

## Stekloffsche Eigenwerte und konforme Abbildungen<sup>1)</sup>

B. DITTMAR

Herrn Prof. Dr. M. M. Schäffer zum 75. Geburtstag gewidmet

Es werden neue isoperimetrische Ungleichungen zwischen Stekloffschen Eigenwerten und konformen Gebietsgrößen im einfach und mehrfach zusammenhängenden Gebiet hergeleitet. Diese verschärfen einerseits für gewisse Kurven bekannte isoperimetrische Ungleichungen und können andererseits benutzt werden, um konforme Gebietsgrößen beidseitig einzuschließen. Im einfach zusammenhängenden Gebiet werden unter Verwendung eines allgemeinen Monotonieprinzips beidseitige Abschätzungen Stekloffscher Eigenwerte angegeben.

Выводятся новые изопериметрические неравенства между собственными значениями Стеклова и конформными величинами в односвязной и многосвязной областях. Они с одной стороны усиливают для некоторых кривых известные изопериметрические неравенства и позволяют с другой стороны двустороннюю оценку конформных величин. В односвязной области даются с помощью некоторого принципа монотонности двусторонние оценки собственных значений Стеклова.

New isoperimetric inequalities between Stekloff eigenvalues and function theoretic quantities in simply and multiply connected domains are derived. They sharpen on the one hand well-known isoperimetric inequalities in some cases and given on the other hand both-sided estimates for function theoretic quantities. In the simply connected case both-sided estimates for Stekloff eigenvalues are given based on a general monotonicity principle.

### 1. Einleitung

Im Jahre 1902 führte M. W. STEKLOFF [18] (siehe auch [2: S. 397 ff.]) ein interessantes Eigenwertproblem für harmonische Funktionen ein, für das von zahlreichen Autoren isoperimetrische Ungleichungen hergeleitet wurden [1]. Gegenstand dieser Mitteilung ist es, neue isoperimetrische Ungleichungen zwischen Stekloffschen Eigenwerten und konformen Gebietsgrößen abzuleiten. Dabei zeigt es sich, daß die Verwendung Stekloffscher Eigenwerte unter anderem gestattet, konforme Gebietsgrößen wie virtuelle Masse, konformer Radius und ähnliche Größen beidseitig abzuschätzen: Ist  $\mathcal{G} \ni \infty$  ein  $n$ -fach zusammenhängendes, von stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurven berandetes Gebiet, dann ist das *Stekloffsche Eigenwertproblem* wie folgt definiert:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathcal{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \varrho(s) u \text{ auf } \mathcal{C} = \partial \mathcal{G}, \quad (1)$$

wobei  $\varrho \geq 0$  eine gegebene stückweise stetige Funktion und  $n$  die Außennormale ist. Es existieren bekanntlich unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  mit den

<sup>1)</sup> Vorgetragen auf der „9. Conference on Analytic Functions“ vom 1.–8. 6. 1986 in Lublin (VR Polen) und auf der 8. Herbstschule „Variationsrechnung und optimale Prozesse“ vom 20.–25. 10. 1986 in Vitte (Hiddensee/DDR).

zugehörigen Eigenfunktionen  $\chi_1 = \text{const}$ ,  $\chi_2, \chi_3, \dots$ . Dabei gilt die Beziehung

$$\lambda_n = \underset{u}{\text{Min}} \frac{\iint_{\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy}{\int_{\mathcal{G}} u^2 \varrho ds} \quad \text{mit} \quad \int_{\mathcal{G}} u \chi_i \varrho ds = 0 \quad (i \leq n-1). \quad (2)$$

Bei Beschränkung auf harmonische Funktionen und  $\varrho > 0$  folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$\left( \iint_{\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy \right)^2 \leq \int_{\mathcal{G}} u^2 \varrho ds \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds,$$

und damit die Beziehung

$$\lambda_n = \underset{du=0}{\text{Min}} \frac{\int_{\mathcal{G}} \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds}{\iint_{\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy} \quad \text{mit} \quad \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial u}{\partial n} \chi_i ds = 0 \quad (i \leq n-1). \quad (3)$$

Im Abschnitt 2 wird zunächst eine Ungleichung zwischen  $\lambda_2$  und der virtuellen Masse  $W_\varrho$  unter Verwendung sogenannter  $\vartheta$ -Schlitzabbildungen abgeleitet (Satz 2). Aufbauend auf Satz 2 werden dann scharfe isoperimetrische Ungleichungen gefolgert, die insbesondere im einfach zusammenhängenden Fall gestatten, die virtuelle Masse beidseitig abzuschätzen (Folgerung 1) und für gewisse Kurven eine isoperimetrische Ungleichung von R. Weinstock zu verschärfen (Folgerung 2). Für das Produkt  $\lambda_2 \lambda_3$  kann dann anschließend — auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete — auf eine Ungleichung geschlossen werden, die erlaubt, einen bekannten Ausdruck von B. EPSTEIN [4] beidseitig einzuschließen (Satz 3). Diese Ungleichung wird unter Verwendung einer isoperimetrischen Ungleichung für ein Kurvensystem mit einer Abschätzung von J. HERSCH, L. E. PAYNE und M. M. SCHIFFER [7] verglichen. Die Ergebnisse des Abschnittes 2 sind nicht an die  $\vartheta$ -Schlitzabbildungen gebunden. Der Abschnitt 3 ist Übertragungen auf andere Schlitzabbildungen gewidmet. Beschränkt man sich auf einfach zusammenhängende Gebiete, dann kann man, basierend auf einem allgemeinen Monotonieprinzip und der Lösbarkeit des Stekloffschen Eigenwertproblems für den Kreis, beidseitige Abschätzungen der Eigenwerte ableiten. Damit befassen wir uns im Abschnitt 4. Nun sieht man leicht, daß zwischen den Eigenwerten des Innengebietes  $\lambda_i$  und denen des Außengebietes  $\lambda_a$  zu unterscheiden ist, was bisher in der Literatur scheinbar nicht näher untersucht wurde. So wird unter anderem (Satz 7) die folgende scharfe Abschätzung zwischen den Stekloffschen Eigenwerten des Innen- und Außengebietes und dem ersten nichttrivialen Fredholmschen Eigenwert  $\lambda$  gefolgert:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leq \frac{\lambda_{2a}}{\lambda_{2i}} \leq \frac{\lambda + 1^2}{\lambda - 1}$$

R. Kühnau hat auch das Entstehen dieser Arbeit durch Anregungen und Hinweise gefördert, wofür der Autor ihm Dank schuldet. Insbesondere verdankt er ihm den Hinweis auf eine strenge Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Stekloffschen Eigenwertproblem.

<sup>2)</sup> C. Bandle hat mir freundlicherweise brieflich unterm 27. 10. 1986 persönliche Aufzeichnungen eines fast zwanzig Jahre zurückliegenden Gespräches mit M. M. Schiffer zur Verfügung gestellt. In diesen Aufzeichnungen findet sich unter anderem bereits die hier angegebene Ungleichung.

## 2. Stekloffsche Eigenwerte und $\vartheta$ -Schlitzabbildungen

In diesem Abschnitt sollen isoperimetrische Ungleichungen zwischen Stekloffschen Eigenwerten einfach und mehrfach zusammenhängender Gebiete und konformen Gebietsgrößen abgeleitet werden. Dazu betrachten wir diejenigen eindeutig bestimmten schlichten konformen Abbildungen  $w_\vartheta$ , die das Gebiet  $\mathfrak{G}$  mit  $\infty \in \mathfrak{G}$  auf ein Gebiet abbilden, dessen Bildrandkomponenten Strecken des Neigungswinkels  $\vartheta$  sind und in  $\infty$  durch  $w_\vartheta(z) = z + a_{1,\vartheta}z^{-1} + \dots$  hydrodynamische Normierung besitzen. Es gilt der folgende klassische

**Satz 1 (H. GRÖTZSCH [6]):** Für die Gesamtheit der schlichten konformen Abbildungen von  $\mathfrak{G}$  mit der Normierung  $w(z) = z + a_1z^{-1} + \dots$  in  $\infty$  ist der genaue Wertebereich von  $a_1$  eine abgeschlossene Kreisscheibe. Sind  $m$  und  $r$  deren Mittelpunkt und Radius, so ist genau dann  $a_1 = m + r \exp(2i\vartheta)$ , wenn  $w_\vartheta$  vorliegt. Für die Funktionen  $w_\vartheta$  besteht dabei die Identität

$$w_\vartheta = \exp(i\vartheta) (w_0 \cos \vartheta - iw_{\pi/2} \sin \vartheta). \tag{4}$$

Unter Verwendung der  $\vartheta$ -Schlitzabbildungen gilt nun der folgende

**Satz 2:** Für den zweiten Stekloffschen Eigenwert  $\lambda_2$  jedes  $n$ -fach zusammenhängenden, von stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurven  $\mathfrak{C}$  berandeten Gebietes  $\mathfrak{G} \ni \infty$  gilt bei  $\varrho > 0$  die Abschätzung

$$\lambda_2 \leq \int_{\mathfrak{C}} \varrho^{-1} (\Im \exp(-i\vartheta) \dot{z})^2 ds / (2\pi \Re \exp(-2i\vartheta) a_{1,\vartheta} - A). \tag{5}$$

Dabei ist  $\dot{z} = dz/ds$  die Ableitung nach der Bogenlänge,  $A$  der Flächeninhalt des endlichen Komplementes von  $\mathfrak{G}$  und  $2\pi \Re \exp(-2i\vartheta) a_{1,\vartheta} - A = W_\vartheta$  die aus der Hydrodynamik bekannte virtuelle Masse in  $\vartheta$ -Richtung [2: S. 55ff.]. Wenn  $\varrho \equiv 1$  und  $\mathfrak{C}$  aus einem einzigen Kreis besteht, gilt in (5) das Gleichheitszeichen.

**Beweis:** Wegen des Abbildungsverhaltens von  $w_\vartheta$  gelten für die in  $\mathfrak{G}$  regulär harmonischen Funktionen

$$u_\vartheta(z) = \Re \exp(-i\vartheta) (w_\vartheta(z) - z), \quad v_\vartheta(z) = \Im \exp(-i\vartheta) (w_\vartheta(z) - z)$$

auf dem Rande  $\mathfrak{C} = \cup \{\mathfrak{C}_i : 1 \leq i \leq n\}$  von  $\mathfrak{G}$  die Beziehungen

$$v_\vartheta|_{\mathfrak{C}_i} = K_i - \Im \exp(-i\vartheta) z, \quad \frac{\partial u_\vartheta}{\partial n} = \frac{\partial v_\vartheta}{\partial s} = -\Im \exp(-i\vartheta) \dot{z} \tag{6}$$

( $K_i$  sind Konstanten,  $n$  ist die aus  $\mathfrak{G}$  herausweisende Normale). Somit folgt für das Dirichlet-Integral

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{G}} (\nabla v_\vartheta)^2 dx dy &= \iint_{\mathfrak{G}} (\nabla u_\vartheta)^2 dx dy \\ &= \int_{\mathfrak{C}} u_\vartheta \frac{\partial u_\vartheta}{\partial n} ds = \int_{\mathfrak{C}} u_\vartheta (\sin \vartheta dx - \cos \vartheta dy). \end{aligned} \tag{7}$$

Der Cauchysche Integralsatz liefert weiterhin

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{C}+\mathfrak{R}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz \\ &= \int_{\mathfrak{C}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz + \int_{\mathfrak{R}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz = 0, \end{aligned}$$

wenn mit  $\mathfrak{K}$  ein hinreichend großer Kreis bezeichnet wird. Nehmen wir hiervon den Imaginärteil, so folgt

$$\begin{aligned} & \Im \int_{\mathfrak{C}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz \\ &= \int_{\mathfrak{C}} u_\vartheta (\cos \vartheta dy - \sin \vartheta dx) + \int_{\mathfrak{C}} v_\vartheta (\sin \vartheta dy + \cos \vartheta dx) \\ &= -\Im \int_{\mathfrak{K}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Nach dem Residuensatz ist  $\int_{\mathfrak{C}} \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta - z) dz = 2\pi i \exp(-2i\vartheta) a_{1,\vartheta}$ . Schließlich haben wir wegen (6)  $\int_{\mathfrak{C}} v_\vartheta (\sin \vartheta dy + \cos \vartheta dx) = -A$ , so daß aus (7), (8) sofort

$$\iint_{\mathfrak{G}} (\nabla v_\vartheta)^2 dx dy = \iint_{\mathfrak{G}} (\nabla u_\vartheta)^2 dx dy = 2\pi \Re \exp(-2i\vartheta) a_{1,\vartheta} - A$$

zu sehen ist. Hiermit folgt unter Verwendung von (3) und (6) die Ungleichung (5). Ist  $\mathfrak{C}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Einheitskreis und  $\varrho \equiv 1$ , dann gilt  $\lambda_2 = 1$ ,  $u_\vartheta = \Re z^{-1}$ ,  $v_\vartheta = \Im z^{-1}$  und man rechnet leicht nach, daß in (5) das Gleichheitszeichen steht ■

Die Ungleichung (5) dürfte auch ohne Verwendung der Variationscharakterisierung (3) mit Hilfe einer allgemeinen Dualitätsbeziehung von R. KLÖTZLER [8] als ein duales Gegenstück zum klassischen Extremalprinzip von J. B. DIAZ und A. WEINSTEIN zur Charakterisierung der virtuellen Masse  $W_\vartheta$  ableitbar sein. Dies soll kurz skizziert werden. Die regulär harmonischen Funktionen  $u_\vartheta$  können wegen (b) durch ein Variationsproblem charakterisiert werden, dessen Minimalwert  $-W_\vartheta$  der Ungleichung

$$-W_\vartheta \leq \iint_{\mathfrak{G}} (\nabla u)^2 dx dy - 2 \int_{\mathfrak{C}} u \Im(\exp(-i\vartheta) z) ds \quad (9)$$

für alle  $u \in C^2(\overline{\mathfrak{G}})$  genügt, falls  $\partial\mathfrak{G}$  hinreichend glatt ist. Setzt man  $u = \varepsilon v$  und bestimmt das Minimum der entstehenden quadratischen Funktion des reellen Parameters  $\varepsilon$  bei festem  $v$ , so folgt die bekannte Variationscharakterisierung von J. B. DIAZ und A. WEINSTEIN ([3]; [2: S. 55 ff.]). Die Ungleichung (9) kann im Rahmen einer allgemeinen Dualitätstheorie [8] bei Wahl quadratischer  $S$ -Funktionen in folgender Weise ergänzt werden:

$$\begin{aligned} - \int_{\mathfrak{C}} \frac{(\Im(z \exp(-i\vartheta)))^2}{\mathfrak{H}n} ds &\leq -W_\vartheta \\ &\leq \iint_{\mathfrak{G}} (\nabla u)^2 dx dy - 2 \int_{\mathfrak{C}} u \Im(\exp(-i\vartheta) z) ds. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathfrak{H}$  ein Vektorfeld in  $\mathfrak{G}$  mit  $\operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H}^2 \leq 0$  in  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}n > 0$  auf  $\mathfrak{C}$ . Mit  $\mathfrak{H} = \operatorname{grad} \ln \chi_2$  ist  $\operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H}^2 = 0$ , falls man von den Knotenlinien von  $\chi_2$  absieht ( $\chi_2$  war Eigenfunktion in (1) zu  $\lambda_2$ ),  $\mathfrak{H}|_{\mathfrak{C}} = \lambda_2 \varrho$ , und es folgt (5). Eine strenge Ableitung auf diesem Wege würde allerdings Berücksichtigung der Knotenlinien erfordern.

Für lineare  $S$ -Funktionen folgt übrigens das klassische *Gauß-Thomson'sche Prinzip minimaler Energie* [2: S. 56 ff.].

Zunächst sollen nun aus Satz 2 einige Folgerungen für einfach zusammenhängende Gebiete gezogen werden.

**Folgerung 1:** *In jedem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{G} \ni \infty$  der oben genannten Art gilt bei  $\varrho > 0$  die Abschätzung*

$$\lambda_2 I_\vartheta \leq W_\vartheta \leq \frac{1}{\lambda_2} \int_{\mathfrak{C}} (\Im(\exp(-i\vartheta) z))^2 ds. \quad (10)$$

Dabei ist

$$I_{\vartheta} = \cos^2 \vartheta \int_{\mathcal{C}} (y - S_y)^2 \rho ds + \sin^2 \vartheta \int_{\mathcal{C}} (x - S_x)^2 \rho ds - \sin 2\vartheta \int_{\mathcal{C}} (x - S_x)(y - S_y) \rho ds$$

das Trägheitsmoment der gleichmäßig mit Masse der Dichte  $\rho$  belegten Kurve  $\mathcal{C}$  bei Rotation dieser Kurve um die den Winkel  $\vartheta$  mit der positiven  $x$ -Achse bildende, in der  $(x, y)$ -Ebene liegende Achse durch den Schwerpunkt der Koordinaten.

$$S_x = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} \rho x ds \text{ und } S_y = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} \rho y ds \text{ mit } M = \int_{\mathcal{C}} \rho ds.$$

Das Gleichheitszeichen steht in beiden Ungleichungen von (10), wenn  $\rho \equiv 1$  und  $\mathcal{C}$  ein Kreis ist.

Beweis: Es ist die linke Ungleichung in (10) zu zeigen. Dazu betrachten wir die durch Addition einer Konstanten aus  $v_{\vartheta}$  entstehende Funktion

$$\tilde{v}_{\vartheta}|_{\mathcal{C}} = -\Im(z \exp(-i\vartheta)) + \cos \vartheta S_y - \sin \vartheta S_x.$$

Diese wird in den Rayleigh-Quotienten (2) eingesetzt und liefert die linke Seite von (10). Durch elementare Rechnung bestätigt man, daß auch in der linken Ungleichung für  $\rho \equiv 1$  das Gleichheitszeichen steht, wenn  $\mathcal{C}$  ein Kreis ist. ■

Addiert man die beiden für  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi/2$  aus (10) entstehenden Ungleichungen; so haben wir wegen  $W_0 + W_{\pi/2} = 4\pi R^2 - 2A$  ( $R$  bezeichnet den äußeren konformen Radius von  $\mathcal{C}$ , auch *transfiniten Durchmesser* oder *Kapazität* von  $A$  genannt; siehe etwa [14: S. 331ff.]) die

Folgerung 2: In jedem einfach zusammenhängenden Gebiet der oben genannten Art gilt bei  $\rho > 0$  die Beziehung

$$\lambda_2(I_0 + I_{\pi/2}) \leq 4\pi R^2 - 2A \leq \frac{1}{\lambda_2} \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{\rho}. \quad (11)$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen wieder in beiden Ungleichungen, wenn  $\rho \equiv 1$  und die Randkurve ein Kreis ist (die Größe  $I_0 + I_{\pi/2}$  nennt man *polares Trägheitsmoment*).

Die Ungleichung (11) gestattet einen unmittelbaren Vergleich mit der Abschätzung von R. WEINSTOCK [19]

$$\lambda_2 \leq 2\pi/L \quad (12)$$

( $L$  bezeichnet die Länge von  $\mathcal{C}$ ), die unter Einbeziehung von  $\lambda_3$  mehrere Verbesserungen erfahren hat [7]. Dazu wird  $\rho \equiv 1$  gewählt. Man sieht sofort, daß die rechte Ungleichung in (11) genau dann besser als (12) ist, wenn für die Kurve  $\mathcal{C}$  die Ungleichung

$$L^2 + 4\pi A \leq 8\pi^2 R^2 \quad (13)$$

gilt. Hat man eine Kurve  $\mathcal{C}$ , die (13) genügt, so genügen auch alle durch Ähnlichkeitstransformation aus  $\mathcal{C}$  hervorgehenden Kurven dieser Ungleichung.

Es gibt nun recht einfache, der Ungleichung (13) genügende Kurven, wie die folgenden Beispiele zeigen.

**Beispiel 1:**  $\mathcal{C}$  sei eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ,  $b \leq a$ . Dann ist  $R = (a + b)/2$ ,  $L = 4aE(\sqrt{a^2 - b^2/a}) = 4aE(\sqrt{1 - \eta^2})$  mit  $\eta = b/a$  und  $E$  als vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung, und  $A = \pi ab$ . Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt  $E^2(\sqrt{1 - \eta^2}) \leq \pi^2(1 + \eta^2)/8$ , woraus leicht die Gültigkeit von (13) zu sehen ist.

**Beispiel 2:** Es ist (13) erfüllt, wenn  $\mathcal{C}$  ein „hinreichend flaches“ Rechteck ist. Ist  $\mathcal{C}$  ein Schlitz (Grenzfall des Rechtecks) mit doppelt gezählter Länge  $8$ , dann ist  $R = 1$ , und  $\mathcal{C}$  genügt (13). Liegt ein Quadrat vor mit halber Seitenlänge  $a = 2E(1/\sqrt{2}) - K(1/\sqrt{2}) = 0.8472\dots$  mit  $E$  und  $K$  wie üblich als vollständige elliptische Integrale, dann ist  $R = 1$  und (13) nicht erfüllt.

**Beispiel 3:**  $\mathcal{C}$  sei das nichtkonvexe Kreisbogenzweieck, das von solch einem symmetrisch zur  $y$ -Achse liegenden Kreisbogen gebildet wird, der die  $x$ -Achse bei  $a$  und  $-a$  (den Ecken des Kreisbogenzweiecks) schneidet und bei  $a$  den Winkel  $\beta \geq \pi/2$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt. Der andere Bogen ist ebenfalls ein symmetrisch zur  $y$ -Achse liegender Kreisbogen durch  $a$  und  $-a$ , der den Winkel  $\alpha + \beta$  ( $\alpha > 0$ ) mit der positiven  $x$ -Achse einschließt. Der konforme Radius ist hier  $R(\alpha, \beta, a) = a(2 - \alpha/\pi)^{-1} \sin^{-1}(\beta/(2 - \alpha/\pi))$ . Man rechnet elementar, wenn auch etwas langwierig nach, daß bei hinreichend kleinem  $\alpha$  und hinreichend großem  $\beta$  die Ungleichung (13) erfüllt ist.

Das Gleichheitszeichen steht übrigens in (13) nicht nur für den Kreis, sondern beispielsweise auch für ein gewisses Rechteck (vgl. Beispiel 2) und für die (doppelt gezählte) Halbkreislinie (Grenzfall von Beispiel 3 mit  $\alpha = 0$  und  $\beta = \pi/2$ ).

Ziel unserer Überlegungen ist nun eine Abschätzung für  $\lambda_2 \lambda_3$ . Dazu bemerken wir zunächst, daß nach (5)

$$\lambda_2 \leq \min_{\vartheta} \frac{\int_{\mathcal{C}} \varrho^{-1} (\Im(\exp(-i\vartheta)z))^2 ds}{W_{\vartheta}}$$

ist. Weiterhin folgt aus (4)  $u_{\vartheta} = u_0 \cos \vartheta + u_{\pi/2} \sin \vartheta$  und somit  $\frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \pi} = \frac{\partial u_0}{\partial \pi} \cos \vartheta + \frac{\partial u_{\pi/2}}{\partial \pi} \sin \vartheta$ . Damit sieht man leicht, daß ein  $\vartheta_1$  mit  $\int_{\mathcal{C}} \lambda_2 \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \pi} ds = 0$  existiert.

Mit der Funktion  $u_{\vartheta}$  folgt nun wegen der Variationscharakterisierung (3) die Abschätzung

$$\lambda_3 \leq \frac{\int_{\mathcal{C}} \varrho^{-1} (\Im(\exp(-i\vartheta_1)z))^2 ds}{W_{\vartheta_1}} \leq \max_{\vartheta} \frac{\int_{\mathcal{C}} \varrho^{-1} (\Im(\exp(-i\vartheta)z))^2 ds}{W_{\vartheta}}$$

Also haben wir schließlich in jedem  $n$ -fach zusammenhängenden Gebiet die Abschätzung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \left( \min_{\vartheta} \frac{\int_{\mathcal{C}} \varrho^{-1} (\Im(\exp(-i\vartheta)z))^2 ds}{W_{\vartheta}} \right) \left( \max_{\vartheta} \frac{\int_{\mathcal{C}} \varrho^{-1} (\Im(\exp(-i\vartheta)z))^2 ds}{W_{\vartheta}} \right) \quad (14)$$

Zur Berechnung des rechts stehenden Ausdruckes benötigen wir den

Hilfssatz 1: Sind

$$f_1(\vartheta) = a_1 \cos 2\vartheta + a_2 \sin 2\vartheta + a_3, \quad f_2(\vartheta) = b_1 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + b_3$$

positiv für alle  $\vartheta$ , dann erfüllen die Größen

$$M_1 = \min_{\vartheta} f_1(\vartheta)/f_2(\vartheta) \quad \text{und} \quad M_2 = \max_{\vartheta} f_1(\vartheta)/f_2(\vartheta)$$

die Beziehung

$$(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) M_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 + (-1)^j \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2)}.$$

Insbesondere ist  $(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) M_1 M_2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2$ .

Beweis: Wir betrachten zunächst im dreidimensionalen  $(x, y, z)$ -Raum den Kegel  $K$ , dessen Mantelfläche durch Rotation der Halbgeraden  $z = x, z \geq 0$  um die  $z$ -Achse entsteht. Da  $f_1$  und  $f_2$  positive Funktionen sind, müssen die Vektoren  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$  im Inneren dieses Kegels liegen. Somit gilt  $a_3^2 > a_1^2 + a_2^2$  und  $b_3^2 > b_1^2 + b_2^2$ . Damit liegt der Vektor  $a \times b$  im Komplement des Doppelkegels  $\bar{K}$ , der aus dem Kegel  $K$  und dessen Bild bei Spiegelung an der  $(x, y)$ -Ebene entsteht. Also gilt  $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 < (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$ , woraus durch einfache Rechnung

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)^2 > (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2)$$

zu sehen ist. Dies klärt die Frage nach den Vorzeichen der im Hilfssatz auftretenden Größen. Nach Definition von  $M_1$  gilt im Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Beziehung

$$\langle M_1 b - a, c \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \vartheta, c = (\cos 2\vartheta, \sin 2\vartheta, 1),$$

wobei für ein gewisses  $\vartheta$  das Gleichheitszeichen steht. Also liegt der Vektor  $M_1 b - a$  auf der Mantelfläche von  $\bar{K}$ , so daß

$$(M_1 b_1 - a_1)^2 + (M_1 b_2 - a_2)^2 = (M_1 b_3 - a_3)^2$$

gilt. Dieselbe quadratische Gleichung besteht für  $M_2$ , woraus die Aussage des Hilfssatzes folgt ■

Zur Berechnung der rechten Seite von (13) beachten wir, daß sich nach (4) bei  $\varrho > 0$  leicht die Beziehung

$$\frac{\int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} (\Im (\exp(-i\vartheta) \dot{z}))^2 ds}{W_\vartheta} = \frac{f_1(\vartheta)}{f_2(\vartheta)}$$

ergibt mit

$$f_1(\vartheta) = \cos 2\vartheta \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} (y^2 - x^2) ds - 2 \sin 2\vartheta \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} xy ds + \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} ds, \\ f_2(\vartheta) = \cos 2\vartheta (2\pi \Re (a_{1,0} + a_{1,\pi/2})) + \sin 2\vartheta (2\pi \Im (a_{1,0} + a_{1,\pi/2})) \\ + 2\pi \Re (a_{1,0} - a_{1,\pi/2}) - 2A.$$

Weiterhin ist  $2r = a_{1,0} - a_{1,\pi/2}, 2m = a_{1,0} + a_{1,\pi/2}$  (vgl. Satz 1), so daß wir nach einfacher Rechnung mit Hilfssatz 1 und (14) auf die folgende Aussage schließen können.

Satz 3: In jedem  $n$ -fach zusammenhängenden, von stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurven berandeten Gebiet  $\mathfrak{G} \ni \infty$  gilt die Abschätzung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \frac{\int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} x^2 ds \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} y^2 ds - \left( \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} xy ds \right)^2}{A^2 + 4\pi r(\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1})} \quad (15)$$

Das Gleichheitszeichen steht hierin beim einfach zusammenhängenden Kreisgebiet mit  $\varrho \equiv 1$ .

Der in (15) stehende Ausdruck  $\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1}$  war schon Gegenstand mehrerer Untersuchungen. Nach B. ERSTEIN [4] gilt

$$\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1} \geq 0. \quad (16)$$

Das Gleichheitszeichen steht hierin nach R. KÜHNAU [11] genau dann, wenn  $w_0 + w_{\pi/2} - mr^{-1}(w_0 - w_{\pi/2}) \equiv 2z$  in  $\mathfrak{G}$  gilt. Gebiete mit  $w_0 + w_{\pi/2} \equiv 2z$  in  $\mathfrak{G}$  heißen *Grunskygebiete* [10] (im einfach zusammenhängenden Gebiet ist dies genau das Äußere eines Kreises). Gebiete mit  $\alpha w_0 + \beta w_{\pi/2} \equiv z$ ,  $\alpha + \beta = 1$  und  $|\alpha - \beta| < 1$  für komplexe  $\alpha$  und  $\beta$ , heißen *verallgemeinerte Grunskygebiete* [10] (im einfach zusammenhängenden Fall liegt dies genau beim Äußeren einer Ellipse vor). Insbesondere gestattet die Verwendung Stekloffscher Eigenwerte die beidseitige Abschätzung

$$0 \leq 4\pi r(\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1}) \leq \frac{\int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} \dot{x}^2 ds \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} \dot{y}^2 ds - \left( \int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} \dot{x} \dot{y} ds \right)^2}{\lambda_2 \lambda_3} - A^2.$$

Nach J. HERSCH, L. E. PAYNE und M. M. SCHIFFER [7] gilt die Abschätzung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq 4\pi^2 \left( \text{Max}_i L_i \right)^{-2}, \quad L_i = |\mathfrak{C}_i| \quad (i = 1, \dots, n). \quad (17)$$

Um unser Ergebnis hiermit zu vergleichen, zeigen wir den

**Hilfssatz 2:** *Es sei  $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n\}$  ein System einfach geschlossener, stückweise glatter, getrennt liegender Jordan-Kurven und  $A = A_1 + \dots + A_n$  die Gesamtfläche der von den Kurven  $\mathfrak{C}_i$  eingeschlossenen Flächen  $A_i$ . Dann gilt*

$$\int_{\mathfrak{G}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathfrak{G}} \dot{y}^2 ds / A^2 \geq 4\pi^2 \left( \text{Max}_i L_i \right)^{-2},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn sämtliche  $\mathfrak{C}_i$  kongruente Kreise sind.

**Beweis:** Aus der bekannten Beziehung für die Fläche  $A$  folgt mit der *Cauchy-Schwarzschen Ungleichung*

$$A^2 = \left( \int_{\mathfrak{G}} x dy \right)^2 = \left( \int_{\mathfrak{G}} xy ds \right)^2 \leq \int_{\mathfrak{G}} x^2 ds \int_{\mathfrak{G}} y^2 ds,$$

so daß wir  $\int_{\mathfrak{G}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathfrak{G}} \dot{y}^2 ds / A^2 \geq \int_{\mathfrak{G}} \dot{x}^2 ds / \int_{\mathfrak{G}} x^2 ds$  haben. Die rechte Seite stellt den

Rayleigh-Quotienten eines unabhängig voneinander schwingenden Systems homogener Seiten dar (vgl. [7: S. 103]). Durch Parallelverschiebungen kann immer  $\int_{\mathfrak{C}_i} x ds = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) erreicht werden. Wegen der Unabhängigkeit der schwingenden Saiten untereinander gilt

$$\int_{\mathfrak{G}} \dot{x}^2 ds / \int_{\mathfrak{G}} x^2 ds \geq \text{Min}_i \left( \int_{\mathfrak{C}_i} \dot{x}^2 ds / \int_{\mathfrak{C}_i} x^2 ds \right), \quad \int_{\mathfrak{C}_i} x ds = 0.$$

Bekanntlich ist  $\int_{\mathfrak{C}_i} \dot{x}^2 ds / \int_{\mathfrak{C}_i} x^2 ds \geq 4\pi^2 / L_i^2$ , falls  $\int_{\mathfrak{C}_i} x ds = 0$  ist. Dabei steht genau für den Kreis das Gleichheitszeichen. Hiermit schließen wir leicht auf die Aussage des Hilfssatzes ■

**Bemerkungen:** 1. Zunächst rechnet man elementar nach, daß der Zähler der rechten Seite von (15) invariant ist bei Drehung von  $\mathfrak{G}$  und insbesondere immer so gedreht werden kann, daß  $\int_{\mathfrak{G}} \varrho^{-1} \dot{x} \dot{y} ds = 0$  gilt. Der Wertebereich des Koeffizienten  $a_1$  wird bei Drehung des Gebietes ebenfalls nur gedreht, also bleibt der Nenner der rechten Seite von (15) invariant. Schließlich ist offensichtlich, daß bei einer Drehung



des Gebietes die Eigenwerte unverändert bleiben. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit bei  $\varrho \equiv 1$  die Ungleichung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \int_{\mathbb{C}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathbb{C}} \dot{y}^2 ds / (A^2 + 4\pi r(\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1}))$$

annehmen. Wegen Hilfssatz 2 ist somit die hieraus unter Verwendung von (16) folgende Abschätzung  $\lambda_2 \lambda_3 \leq \int_{\mathbb{C}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathbb{C}} \dot{y}^2 ds / A^2$  immer nicht besser als (17). Insbesondere

ist im Falle des Gleichheitszeichens in (16) — bis auf den Fall des einfach zusammenhängenden Kreisgebietes — (15) schlechter als (17). Im mehrfach zusammenhängenden Fall ist es leicht, ein Beispiel anzugeben, bei dem (15) besser als (17) ist (für den einfach zusammenhängenden Fall vgl. unter Abschnitt 3). Dazu betrachten wir ein mehrfach zusammenhängendes Vollkreisgebiet  $\mathfrak{R}$ . Für dieses gilt  $\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1} > 0$ . Es folgt nämlich wie in [14: S. 143 f.], daß  $\mathfrak{R}$  auch kein verallgemeinertes Grunskygebiet ist. Sind die Kreise von  $\mathfrak{R}$  auch noch kongruent, so haben wir, ziehen wir noch Hilfssatz 2 hinzu, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 &\leq \frac{\int_{\mathbb{C}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathbb{C}} \dot{y}^2 ds}{A^2 + 4\pi r(\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1})} \\ &< \frac{\int_{\mathbb{C}} \dot{x}^2 ds \int_{\mathbb{C}} \dot{y}^2 ds}{A^2} = \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad L = |\mathbb{C}_i|. \end{aligned}$$

2. Im einfach zusammenhängenden Gebiet kann mittels der linken Seite von (10) entsprechend Satz 2 bei  $\varrho \equiv 1$  die Abschätzung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \frac{A^2}{I_0 I_{\pi/2}} + \frac{4\pi r(\pi r - A - \pi |m|^2 r^{-1})}{I_0 I_{\pi/2}} \quad (18)$$

gezeigt werden, falls man durch Drehung des Gebietes realisiert, daß  $\int_{\mathbb{C}} (x - \bar{S}_x)(y - \bar{S}_y) ds = 0$  ist. Für die Eigenwerte des endlichen Innengebietes  $\lambda_{21}$  und  $\lambda_{31}$  gilt [1: S. 141]  $\lambda_{21} \lambda_{31} \leq A^2 / (I_0 I_{\pi/2})$ . Die rechte Seite dieser Ungleichung ist nun nicht größer als die rechte Seite von (18), allerdings sind die Eigenwerte des Innengebietes von denen des Außengebietes zu unterscheiden (vgl. Abschnitt 4).

3. Schließlich soll noch ein Beispiel dafür angegeben werden, daß die rechte Seite von (15) im einfach zusammenhängenden Gebiet beliebig klein werden kann, auch wenn die Länge der zu betrachtenden Kurven beschränkt bleibt. Dazu nehmen wir das von zwei bei Null unter einem Winkel von  $\alpha\pi$  ( $0 < \alpha < 1$ ) zusammenstoßenden Geradenstücken begrenzte Schlitzgebiet, wobei dieser Schlitz symmetrisch zur  $y$ -Achse liegen möge. Die Schlitzlänge ist noch so zu bestimmen, daß der äußere konforme Radius 1 wird. Offenbar bildet  $w(z) = (z - 1)^\alpha (z + 1)^{2-\alpha} (2 + z + z^{-1})$  das Äußere des Einheitskreises auf dieses Schlitzgebiet schlicht konform ab (bei entsprechender Zweigwahl). Es gilt

$$w(z) = z + \text{Konstante} + z^{-1}(2\alpha^2 - 4\alpha + 1) + \dots \quad (19)$$

in  $z = \infty$ . Die Ursprünge der (bei Null doppelt zu zählenden) Schlitzecken sind  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = 1 - \alpha + i\sqrt{2\alpha - \alpha^2}$  und  $z_4 = 1 - \alpha - i\sqrt{2\alpha - \alpha^2}$ , woraus man leicht die (doppelt zu zählende) Länge des Schlitzes zu  $L(\alpha) = 8\alpha^{3/2}(2 - \alpha)^{1-\alpha/2}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , berechnet (man beachte insbesondere die Grenzfälle  $\alpha \rightarrow +0$ ,  $\alpha \rightarrow 1 - 0$  und die

Unstetigkeit der Länge bei 0). Nun ermittelt man leicht aus der Umkehrung zu (19) die Größen  $r = 1$  und  $m = -2\alpha + 4\alpha - 1$ , und offenbar ist  $A = 0$ . Damit haben wir für die rechte Seite von (15) den Ausdruck

$$H(\alpha) = L^2(\alpha) \left( \sin^2 \alpha \frac{\pi}{2} - \sin^4 \alpha \frac{\pi}{2} \right) / 4\pi^2(-4\alpha^2 + 16\alpha^3 - 20\alpha^2 + 8\alpha).$$

Elementare Rechnung bringt  $H(\alpha) \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow +0$  (übrigens ist  $H(\alpha) \rightarrow \pi^2/16 = 4\pi^2/L^2(1)$  für  $\alpha \rightarrow 1 - 0$ , vgl. (17)). Damit läßt sich  $H(\alpha)$  bei hinreichend kleinem Winkel  $\alpha$  beliebig klein machen, und aus Kernkonvergenz- bzw. Stetigkeitsgründen ist dies damit auch der Fall für hinreichend nahe an diesem Schlitz liegende Kurven.

### 3. Verallgemeinerungen

Die im Abschnitt 2 demonstrierte Vorgehensweise ist natürlich nicht auf die  $\vartheta$ -Schlitzabbildungen beschränkt. Hier soll gezeigt werden, wie man dies beispielsweise mit der Koebe-Grötzschschen Methode der zweiblättrigen Überlagerungsfläche auf andere Schlitzabbildungen ausdehnen kann (für analoges Vorgehen in anderem Zusammenhang vgl. [9: S. 140ff.]). Dazu wird das  $n$ -fach zusammenhängende, den Punkt  $z_1$  im Inneren enthaltende Gebiet  $\mathfrak{G}$  längs eines bei  $z_1$  beginnenden, vollständig in  $\mathfrak{G}$  verlaufenden Strahles aufgeschlitzt. Zwei auf solche Weise erhaltene identische Blätter werden nun übereinander gelegt und längs des Schlitzes miteinander verheftet, so daß eine zweiblättrige Überlagerungsfläche mit Windungspunkt bei  $z_1$  entsteht. Diese wird durch  $\mathfrak{z} = \sqrt{z - z_1}$  schlicht auf ein schlichtes,  $2n$ -fach zusammenhängendes, zu 0 zentralsymmetrisches Gebiet  $\mathfrak{G}^*$  der  $\mathfrak{z}$ -Ebene abgebildet. Für  $a_{1,\vartheta}^*$  des Gebietes  $\mathfrak{G}^*$  rechnet man nun leicht  $2a_{1,\vartheta}^* = z_1 - w_\vartheta(z_1)$  nach; wenn  $w_\vartheta$  die Parabelschlitzabbildungen des Gebietes  $\mathfrak{G}$  bezeichnet. Das Problem bei (1)  $\varrho \equiv 1$  transformiert sich in das Eigenwertproblem

$$\Delta u^* = 0 \text{ in } \mathfrak{G}^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n^*} = 2\lambda \left| \sqrt{z - z_1} \right| u^* \text{ auf } \partial \mathfrak{G}^*.$$

Im Gebiet  $\mathfrak{G}^*$  haben wir die Abschätzung (15). Transformiert man diese zurück in  $\mathfrak{G}$ , so folgt

Satz 4: In jedem  $n$ -fach zusammenhängenden, von stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurven berandeten Gebiet  $\mathfrak{G} \ni \infty$  gilt bei  $\varrho \equiv 1$  die Abschätzung

$$\lambda_2 \leq \frac{\int_{\mathfrak{G}} \left( \Im \left( \exp(-i\vartheta) \frac{z}{\sqrt{z - z_1}} \right) \right)^2 ds}{-2\pi \Re \left( \exp(-2i\vartheta) (w_\vartheta(z_1) - z_1) \right) - A^*}, \quad 2A^* = \int_{\mathfrak{G}} \frac{dx dy}{|z - z_1|}$$

( $C\mathfrak{G}$  bezeichnet das endliche Komplement von  $\mathfrak{G}$ ).

Entsprechend Satz 3 haben wir nun

Satz 5: In jedem  $n$ -fach zusammenhängenden, von stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurven berandeten Gebiet  $\mathfrak{G} \ni \infty$  bei  $\varrho \equiv 1$  gilt die Abschätzung

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \frac{4 \int_{\mathfrak{G}} \left( \Re \frac{z}{\sqrt{z - z_1}} \right)^2 ds \int_{\mathfrak{G}} \left( \Im \frac{z}{\sqrt{z - z_1}} \right)^2 ds - \frac{1}{4} \int_{\mathfrak{G}} \left( \Re \frac{z}{\sqrt{z - z_1}} \right) \left( \Im \frac{z}{\sqrt{z - z_1}} \right) ds}{4A^{*2} + 4\pi r'(\pi r' - 2A^* - \pi |m' - z_1|^2 r'^{-1})}$$

Dabei bezeichnet  $m'$  den Mittelpunkt und  $r'$  den Radius derjenigen Kreisscheibe im Gebiet  $\mathfrak{G}$ , die den Wertebereich von  $w(z_1)$  bei schlicht konformer Abbildung  $w$  von  $\mathfrak{G}$  mit hydrodynamischer Normierung in  $\infty$  angibt.

Entsprechende Ungleichungen bei Verwendung anderer Funktionale erhält man nach dem Vorbilde in [9: S. 142ff.]. So folgen aus den Sätzen 4 und 5 durch eine Ähnlichkeitstransformation im Anschluß an die Abbildung durch die Wurzelfunktion Ungleichungen, die das Funktional  $w''(z_1)/w'(z_1)$  enthalten.

#### 4. Untere Abschätzungen für Stekloffsche Eigenwerte im einfach zusammenhängenden Gebiet

Betrachtet man in einem  $n$ -fach zusammenhängenden Gebiet das Stekloffsche Eigenwertproblem (1) mit zwei stückweise stetigen Funktionen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , dann gilt der

**Satz 6 (Monotonieprinzip):** Für die Stekloffschen Eigenwerte  $\lambda_k(\varrho_1)$  und  $\lambda_k(\varrho_2)$  in jedem  $n$ -fach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{G}$ , im Falle stückweise stetiger Funktionen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  mit  $\varrho_1(s) \leq \varrho_2(s)$  auf  $\mathfrak{C}$ , gilt  $\lambda_k(\varrho_1) \geq \lambda_k(\varrho_2)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ).

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Poincaréschen Prinzip [1: S. 97] ■

Im folgenden sei  $\mathfrak{G} \ni \infty$  stets einfach zusammenhängend und stückweise analytisch berandet. Obiges Monotonieprinzip gestattet nun, in folgender Weise untere Abschätzungen für die Eigenwerte herzuleiten. Ist in  $\mathfrak{G}$  das Problem (1) gegeben und bezeichnet  $w$  eine schlichte konforme Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf das Gebiet  $\mathfrak{G}$ , die sich wenigstens stückweise stetig differenzierbar auf den Rand fortsetzen läßt, dann geht (1) bei  $\varrho \equiv 1$  in das Problem

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda |w'(z)| u$$

im Äußeren des Einheitskreises über. Da (1) bei  $\varrho \equiv 1$  im Falle des Äußeren des Einheitskreises gelöst werden kann, bringt das Monotonieprinzip, falls man eine obere Schranke  $M$  und untere Schranke  $m$  für  $|w'(z)|$  auf  $\mathfrak{C}$  kennt, die Abschätzung

$$\frac{n}{m} = \lambda_{2n+1}(\varrho \equiv m) \geq \lambda_{2n+1}(\varrho \equiv |w'(z)|) \geq \lambda_{2n}(\varrho \equiv |w'(z)|) \geq \lambda_{2n}(\varrho \equiv M) = \frac{n}{M}$$

für  $n = 1, 2, \dots$  (der Bestimmung von Schranken für  $|w'(z)|$  auf  $\mathfrak{C}$  sind zahlreiche Arbeiten gewidmet, vgl. hierzu [5: S. 38]). Dies liefert unter konkreten Annahmen über den Rand  $\mathfrak{C}$  jeweils untere Abschätzungen für die Eigenwerte. Wir begnügen uns zunächst mit

**Satz 7:** Ist  $\mathfrak{C}$  eine stetig gekrümmte konvexe Kurve mit dem äußeren konformen Radius 1, dann gilt bei  $\varrho \equiv 1$  die Abschätzung  $\lambda_2 \geq 1/2$ .

**Beweis:** Das Äußere des Einheitskreises kann schlicht konform durch eine in  $\infty$  hydrodynamisch normierte Abbildung  $g$  auf das Äußere von  $\mathfrak{C}$  abgebildet werden. Nach einem Satz von Kellogg ist  $g'$  noch stetig auf den Rand fortsetzbar und nach H. Grötzsch (siehe etwa [13: S. 48]) gilt  $|g'(z) - 1| \leq |z|^{-2}$  für  $|z| \geq 1$ , woraus die Behauptung folgt ■

Hiermit sieht man nun leicht die Notwendigkeit, zwischen dem Eigenwert  $\lambda_{2n}$  des Außengebietes und  $\lambda_{2n+1}$  des Innengebietes zu unterscheiden. Dazu betrachten wir das

Beispiel 4: Es sei  $\mathcal{C}$  eine Ellipse in Mittelpunktslage mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ,  $a \geq b > 0$  und  $a + b = 2$ . Nach Satz 7 ist dann  $\lambda_{2a} \geq 1/2$ , während nach R. WEINSTOCK [18] (siehe auch bei C. BANDLE [1])  $\lambda_{2a} \leq 2\pi ab / (I_0 + I_{\pi/2})$  gilt. Insbesondere wird  $\lambda_{21}$  beliebig klein, wenn nur  $b$  hinreichend klein wird.

Zwischen dem äußeren und inneren Stekloffschen Eigenwert und dem ersten nichttrivialen Fredholmschen Eigenwert kann nun die folgende scharfe Abschätzung gezeigt werden.

Satz 8: Bezeichnet  $\lambda$  den ersten nichttrivialen Fredholmschen Eigenwert und  $\mathcal{C}$  eine Jordan-Kurve, die sich aus stückweise analytischen Teilen zusammensetzt, welche unter von Null verschiedenen Winkeln zusammenstoßen, so gilt bei  $\rho \equiv 1$  die Abschätzung

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leq \frac{\lambda_{2a}}{\lambda_{21}} \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \quad (20)$$

Beweis: Bekanntlich ist [17: S. 135]

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leq \frac{\iint_{\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy}{\iint_{\mathcal{C}\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy} \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (21)$$

(wobei  $\mathcal{C}\mathcal{G}$  wieder das endliche Innengebiet der Kurve  $\mathcal{C}$  bezeichnet) mit in der ganzen Ebene stetigen, sowohl in  $\mathcal{G}$  als auch in  $\mathcal{C}\mathcal{G}$  harmonischen und sonst beliebigen  $u$ . Eine beliebige in  $\mathcal{G}$  harmonische und in  $\mathcal{C}\mathcal{G}$  stetige Funktion  $u$  mit  $\int_{\mathcal{C}} u ds = 0$  kann harmonisch und stetig in  $\mathcal{C}\mathcal{G}$  fortgesetzt werden. Somit gilt mit (21) und (2) die Abschätzung

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \lambda_{21} \int_{\mathcal{C}} u^2 ds \leq \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \iint_{\mathcal{C}\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy \leq \iint_{\mathcal{G}} (\nabla u)^2 dx dy.$$

Damit folgt (21), da es genügt, sich auf in  $\mathcal{G}$  stetige  $u$  zu beschränken. Ist  $\mathcal{C}$  ein Kreis, so kann dieser als Einheitskreis angenommen werden. Hierfür gilt  $\lambda_{2a} = \lambda_{21} = 1$ ,  $\lambda = \infty$  [16], und die zugehörigen Eigenfunktionen sind  $\chi_{2a} = x|z|^{-2}$  in  $|z| \geq 1$ ,  $\chi_{21} = x$  in  $|z| \leq 1$ . Also geht  $\chi_{21}$  stetig in  $\chi_{2a}$  längs  $|z| = 1$  über ■

Während bis vor kurzem nur für wenige Kurven der erste nichttriviale Fredholmsche Eigenwert bekannt war, ist es jüngst R. KÜHNAU [12, 13] mittels u. a. quasikonformer Abbildungen gelungen, diesen für eine Vielzahl von Kurven zu berechnen (eine Übersicht über die Literatur zu dieser Thematik bis etwa 1962 findet sich in [5: Kap. I], für neuere Literatur vgl. [12, 13]). Mit Satz 7 hat man somit also unter Verwendung der Ergebnisse in [12, 13] sofort konkrete beidseitige Schranken für  $\lambda_{2a}/\lambda_{21}$ , die bei gebrochener linearer Transformation unverändert bleiben, da bekanntlich die Fredholmschen Eigenwerte diese Eigenschaft haben.

Für die Ellipse des Beispiels 4 ist  $\lambda = (a + b)/(a - b)$ , und Satz 7 liefert  $b/a \leq \lambda_{2a}/\lambda_{21} \leq a/b$  in Übereinstimmung mit der Bemerkung in Beispiel 4 betreffs  $b \rightarrow 0$ .

Ist die Kurve  $\mathcal{C}$  analytisch, so können mittels klassischer Verzerrungssätze beidseitige Schranken für Stekloffsche Eigenwerte erhalten werden, die für kreisnahe Kurven „gut“ sind: Dazu beweisen wir

Satz 9: Sei  $\mathcal{C}$  eine geschlossene analytische Jordan-Kurve, die als Bild von  $|z| = 1$  durch eine schlichte konforme Abbildung  $f(z) = z + a_1 z^{-1} + \dots$  in  $|z| \geq 1 - \gamma$  ( $0 < \gamma$

$\leq 1$ ) entsteht. Dann gilt bei  $\rho \equiv 1$  die Abschätzung

$$2\gamma - \gamma^2 \leq \lambda_{2a} \leq (2\gamma - \gamma^2)^{-1}. \tag{22}$$

Gleichheit tritt hierin genau dann ein, wenn  $\mathfrak{C}$  ein Kreis ist.

**Beweis:** Die Funktion

$$h(\zeta) = R^{-1}f(R\zeta), \quad R = 1 - \gamma, \quad \zeta = z/R$$

ist in der bekannten Abbildungsklasse  $\Sigma$  enthalten, erlaubt also die Anwendung des klassischen Löwnerschen Verzerrungssatzes

$$1 - R^2 |z|^{-2} = 1 - |\zeta|^{-2} \leq |h'(\zeta)| \leq (1 - |\zeta|^{-2})^{-1} = (1 - R^2 |z|^{-2})^{-1}.$$

Dies liefert sofort

$$2\gamma - \gamma^2 = 1 - R^2 \leq |f'(z)|_{|z|=1} \leq (1 - R^2)^{-1} = (2\gamma - \gamma^2)^{-1},$$

woraus (22) folgt. Das Gleichheitszeichen in der Löwnerschen Ungleichung steht bekanntlich nur für gewisse Schlitzgebiete und im Grenzfall  $\zeta = \infty$ , was dem Kreisfall entspricht ■

Entsprechend gilt für den inneren Eigenwert

**Satz 10:** Sei  $\mathfrak{C}$  eine geschlossene analytische Jordan-Kurve, die als Bild von  $|z| = 1$  durch eine schlichte konforme Abbildung

$$g(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

in  $|z| \leq R = 1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) entsteht. Dann gilt bei  $\rho \equiv 1$  die Abschätzung

$$\varepsilon^3(2 + \varepsilon)^{-1} (1 + \varepsilon)^{-2} \leq \lambda_{21} \leq (1 + \varepsilon) (2 + \varepsilon)^3 (1 + \varepsilon)^{-3} \varepsilon^{-1}. \tag{23}$$

Gleichheit tritt hierin genau dann ein, wenn  $\mathfrak{C}$  ein Kreis ist.

**Beweis:** Die Funktion  $h(\zeta) = R^{-1}g(\zeta R)$ ,  $\zeta = zR^{-1}$ , genügt dem Koebeschen Verzerrungssatz [14: S. 21]

$$\frac{1 - R^{-1}}{(1 + R^{-1})^3} = \frac{1 - |\zeta|}{(1 + |\zeta|)^3} \leq |g'(z)|_{|z|=1} = |h'(\zeta)| \leq \frac{1 + |\zeta|}{(1 - |\zeta|)^3} = \frac{1 + R}{(1 - R^{-1})^3 R},$$

woraus (23) folgt. Das Gleichheitszeichen steht wieder nur für gewisse Schlitze und im Falle  $\zeta = 0$ , was wieder dem Kreisfall entspricht ■

Schließlich soll noch eine scharfe Abschätzung zwischen innerem und äußerem Stekloffschen Eigenwert und dem inneren Abbildungsradius bewiesen werden.

**Satz 11:** Sei  $\mathfrak{C}$  eine stückweise analytische geschlossene Jordan-Kurve mit dem inneren Abbildungsradius  $a$ ,  $0 < a \leq 1$ , und dem äußeren Abbildungsradius 1. Dann gilt bei  $\rho \equiv 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & (\lambda_{2a} + \lambda_{21}) \int_{\mathfrak{C}} \left( \ln |z| ds - \frac{1}{L} \int_{\mathfrak{C}} \ln |z| ds \right)^2 ds \\ & \leq -2\pi \ln a \leq \left( \frac{1}{\lambda_{2a}} + \frac{1}{\lambda_{21}} \right) \int_{\mathfrak{C}} \left( \frac{\partial \ln |z|}{\partial s} \right)^2 ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Gleichheit tritt hierin genau dann ein, wenn  $\mathfrak{C}$  der Einheitskreis ist.

<sup>3)</sup>  $z(w) = aw + a_2 w^2 + \dots$  bildet das Innere des Einheitskreises schlicht konform auf das Innere von  $\mathfrak{C}$  ab.

Beweis: Ist  $z(w) = aw + a_2w^2 + \dots$ ,  $0 < a \leq 1$ , die schlicht konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das Innere von  $\mathbb{C}$ , dann gilt für  $u = \Re \log (w(z)/z)$  die Beziehung  $u|_{\mathbb{C}} = \Re \log \frac{w(z)}{z} \Big|_{\mathbb{C}} = -\ln |z|$ . Weiterhin ist im endlichen Innengebiet  $\mathbb{G}$  von  $\mathbb{C}$

$$\iint_{\mathbb{G}} (\nabla u)^2 dx dy = \iint_{\mathbb{G}} |F'(z)|^2 dx dy = \iint_{|w| < 1} |F'(w)|^2 d\xi d\eta$$

mit  $F(z) = \log (w(z)/z)$  und  $F(w) = \log (w/z(w))$ . Wir entwickeln  $F(w)$  für  $|w| < 1$  und erhalten  $F(w) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{0,-l} w^l$ . Damit folgt in der üblichen Weise

$$\iint_{\mathbb{G}} (\nabla u)^2 dx dy = \iint_{|w| < 1} |F'(w)|^2 d\xi d\eta = \pi \sum_{l=1}^{\infty} l |b_{0,-l}|^2.$$

Nach Addition einer Konstanten zu  $u$  liefert nun der Rayleigh-Quotient die Abschätzung

$$\lambda_{21} \int_{\mathbb{C}} \left( \ln |z| - \frac{1}{L} \int_{\mathbb{C}} \ln |z| ds \right)^2 ds \leq \pi \sum_{l=1}^{\infty} l |b_{0,-l}|^2. \quad (25)$$

Bildet nun  $z(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \dots$  das Gebiet  $|\zeta| > 1$  auf das Äußere von  $\mathbb{C}$  schlicht konform ab und ist  $\log (\zeta/z(\zeta)) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{0l}\zeta^{-l}$ , dann folgt analog die Abschätzung

$$\lambda_{2a} \int_{\mathbb{C}} \left( \ln |z| - \frac{1}{L} \int_{\mathbb{C}} \ln |z| ds \right)^2 ds \leq \pi \sum_{l=1}^{\infty} l |b_{0l}|^2. \quad (26)$$

Addition beider Abschätzungen (25) und (26) bringt unter Verwendung der Beziehung  $\sum_{l=1}^{\infty} l(|b_{0l}|^2 + |b_{0,-l}|^2) = 2 \ln a^{-1}$  [14: S. 96] die linke Seite von (24). Der Beweis der rechten Seite folgt unter Verwendung von (3) ganz entsprechend ■

## LITERATUR

- [1] BANDLE, C.: Isoperimetric Inequalities and Applications. Boston—London—Melbourne: Pitman Publ. London 1980.
- [2] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. New York: Academic Press 1953.
- [3] DIAZ, J. B., and A. WEINSTEIN: Schwarz' inequality and the method of Rayleigh-Ritz and Trefftz. J. Math. and Phys. 26 (1947), 133—136.
- [4] EPSTEIN, B.: Some inequalities relating to conformal mapping upon canonical slit-domains. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 813—819.
- [5] GAIER, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.
- [6] GRÖTZSCH, H.: Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 84 (1932), 15—36.
- [7] HERSCH, J., PAYNE, L. E., and M. M. SCHIFFER: Some inequalities for Stekloff eigenvalues. Arch. Rat. Mech. Anal. 57 (1974), 99—114.
- [8] KLÖTZLER, R.: Globale Optimierung in der Steuerungstheorie. ZAMM 63 (1983), 305—312.
- [9] KRUSCHKAL, S. L., and R. KÜHNAU: Quasikonforme Abbildungen — neue Methoden und Anwendungen (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 54). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1983.

- [10] KÜHNAU, R.: Bemerkungen zu den Grunskyschen Gebieten. *Math. Nachr.* **44** (1970), 285—293.
- [11] KÜHNAU, R.: Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65** (1977), 299—303.
- [12] KÜHNAU, R.: Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven. *ZAMM* **66** (1986), 193—200.
- [13] KÜHNAU, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordan-Kurve (erscheint 1988).
- [14] POMMERENKE, Ch.: *Univalent functions*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1975.
- [15] SÁRIO, L., and K. OIKAWA: *Capacity functions*. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1969.
- [16] SCHIFFER, M. M.: The Fredholm eigenvalues of plane domains. *Pacific J. Math.* **7** (1957), 1187—1225.
- [17] SPRINGER, G.: Fredholm eigenvalues and quasikonformal mapping. *Acta math.* **111** (1964), 121—142.
- [18] STEKLOFF, M. W.: Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* **19** (1902), 455—490.
- [19] WEINSTOCK, R.: Inequalities for a classical eigenvalue problem. *J. Rat. Mech. Anal.* **3** (1954), 745—753.

Manuskripteingang: 11. 08. 1986

**VERFASSER:**

Dr. BODO DITTMAR  
Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „N. K. Krupskaja“  
Kröllwitzer Str. 44  
DDR-4050 Halle