fall $l = 1$ analog geführt wird ∎

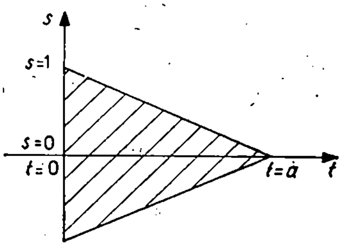

Abb. 1

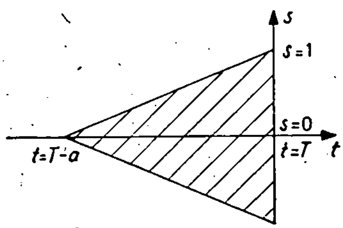

Abb. 2

4. Die Skaleneffekte des Satzes lassen sich sehr schön mit dem Skalendiagramm beschreiben. Der klassische Fall [4] liefert das Diagramm in Abb. 1. Die modifizierte Beweismethode erhält natürlich diese Struktur. Das Vorschreiben der Cauchy-Bedingung in $t = T$ führt zu einem rückläufigen Diagramm (vgl. Abb. 2).

Bei der Anwendung der modifizierten Beweismethode auf unseren konkreten Fall müssen die folgenden zwei Aussagen berücksichtigt werden:

1. Nur für $T < a$ existieren $s \in (0, s_0)$ so, daß $T < a(1 - s)$ gilt.

2. Im allgemeinen kann die Beweismethode nur für $t \geqq 0$ angewendet werden.

Das führt zu dem Skalendiagramm in Abb. 3. Gerade dieses Verhalten wird im Satz beschrieben.

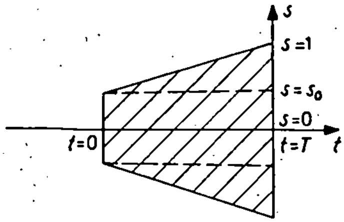

Abb. 3

5. Im letzten Abschnitt wollen wir als Anwendungsbeispiel des abstrakten Resultats Lösbarkeitsaussagen für Systeme singulärer Evolutionsgleichungen herleiten.

5.1. *Eine Skala von Banachräumen reell analytischer Funktionen*

5.1.1. *Der quasilineare Fall.* Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$t^l \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + c\vec{w} = t^l \left(A \frac{\partial \vec{w}}{\partial z^*} + B \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} + D\right) + E, \qquad \vec{w}(T) = \vec{w}_T. \tag{12}$$

Hierin seien $\vec{w} = (w_i)_n{}^T$ die gesuchte Vektorfunktion, $A = (A_{ij})_n$, $B = (B_{ij})_n$ gegebene Matrixfunktionen, $D = (D_i)_n{}^T$, $E = (E_i)_n{}^T$ und $\vec{w}_T = (w_{i,T})_n{}^T$ gegebene Vektorfunktionen. Es sei G_1 ein einfach zusammenhängendes, beschränktes, offenes und konvexes Gebiet der z-Ebene, das deren Ursprung O enthält. Dann entsteht das Gebiet G_s durch Streckung des Gebietes G_1 um den Faktor s mit dem Streckungszentrum O. Mit $\mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{C}(\overline{G}_s)$ bezeichnen wir den Raum der in G_s reell analytischen und in $\overline{G}_s$ stetigen Funktionen $w = w(z)$. Diese Bezeichnungen führen zur Banachraum-Skala $(B_s, \|\cdot\|_s) = \left(\mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{C}(\overline{G}_s), \sup_{\overline{G}_s} |\cdot|\right)$. An die Funktionen A_{ij}, B_{ij}, D_i und E_i werden folgende Voraussetzungen gestellt:

(V_1) Sämtliche Funktionen sind im Abschluß $\overline{\mathcal{M}^s_{\eta,R}}$ der Menge

$$\mathcal{M}^s_{\eta,R} = \{z \in G_s\} \times \{t: |t| < \eta\} \times \{\vec{w} \in B_s: \|\vec{w}\|_s < R\}\,^{3)}$$

definiert, in $\overline{\mathcal{M}^s_{\eta,R}}$ stetig bezüglich z und t, Lipschitz-stetig bezüglich $\vec{w}$ und in $\mathcal{M}^s_{\eta,R}$ reell analytisch in z und $\vec{w}$.

(V_2) Mit $-L/\mathrm{Re}\, c < 1$ gilt in $\overline{\mathcal{M}^s_{\eta,R}}$ die Lipschitz-Bedingung

$$\|E(z, t, \vec{w}_1) - E(z, t, \vec{w}_2)\|_s \leqq L\, \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_s.$$

(V_3) Es existiert eine in G_1 reell analytische Lösung $\vec{\vec{w}}(0)$ des Systems von Funktionalgleichungen $c\vec{w} = E(z, 0, \vec{w})$ mit $\|\vec{\vec{w}}(0)\|_1 < R$.

(V_4) Mit $\|\vec{w}_T - \vec{\vec{w}}(T)\|_1 \leqq b(T)$ ist für E die Lipschitz-Bedingung $\|E(z, T, \vec{w}_T) - E(z, t, \vec{w}_T)\|_s \leqq N(T - t)$ erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen ist unser Satz auf das Cauchy-Problem (12) anwendbar. Dabei ist noch zu bemerken, daß wegen ihrer reellen Analytizität in z die Funktion $\vec{w}$ mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel dargestellt werden kann. Durch Standardabschätzungen (s. z. B. [2]) zeigt man damit das Erfülltsein der Lipschitz-Bedingung aus (B_1) für $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial z^*$ und somit auch für $\mathcal{L}_1$ in der Banachraum-Skala $(B_s, \|\cdot\|_s)$. Es läßt sich folgende zusammenfassende Aussage formulieren.

[3]) Die Vektor- bzw. Matrixnormen müssen als Zueinander verträglich gewählt werden.

Folgerung 1: *Es sei $l \geq 1$, und c sei eine komplexe Konstante mit* $\mathrm{Re}\, c < 0$. *Im Fall $l > 1$ sei $T < (-\mathrm{Re}\, c/l)^{1/(l-1)}$. Erfüllen in* (12) *die Funktionen A_{ij}, B_{ij}, D_i und E_i die Voraussetzungen* (V_1) *bis* (V_4), *dann findet man positive Konstanten a und $b = b(T)$ so, daß genau eine in t stetige Lösung $\vec{w}$ existiert mit*

$$\vec{w}(t) \in \{\vec{w} \in \mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{C}(\overline{G}_s) \colon \|\vec{w}\|_s < R\}$$

für $T - t < a(1 - s)$, $T < a$ und $t \geq 0$. Wegen $T < a$ gibt es demnach genau eine stetige Lösung $\vec{w}$ in der Teilskala $(B_s, \|\cdot\|_s)_{0<s<s_0}$, $s_0 = 1 - T/a$, im Intervall $[0, T]$, die in $(0, T]$ von t stetig differenzierbar abhängt. Schließlich genügt $\vec{w}_T$ der Bedingung $\|\vec{w}_T - \vec{\vec{w}}(T)\|_1 \leq b(T)$.

Beispiel: Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$t^l \frac{\partial w_1}{\partial t} + c w_1 = t^l \left((2 - |w_1|^2)^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial z^*} + \exp(w_2 z) \frac{\partial w_1}{\partial z^*} + 3(2 + z w_2^* t)^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \cos(w_1^2 w_2^{*3}) \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + \sin\left(w_2 \exp(w_1^* t \sqrt{3 - t})\right),$$

$$t^l \frac{\partial w_2}{\partial t} + c w_2 = t^l \left(t \sin(|z|^2 w_1^*) \frac{\partial w_2}{\partial z^*} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z^*} + \exp(-z^*) \frac{\partial w_2}{\partial z} \right.$$

$$\left. + (1/\sqrt{3 - t}) \frac{\partial w_2}{\partial z} + (2i - w_1)^{-1} \right) + \cos(\cos t/(1 - 2z)).$$

An diesem Beispiel sollen die Voraussetzungen (V_1) bis (V_4) überprüft, die in ihnen enthaltenen Konstanten berechnet und Existenzgebiete für die Lösungen angegeben werden. Als Vektor- und Matrixnorm verwenden wir die euklidische Norm bzw. die Schur-Norm. Der Ursprung gehöre dem Gebiet G_1 an. In Abhängigkeit von den Existenzgebieten der Koeffizienten wählen wir

$$\mathcal{M}^s_{\eta,R} = \mathcal{M}^s_{1/2,1} = \{z \colon |z| < s/3\} \times \{t \colon |t| < 1/2\} \times \{\vec{w} \in B_s \colon \|\vec{w}\|_s < 1\}.$$

Man kann dann das Erfülltsein von (V_1) in dieser Menge nachweisen. Zur Ermittlung der Lipschitz-Konstanten L in (V_1) benötigen wir die Abschätzungen

$$\sup_{\mathcal{M}^1_{1/2,1}} \left| \frac{\partial}{\partial w_2} \sin\left(w_2 \exp(w_1^* t \sqrt{3 - t})\right) \right| < 26,$$

$$\sup_{\mathcal{M}^1_{1/2,1}} \left| \frac{\partial}{\partial w_1^*} \sin\left(w_2 \exp(w_1^* t \sqrt{3 - t})\right) \right| < 23.$$

Damit folgt $L \leq 40$ und daraus notwendigerweise wiederum $\mathrm{Re}\, c < -40$. Als Lösung $\vec{\vec{w}}(0)$ des Systems von Funktionalgleichungen in (V_3) erhalten wir $\vec{\vec{w}}(0) = (c^{-1} \sin(c^{-1} \cos(1 - 2z)^{-1}), c^{-1} \cos(1 - 2z)^{-1})$. Für $|c| > 40$ gilt $\|\vec{\vec{w}}(0)\|_1 < 1$. Zur Ermittlung der Lipschitz-Konstanten N in (V_4) benötigen wir die Abschätzungen

$$\sup_{\mathcal{M}^1_{1/2,1}} \left| \frac{\partial}{\partial t} \cos \frac{\cos t}{1 - 2z} \right| < 61, \qquad \sup_{\mathcal{M}^1_{1/2,1}} \left| \frac{\partial}{\partial t} \sin\left(w_2 \exp(w_1^* \sqrt{3 - t}\, t)\right) \right| < 46.$$

Damit folgt $N \leq 80$. Die Voraussetzungen (V_1) bis (V_4) sind somit vollständig überprüft. Es sei nun $c = -100$. Dann gilt $\|\vec{\vec{w}}(0)\|_1 < 1/4$. Wir wählen in Lemma 2 die Konstante $R_1 = 1/2$. Die möglichen Konstanten d ergeben sich aus der Bedingung

$$\left\| E(z, t, \vec{\vec{w}}(0)) - E(z, 0, \vec{\vec{w}}(0)) \right\|_1 \leq 30.$$

Man zeigt

$$\left\| E(z, t, \vec{\vec{w}}(0)) - E(z, 0, \vec{\vec{w}}(0)) \right\|_1 \leq 62t.$$

Damit erhält man zum Beispiel $d = 1/3$, woraus $h \leqq 3/4$ folgt. Aus der Formel (10) bestimmen wir die Konstante a_0. Dazu benötigen wir die Beziehung

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j((j+2)^2-1) \leqq 2 \sum_{j=0}^{\infty} x^j(j+1)(j+2) = 4(1-x)^{-3}.$$

Zur Berechnung der Konstanten P und K benötigen wir in $\mathcal{M}^1_{1/2,1}$ die Beziehungen $\|A(t,\vec{w})\|_s \leqq 2{,}1$; $\|B(t,\vec{w})\|_s \leqq 3{,}6$; $\|D(t,\vec{w})\|_s \leqq 1$; $\|A(t,\vec{w}) - A(t,\vec{v})\|_s \leqq 2{,}3\,\|\vec{w}-\vec{v}\|_s$; $\|B(t,\vec{w}) - B(t,\vec{v})\|_s \leqq 11{,}6\,\|\vec{w}-\vec{v}\|_s$ und $\|D(t,\vec{w}) - D(t,\vec{v})\|_s \leqq \|\vec{w}-\vec{v}\|_s$. Unter Verwendung der Gebietsfamilie $\{G_s\}$ und der Cauchyschen Integralformel für reell analytische Funktionen erhalten wir

$$\left\| \frac{\partial \vec{w}}{\partial z^*} \right\|_{s'} \leqq \frac{3}{s-s'} \|\vec{w}\|_s \quad \text{für } 0 < s' < s \leqq 1.$$

Diese Beziehungen liefern schließlich $P < 60$ und $K \leqq 18{,}1$. Wegen (10) muß $4a_0P < 3/5$ sein. Die Konstante $a_0 = 2/10^3$ erfüllt diese Ungleichung. Damit ist $a_0 < \min(1/2, 1/3)$ erfüllt, und eine Abschätzung der linken Seite von (10) kann mit (8) wie folgt vorgenommen werden:

$$\lambda_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L}{|\mathrm{Re}\, c|} + 4a_0P \right)^j ((j+2)^2-1) + a_0 \leqq 81{,}2a_0\, 0{,}48^{-3} + a_0 < 740a_0.$$

Aus (10) folgt damit $a_0 < 3{,}3/10^4$; wir wählen $a_0 = 3/10^4$. Nach [4] bekommt man für die Konstante $a = a_0/2 = 1{,}5/10^4$. Es sei nun $T = 10^{-4}$ vorgegeben. Für $l > 1$ ist die Bedingung $T^{l-1} < -\mathrm{Re}\, c/l$ erfüllt. Wegen $T < 1/3$ ist die Existenz von $\vec{\vec{w}}(T)$ gesichert. Die möglichen Anfangswerte $\vec{w}_T$ kommen aus der Kugel um $\vec{\vec{w}}(T)$ mit dem Radius $10^{-(4l+2)}$. Für $0 < s < 1/3$, $c = -100$ und $l \geqq 1$ existiert somit eine eindeutige Lösung $\vec{w} \in B_s$ des Systems der Differentialgleichungen, die der Cauchy-Bedingung $\vec{w}(T) = \vec{w}_T$ genügt und für die $\vec{w}(t) \in \{\vec{w} \in \mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{C}(\bar{G}_s) : \|\vec{w}\|_s < 1\}$ für $t \in [0, 10^{-4}]$ gilt. Außerdem ist die Lösung $\vec{w}$ stetig bezüglich t im Intervall $[0, T]$ und sogar stetig differenzierbar im Intervall $(0, T)$.

5.1.2. *Der nichtlineare Fall.* Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$t^l \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + c\vec{w} = t^l F_0\left(z, t, \vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial z^*}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial z}\right) + F_1(z, t, \vec{w}), \quad \vec{w}(T) = \vec{w}_T. \tag{13}$$

Mit den Substitutionen $\partial\vec{w}/\partial z^* = \vec{v}$ und $\partial\vec{w}/\partial z = \vec{u}$ und mit $\vec{x} = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})^T$ führt man es in das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} &t^l \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + c\vec{x} = t^l \left(A \frac{\partial \vec{x}}{\partial z^*} + B \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} + D \right) + E, \\ &\vec{x}(T) = \vec{x}_T = \left(\vec{w}_T, \frac{\partial}{\partial z^*}\vec{w}_T, \frac{\partial}{\partial z}\vec{w}_T \right)^T \end{aligned} \tag{14}$$

über. Mit Standardmethoden beweist man folgendes Lemma.

Lemma 3: *Das Chauchy-Problem* (13) *hat genau dann eine in t stetige Lösung $\vec{w}$ mit $\left(\vec{w}(t), \frac{\partial}{\partial z^*}\vec{w}(t), \frac{\partial}{\partial z}\vec{w}(t)\right) \in B_s$ für $T - t < a(1-s)$ und $t \geqq 0$, wenn das Hilfsproblem* (14) *eine in t stetige Lösung $\vec{x}$ mit $\vec{x}(t) \in B_s$ für $T - t < a(1-s)$ und $t \geqq 0$ besitzt.*

Die Zurückführung des nichtlinearen Falls auf den quasilinearen Fall liefert mit Folgerung 1 und Lemma 3 die folgende Aussage.

Folgerung 2: *Es sei $l \geqq 1$, und c sei eine komplexe Konstante mit* $\mathrm{Re}\, c < 0$. *Im Fall $l > 1$ sei $T < (-\mathrm{Re}\, c/l)^{1/(l-1)}$. Außerdem seien in* (13) *die Vektorfunktionen*

F_0 und F_1 so gewählt, daß die Koeffizienten A, B, D und E in (14) *den Voraussetzungen* (V_1) *bis* (V_4) *genügen. Dann gibt es positive Konstanten a und $b = b(T)$ so, daß genau eine in t stetige Lösung $\vec{w}$ existiert mit*

$$\vec{w}(t) \in \left\{\vec{w} \in \mathcal{H}_{z,z^*}(G_s) \cap \mathcal{C}(\bar{G}_s) : \left\| \left(\vec{w}, \frac{\partial}{\partial z^*}\vec{w}, \frac{\partial}{\partial z}\vec{w}\right) \right\|_s < R\right\}$$

für $T - t < a(1 - s)$, $T < a$ und $t \geqq 0$. Wegen $T < a$ gibt es demnach genau eine stetige Lösung $\vec{w}$ in der Teilskala $(B_s, \|\cdot\|_s)_{0<s<s_0}$, $s_0 = 1 - T/a$, im Intervall $[0, T]$, die in $(0, T]$ stetig differenzierbar von t abhängt. Außerdem genügt $\vec{w}_T$ der Bedingung

$$\left\| \left(\vec{w}_T, \frac{\partial}{\partial z^*}\vec{w}_T, \frac{\partial}{\partial z}\vec{w}_T\right) - \left(\vec{\vec{w}}(T), \frac{\partial}{\partial z^*}\vec{\vec{w}}(T), \frac{\partial}{\partial z}\vec{\vec{w}}(T)\right) \right\|_1 \leqq b(T).$$

5.2. *Weitere Banachraum-Skalen*

Neben der im Abschnitt 5.1 behandelten Banachraum-Skala existieren eine Reihe anderer Beispiele für die Anwendung unseres Satzes. Im allgemeinen bereitet der Nachweis der Lipschitz-Bedingung für $\mathcal{L}_1$ die größten Schwierigkeiten. Für Banachraum-Skalen holomorpher Funktionen, die auf dem Rand von G_s nicht notwendig stetig sind, ist eine solche Lipschitz-Bedingung für die 1. Ableitung in [3] gegeben und in [9] angewendet worden. Eine Einführung von Banachraum-Skalen für *verallgemeinerte analytische Funktionen* erfolgt in [8]. Eine solche Skala kann mit der Gebietsfamilie $\{G_s\}_{0<s\leq 1}$ aus Abschnitt 5.1 und dem Lösungsraum der Vekuaschen Differentialgleichung $lw = \partial w/\partial z^* + a(z)\,w + b(z)\,w^* = 0$ definiert werden. Die Normierung hängt dabei von den Eigenschaften der Koeffizienten a und b ab, die z. B. Hölder-stetig gewählt werden können. Für die Formulierung möglicher Cauchy-Probleme benötigen wir noch den Begriff des assoziierten Operators.

Definition: Zwei Operatoren l und $\mathcal{L}$ heißen *zueinander assoziiert*, wenn der Raum der durch $lw = 0$ definierten Funktionen durch $\mathcal{L}$ in sich abgebildet wird, d. h. wenn aus $lw = 0$ auch $l(\mathcal{L}w) = 0$ folgt.

Mit $\mathcal{L}(z, t, w) = D\,\partial w/\partial z + Aw + Bw^*$ betrachten wir das Cauchy-Problem

$$t^l\,\frac{\partial w}{\partial t} + cw = t^l\big(\mathcal{L}(z, t, w) + E\big) + Fw + G, \qquad w(T) = w_T.$$

Wann die Operatoren l und $\mathcal{L}$ zueinander assoziiert sind, wird in [7] untersucht. Unter gewissen Voraussetzungen sind die Bedingungen unseres Satzes erfüllt. Insbesondere gilt nach [8] die Lipschitz-Bedingung für $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + E$ aus ($\mathbf{B}_1$). Die ausführliche Behandlung des Cauchy-Problems erfolgt in [6]. Die Resultate in [1] stellen eine wesentliche Erweiterung der Methode der Banachraum-Skalen für *q-holomorphe Vektoren* dar. Unter gewissen Voraussetzungen sind die Bedingungen ($\mathbf{B}_1$) und ($\mathbf{B}_2$) unseres Satzes auch für solche Skalen sinnvoll. Die Beispiele erwecken den Eindruck, daß $\mathcal{L}_1$ nur Differentiationen 1. Ordnung nach den Ortsvariablen enthalten darf. In [6] wird jedoch eine Banachraum-Skala *ganzer analytischer Funktionen* konstruiert, mit deren Hilfe man z. B. das Cauchy-Problem

$$t^l\,\frac{\partial w}{\partial t} + cw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \quad w(T) = w_T$$

behandeln kann.

LITERATUR

[1] Crodel, A.: Nichtlineare Evolutionsgleichungen für q-holomorphe Vektoren. Z. Anal. Anw. **6** (1987), 49–59.

[2] Gilbert, R. P.: Constructive Methods for Elliptic Equations (Lecture Notes in Mathematics: Bd. 365). Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1974.

[3] Nagumo, M.: Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen. Jap. J. Math. **18** (1942), 41–47.

[4] Nishida, T.: A note on a theorem of Nirenberg. J. Diff. Geom. **12** (1977), 629–633.

[5] Reissig, M.: Ein abstraktes nichtlineares Cauchy-Kowalewskaja-Theorem mit singulären Koeffizienten I. Z. Anal. Anw. **6** (1987), 35–41.

[6] Reissig, M.: Untersuchungen zum Lösbarkeitsverhalten von entarteten Differentialgleichungen und entarteten abstrakten Cauchy-Kowalewskaja-Problemen. Dissertation A. Halle–Wittenberg: Martin-Luther-Universität 1986.

[7] Тучке, В. (Tutschke, W.): Ассоциированные операторы комплексного анализа. Сообщ. Акад. Наук Груз. ССР **107** (1982), 481–483.

[8] Тучке, В. (Tutschke, W.): Задача с начальными значениями для обобщенных аналитических функций, зависящих от времени (обобщения теорем Коши, Ковалевской и Хольмгрена). Докл. Акад. Наук СССР **262** (1982), 1081–1085.

[9] Walter, W.: Functional differential equations of the Cauchy-Kowalewsky type. Aequ. Math. **28** (1985), 102–113.

Manuskripteingang: 13. 02. 1987

VERFASSER:

Dr. Michael Reissig
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Universitätsplatz 6
DDR-4010 Halle