Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (3) 1988, S. 263–276

Zur Anwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips bei distributiver Steuerung auf eine geometrische Aufgabenklasse

R. Klötzler

Es wird eine Erweiterung des Pontrjaginschen Maximumprinzips auf Steuerungsprobleme mit distributiver Steuerung vorgestellt und auf Optimierungsaufgaben zu konvexen ebenen Bereichen angewandt.

Предлагается расширение принципа максимума Понтрягина на проблемы управления с дистрибутивным управлением. Оно применяется к задачам оптимизации о плоских выпуклых областях.

Problems of optimal control are considered in which the control appears in distributional sense. For this a generalization of Pontryagin's maximum principle is provided and applicated on optimization problems to plane convex domains.

1. Einleitung

Die vielfältigen Anforderungen, die aus den zahlreichen Anwendungsgebieten an die Mathematik gestellt werden, haben auch die Steuerungstheorie zu ständiger Vervollkommnung gedrängt. Bei der Fundierung der Steuerungstheorie durch L. S. Pontrjagin und Mitarbeitern [11] bzw. durch M. R. Hestenes [3] wurden zunächst nur stückweise stetige Steuerungen in die Betrachtung einbezogen. Ein Hauptresultat derselben bildet das Pontrjaginsche Maximumprinzip als eine notwendige Optimalitätsbedingung. In den weiterführenden einschlägigen Darstellungen durch A. D. Joffe und W. M. Tichomirow [4] wurden bereits beschränkte summierbare Steuerungen zugelassen neben sehr allgemeinen Zustandsbeschränkungen. Dabei bleiben aber immer noch solche Prozesse ausgeschlossen, bei denen die Steuerung als kurzzeitiger kräftiger Impuls, z. B. durch Stoß oder Explosion hervorgerufen, in Erscheinung tritt. Mathematisch vermögen wir solche verallgemeinerte Steuerungen als gewisse Distributionen darzustellen, wir sprechen daher von „distributiven Steuerungen" (vgl. Abschnitt 2). Ist der Zeitpunkt t_0 ihres Wirkens von vornherein bekannt (z. B. beim Billard: der Zeitpunkt des Anstoßes, also der Anfangszeitpunkt der einzuleitenden Bewegung; in der Ballistik: der Zeitpunkt des Abfeuerns eines Geschosses), so kann letztlich die Intensität eines solchen Impulses als parametrische gewöhnliche Steuervariable aufgefaßt werden. Lediglich die Zustandsgleichungen enthalten dann als Koeffizienten spezielle Distributionen wie die Dirac-Funktion δ_{t_0} oder die Heaviside-Funktion χ_{t_0}. Steuerungsprobleme dieser Art wurden z. B. durch S. T. Sawališčin und A. N. Sesekin [12] studiert. Demgegenüber sollen nachfolgend solche Steuerungsprobleme vorgestellt werden, bei denen der Charakter der distributiven Steuergröße von vornherein noch offen bleibt einschließlich des „Zeitpunktes" ihres Wirkens. Beispiele dafür können wir etwa in der Steuerung des Zündvorgangs von Verbrennungsmotoren oder bei Zündung von Mehrstufenraketen sehen. Auch Bremsvorgänge ordnen sich in diese Betrachtungen ein. Im vorliegenden

Beitrag wird neben der Erweiterung des Pontrjaginschen Maximumprinzips auf distributive Steuerungen aber in erster Linie seine Anwendung auf elementargeometrische Fragestellungen im Mittelpunkt stehen.

2. Einige Grundbegriffe über Distributionen

Mit K^r bezeichnen wir hier den Grundraum aller auf dem E^1 definierten Funktionen mit kompaktem Träger, die dem Funktionenraum $W^{1,r}_{\infty,loc}$ angehören. Das heißt, sämtliche Elemente ψ von K^r sind r-vektorwertige finite Funktionen auf E^1, die auf jedem endlichen Intervall (a, b) beschränkt und summierbar sind und dort zugleich fast überall beschränkte summierbare verallgemeinerte Ableitungen (im Sinne von S. L. Sobolew [14]) besitzen.

Eine Folge $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Funktionen ψ_i aus K^r wird als Nullfolge bezeichnet, wenn ein endliches Intervall (a, b) existiert, so daß für alle $i \in \mathbf{N}$ und $t \notin (a, b)$ die Eigenschaft $\psi_i(t) = 0$ und die Konvergenz $\|\psi_i\|_{W^{1,r}_{\infty}(a,b)} \to 0$ für $i \to \infty$ gelten. Eine Folge $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ aus K^r heißt *konvergent* gegen die Grenzfunktion ψ aus K^r genau dann, wenn $\{\psi_i - \psi\}_{i=1}^{\infty}$ im vorangestellten Sinne eine Nullfolge bildet.

Gemäß L. Schwartz [13] bzw. I. M. Gelfand und G. E. Schilow [2] wird jedes bez. dieser in K^r formulierten Konvergenz lineare stetige Funktional $(\chi, \cdot)$ auf K^r als eine *Distribution* χ bezeichnet. Die Menge aller dieser Distributionen symbolisieren wir mit $\mathcal{D}(K^r)$. χ heißt eine *reguläre Distribution* von $\mathcal{D}(K^r)$, wenn eine L-summierbare r-vektorwertige Funktion g auf E^1 existiert mit

$$(\chi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^T \psi(t)\, dt \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^r. \tag{1}$$

Wir identifizieren dann g mit χ. Andernfalls heißt χ eine *singuläre Distribution* von $\mathcal{D}(K^r)$. Zum Beispiel die δ-Distribution δ_{t_0} mit $(\delta_{t_0}, \psi) = \psi(t_0)$ ist eine singuläre Distribution.

Ist χ eine reguläre Distribution, so bildet die durch die Vorschrift

$$(\chi', \psi) := -(\chi, \psi') \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^r \tag{2}$$

definierte Distribution χ' die *Ableitung* von χ. Eine Folge von Distributionen $\chi_i \in \mathcal{D}(K^r)$ *konvergiert* gegen den Limes $\chi_0 \in \mathcal{D}(K^r)$ genau dann, wenn

$$\lim_{i\to\infty} (\chi_i, \psi) = (\chi_0, \psi) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^r$$

ist. Eine Distribution $\chi \in \mathcal{D}(K^r)$ heißt *Null in einer Umgebung U von t_0*, wenn für jedes $\psi \in K^r$ mit $\psi(t) = 0$ für $t \notin U$ die Gleichung $(\chi, \psi) = 0$ gilt. Ein Punkt t_0 wird als *wesentlicher Punkt* von χ bezeichnet, wenn keine Umgebung U von t_0 existiert, in der χ gleich Null ist. Die Menge aller wesentlichen Punkte von χ heißt der *Träger* von χ, symbolisch supp χ. Für supp $\chi \subset [0, T]$ gebrauchen wir auch die formale Bezeichnung

$$\int_0^T \chi(t)\, \psi(t)\, dt := (\chi, \psi) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^r$$

und für $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in C^{1,r}(E^1)$

$$\int_0^T (\lambda\chi)(t)\, \psi(t)\, dt = (\lambda\chi, \psi) := (\chi, \tilde{\psi}). \tag{4}$$

mit

$$\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}^1, \ldots, \tilde{\psi}^r) \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}^i = \lambda_i \psi^i.$$

Speziell $\int_0^T (\lambda\chi)(t)\,dt$ bezeichnet den Wert des Funktionals (4) für solche $\psi \in K^r$ mit der Eigenschaft $\psi^i(t) = 1$ auf $[0, T]$ für $i = 1, \ldots, r$.

Im weiteren verwenden wir noch die Abkürzungen

$$K_+{}^r = \{\psi \in K^r \mid \psi(t) \geqq 0 \text{ für alle } t \in \mathbf{E}^1\}$$

sowie

$$\mathcal{D}_0(K^r) = \{\chi \in \mathcal{D}(K^r) \mid \operatorname{supp} \chi \subset [0, T]\}. \tag{5}$$

3. Probleme mit distributiver Steuerung

Nach Abschnitt 2 sind Distributionen und speziell distributive Steuerungen als lineare stetige Funktionale auf einem gewissen Grundraum K^r definiert. Daher ist zunächst von vornherein bei Steuerungsproblemen mit distributiver Steuerung u die Forderung der Linearität in u eine sachgemäße Einschränkung. Somit legen wir folgende Klasse von *distributiven Steuerungsproblemen* zugrunde:

$$F(x, u) := \int_0^T \left[f_0\big(t, x(t)\big) + f_1(t)\, u(t)\right] dt \to \text{Min} \tag{6a}$$

$$\text{bez.} \quad x \in L_2^{\mathrm{loc}, n} \subset \mathcal{D}(K^n), \qquad u \in \mathcal{D}_0(K^r)$$

unter der Zustandsgleichung

$$\dot{x} = \phi(t, x, u) \equiv A(t, x) + B(t)\, u \tag{6b}$$

[d. h. unter Beachtung von (2)

$$(-x, \dot{\psi}) = \big(\phi(\cdot, x, u), \psi\big) \text{ für alle } \psi \in K^n],$$

Steuerbeschränkung

$$(Cu, \psi) \leqq (b, \psi) \quad \text{für alle } \psi \in K_+{}^m, \tag{6c}$$

Zustandsbeschränkung

$$g_i\big(t, x(t)\big) \leqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \text{ f. ü. auf } [0, T] \tag{6d}$$

und linearen Randbedingung

$$c_0\big(x(0)\big) = 0, \qquad c_1\big(x(T)\big) = 0 \tag{6e}$$

[d. h. $\big(c_0(x), \psi\big) = 0$ für alle $\psi \in K^{s_0}$ mit $\psi(t) = 0$ für $t > 0$,

$\big(c_1(x), \psi\big) = 0$ für alle $\psi \in K^{s_1}$ mit $\psi(t) = 0$ für $t < T$].

Dabei fordern wir folgende

Grundvoraussetzung: (7)

$f_0: [0, T] \times \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^1$, $A: [0, T] \times \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, $g_i: [0, T] \times \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^1$ seien stetig und bez. des 2. Arguments stetig differenzierbar: $B: [0, T] \to \mathbf{E}^{nr}$ und $f_1: [0, T] \to \mathbf{E}^r$ sind stetig differenzierbar. B ist eine $(n \times r)$-Matrix vom Rang r, C ist eine konstante

$(m \times r)$-Matrix auf $[0, T]$, b ist ein konstanter m-Vektor auf $[0, T]$ und c_ν $(\nu = 0, 1)$ sind linear-affine Abbildungen des $\mathbf{E}^n$ in den $\mathbf{E}^{s_\nu}$. Außerhalb von $[0, T]$ denken wir uns die Abbildungen f_0, g_i, A, C, b durch ihre entsprechende Nullabbildung fortgesetzt.

Darüber hinaus stellen wir noch die

Zusatzvoraussetzung: (8)

Für jede Folge zulässiger Prozesse $\langle x_j, u_j\rangle$ von (6) mit $x_j \to x$ in $L_2{}^n(0, T)$ gelte

$$\begin{aligned} f_0(\cdot, x_j(\cdot)) &\to f_0(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{in } L_2(0, T), \\ A(\cdot, x_j(\cdot)) &\to A(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{in } L_2{}^n(0, T), \\ f_{0x}(\cdot, x_j(\cdot)) &\to f_{0x}(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{in } L_2{}^n(0, T), \\ A_x(\cdot, x_j(\cdot)) &\to A_x(\cdot, x(\cdot)) \quad \text{in } L_2^{n \cdot n}(0, T) \end{aligned}$$

sowie $x_j{}^k \to x^k$ in $W_2{}^1(0, T)$ zu allen jenen Komponenten $\varkappa$, für die ein i existiert mit $g_{ix^\varkappa} \not\equiv 0$.

In geringfügiger Verallgemeinerung der Darstellung und Beweisführung nach R. KLÖTZLER [5] gilt unter Grund- und Zusatzvoraussetzung (7) bzw. (8) dann folgender Satz.

Satz (*distributives Pontrjaginsches Maximumprinzip*): *Es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:*

1. *Zu jedem optimalen Prozeß $\langle x_*, u_*\rangle$ zu (6) gebe es eine Folge regulärer zulässiger Prozesse $\langle \hat{x}_j, \hat{u}_j\rangle$ mit*

$$\hat{x}_j \in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,n}, \quad \hat{u}_j \in L^{r,\mathrm{loc}} \quad \text{und} \quad \hat{x}_j \to x_* \text{ in } L_2{}^{n,\mathrm{loc}}, \quad \hat{u}_j \to u \text{ in } \mathcal{D}(K^r).$$

2. *F sei schwach unterhalbstetig auf $L_2{}^n \times L_2{}^r$ für alle zulässigen regulären Prozesse $\langle x, u\rangle$ von (6) mit $|u| \leqq M$ bei beliebig großem M. Die Menge dieser Prozesse sei nicht leer.*

Dann kann man eine Zahl $\lambda_0 \geqq 0$, Vektoren $l_\nu \in \mathbf{E}^{s_\nu}$ $(\nu = 0, 1)$, eine linksseitig stetige n-vektorwertige Funktion $y(\cdot)\colon [0, T] \to \mathbf{E}^n$ von beschränkter Variation sowie nichtnegative reguläre Maße μ_i $(i = 1, \ldots, k)$ auf $[0, T]$, welche konzentriert sind auf $T_i := \{t \in [0, T] \mid g_i(t, x_*(t)) = 0\}$, finden, die nicht alle gleichzeitig verschwinden und die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$\sup_{\substack{v \in L_\infty^r(0,T) \cap \mathcal{D}_0(K^r) \\ Cv(t) \leq b}} \big(H(\cdot, x_*(\cdot), v(\cdot), y(\cdot), \lambda_0), \psi\big)$$

$$= \big(H(\cdot, x_*(\cdot), u_*(\cdot), y(\cdot), \lambda_0), \psi\big) \quad \text{für alle } \psi \in K_+{}^1; \tag{9a}$$

$$y(t) = -c_1{}'^*(x_*(T))\, l_1$$
$$+ \int_t^T H_x(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau), y(\tau), \lambda_0)\, d\tau - \sum_{i=1}^k \int_t^T g_{ix}(\tau, x_*(\tau))\, d\mu_i(\tau); \tag{9b}$$

$$y(0) = c_0{}'^*(x_*(0))\, l_0. \tag{9c}$$

Hierbei ist H die Pontrjaginsche Funktion zu (6) und $c_\nu{}'^*$ die transponierte Matrix zur Jacobischen Funktionalmatrix $c_\nu{}'$ zu c_ν.

Die weitgehende Analogie dieser Aussage zu Theorem 2 von [5] — dort wurde zum Unterschied $A(t, \cdot)$ linear vorausgesetzt — erlaubt uns hier einen Verzicht auf explizite Beweisführung unseres Satzes ∎

4. Eine geometrische Aufgabenklasse mit distributiver Steuerung

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß viele geometrische Optimierungsaufgaben über ebene konvexe beschränkte Bereiche grundsätzlich der vorangestellten Theorie zugänglich gemacht werden können.

Zur Beschreibung ebener konvexer beschränkter Bereiche $\mathfrak{B}$ führten H. Minkowski [8], [9] und W. Blaschke [1] den wichtigen Begriff der *Stützfunktion* h zu $\mathfrak{B}$ ein: $h(\varphi)$ ist gemäß Abbildung 1 zu vorgegebenem Richtungsvektor $\mathfrak{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ und Nullpunkt 0 definiert als (signierter) Abstand der zu $\mathfrak{e}(\varphi)$ orthogonalen Stützgeraden $\mathfrak{g}$ vom Nullpunkt 0; analytisch präzisiert heißt das $h(\varphi) := \operatorname{Max} \{\xi^T \mathfrak{e}(\varphi) : \xi \in \mathfrak{B}\}$.

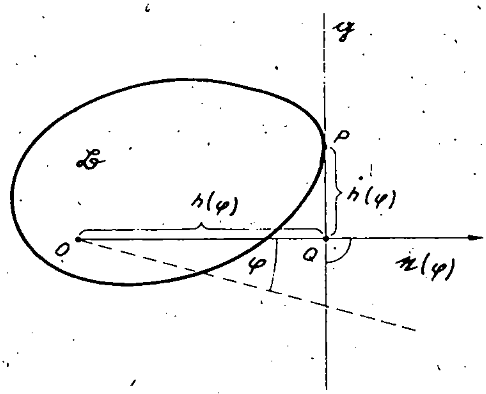

Abb. 1

Falls $\mathfrak{B}$ streng konvex ist, gehört h zum Sobolew-Raum $W_1{}^2(0, 2\pi)$; h ist außerdem 2π-periodisch und fast überall gilt

$$\ddot{h}(\varphi) + h(\varphi) = \varrho(\varphi) \geqq 0. \tag{10}$$

Umgekehrt ist jedes h dieser Eigenschaften Stützfunktion eines streng konvexen Bereichs $\mathfrak{B}$. $\varrho(\varphi)$ gemäß (10) ist übrigens gerade der Krümmungsradius von $\partial\mathfrak{B}$ im Berührungspunkt P von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{B}$. Dessen (signierter) Abstand von Q (als Schnittpunkt des Strahls der Richtung $\mathfrak{e}(\varphi)$ mit $\mathfrak{g}$) beträgt $\dot{h}(\varphi)$.

Falls jedoch $\mathfrak{B}$ konvex aber nicht streng konvex ist, gehört h lediglich dem $W^1_\infty(0, 2\pi)$ an und $\ddot{h}$ bzw. ϱ gemäß (10) können dann nur im distributiven Sinne korrekt interpretiert werden. Danach ist entsprechend (2) die Distribution $\ddot{h}$ definiert durch

$$(\ddot{h}, \psi) := -(\dot{h}, \dot{\psi}) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^1 \tag{11a}$$

und die Distribution des Krümmungsradius ϱ durch

$$(\varrho, \psi) := -(\dot{h}, \dot{\psi}) + (h, \psi) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^1. \tag{11b}$$

Die frühere Konvexitätsforderung $\varrho \geqq 0$ von (10) äußert sich jetzt mit $u = \varrho$ in der Gestalt (6c) als $(\varrho, \psi) \geqq 0$ für alle $\psi \in K_+{}^1$. Umgekehrt repräsentiert jede 2π-

periodische Funktion $h \in W^1_\infty(0, 2\pi)$, die im Sinne von (11 b) die Forderung $(\varrho, \psi) \geqq 0$ für alle $\psi \in K_+{}^1$ erfüllt, die Stützfunktion eines ebenen beschränkten konvexen Bereichs $\mathfrak{B}$. Ist die Distribution ϱ in einer Umgebung U des Punktes t_0 gleich Null, so besagt dies, daß sämtliche Stützgeraden $\mathfrak{g}$, welche orthogonal zu einem $\mathfrak{e}(\varphi)$ mit $\varphi \in U$ sind, $\mathfrak{B}$ in ein und demselben Eckpunkt P berühren. Berührt umgekehrt die zu $\mathfrak{e}(t_0)$ orthogonale Stützgerade $\mathfrak{g}$ den Bereich $\mathfrak{B}$ nicht in einem Eckpunkt, so muß folglich t_0 ein wesentlicher Punkt der Distribution ϱ sein.

Setzen wir $x^1 = h$, $x^2 = \dot{h}$, so geht (10) in das (Teil-)System von Zustandsgleichungen (6b) der Gestalt $\dot{x}^1 = x^2$, $\dot{x}^2 = -x^1 + u$ über; dazu können (je nach Besonderheit der entsprechenden geometrischen Aufgabe) freilich noch weitere Zustandsfunktionen x^i $(i > 2)$ und Zustandsgleichungen auftreten. Auf jeden Fall aber ist hier wegen $\dot{x}^1 = x^2$ die letzte Forderung von Zusatzvoraussetzung (8) garantiert erfüllt, wenn die g_i allein von x^1 abhängen.

Beispiele von geometrisch relevanten Funktionalen F, welche die Voraussetzung 2 des Satzes erfüllen, sind nach W. Blaschke [1] der

$$\text{Umfang von } \mathfrak{B}\colon\quad \mathfrak{L}(\partial\mathfrak{B}) = \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} x^1(\varphi)\, d\varphi$$

und der

$$\text{Flächeninhalt von } \mathfrak{B}\colon\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{B}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (h^2 - \dot{h}^2)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(x^1)^2 - (x^2)^2]\, d\varphi .$$

Für diese gelten natürlich auch alle einschlägigen Bedingungen von Zusatzvoraussetzung (8).

Schließlich ergibt sich die Bestätigung der Voraussetzung 1 unseres Satzes bei geometrischen Optimierungsaufgaben zu konvexen Bereichen stets dann, wenn jeder zulässige beschränkte konvexe Bereich $\mathfrak{B}$ als Grenzelement einer Folge zulässiger streng konvexer Bereiche $\mathfrak{B}_j$ in Hausdorffscher Metrik darstellbar ist. Hat nämlich $\mathfrak{B}$ die Stützfunktion h und $\mathfrak{B}_j$ die Stützfunktion h_j, so bedeutet dies nach [1] $h_j \to h$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz auf $[0, 2\pi]$. Da wegen der gleichmäßigen Beschränktheit aller $\mathfrak{B}_j$ zugleich auch die Folge der $\dot{h}_j$ und damit $\|\dot{h}_j\|_{L_2(0,2\pi)}$ beschränkt ist, existiert in $L_2(0, 2\pi)$ eine schwach konvergente Teilfolge $\dot{h}_{j'} \rightharpoonup \omega$. Für beliebiges $\psi \in K^1$ und 2π-periodisch fortgesetztes ω ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\psi\, dt = \lim_{j'\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_{j'}\psi\, dt = \lim_{j'\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-h_{j'}\dot{\psi})\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} h\dot{\psi}\, dt .$$

Das bedeutet gemäß (2) $\omega = \dot{h}$. Da aber wie erwähnt $\mathfrak{F}$ ein stetiges Funktional mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_{j'}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ für $j' \to \infty$ ist, gilt auch $\|\dot{h}_{j'}\|^2_{L_2(0,2\pi)} \to \|\dot{h}\|^2_{L_2(0,2\pi)}$ für $j' \to \infty$. Diese Eigenschaft in Verbindung mit $\dot{h}_{j'} \rightharpoonup \dot{h}$ bedingt aber bekanntlich sogar $\dot{h}_{j'} \to \dot{h}$ in $L_2(0, 2\pi)$. Nach (11) gilt dann natürlich auch mit $\ddot{h}_{j'} + h_{j'} = u_{j'}$ und $\ddot{h} + h = u$ die Konvergenz $u_{j'} \to u$ in $\mathcal{D}(K^1)$.

Wir beenden diese grundsätzlichen Überlegungen noch mit dem Hinweis, daß ohne zusätzliche Nebenbedingungen nach H. Minkowski [9] jeder beschränkte konvexe Bereich des $\mathbf{E}^n$ in Hausdorffscher Metrik durch streng konvexe Bereiche beliebig genau approximiert werden kann.

5. Beispiele

Wir werden hier das oben formulierte distributive Pontrjaginsche Maximumprinzip auf zwei spezielle Probleme der geometrischen Aufgabenklasse von Abschnitt 4 anwenden.

Aufgabe 1: *Bestimme den kürzesten konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$, der von einem vorgegebenen Startpunkt A mit vorgegebener Startrichtung ausgeht, in einen Zielpunkt B mit vorgegebener Zielrichtung einmündet und nach oben beschränkte Krümmung aufweist.*

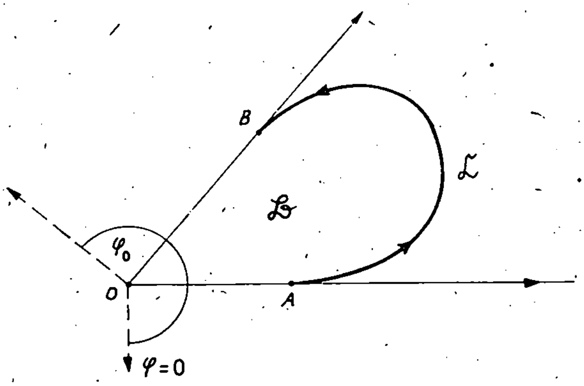

Abb. 2

Wir behandeln diese Aufgabe in Anlehnung an Abbildung 2. Wir setzen dabei $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ voraus und $0 < m \leqq \tan[(\varphi_0 - \pi)/2] \cdot \operatorname{Min}(|\overline{OA}|, |\overline{OB}|)$. Die obere Schranke der Krümmung sei $1/m$. Die Startrichtung sei die des Strahles $\overrightarrow{OA}$, die Zielrichtung sei die des Strahles $\overrightarrow{BO}$. Da ein konvexer Kurvenbogen als Randstück eines konvexen Bereiches in E^2 erklärt ist, können wir in unserem Falle $\mathfrak{C}$ als Randstück jenes Bereiches $\mathfrak{B}$ auffassen, der von $\mathfrak{C}$ und den Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ berandet wird. Die Stützfunktion zu $\mathfrak{B}$ sei h, so daß

$$\mathfrak{L}(\partial\mathfrak{B}) = \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\varphi_0} h(\varphi)\, d\varphi + \int_{\varphi_0}^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi \tag{12}$$

ist. Dabei ist h in $[\varphi_0, 2\pi]$ festgelegt durch die Schenkel $\overline{OB}$, $\overline{OA}$; im Intervall $[0, \varphi_0]$ ist h hingegen noch weitgehend willkürlich durch die spezielle Wahl von $\mathfrak{C}$ bedingt. $\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$ zu minimieren bedeutet damit zugleich $\mathfrak{L}(\partial\mathfrak{B})$ zu minimieren bzw. nach (12), die Lösung des nachstehenden distributiven Steuerungsproblems zu ermitteln:

$$\int_0^{\varphi_0} h(\varphi)\, d\varphi \to \operatorname{Min} \tag{13a}$$

unter der distributiven Nebenbedingung

$$\ddot{h} + h = \varrho, \tag{13b}$$

der distributiven Steuerbeschränkung

$$\varrho \geqq m > 0 \tag{13c}$$

und den Randbedingungen

$$h(0) = h(\varphi_0) = 0, \qquad \dot{h}(0+0) = a, \qquad \dot{h}(\varphi_0 - 0) = -b \tag{13d}$$

mit $a := |\overline{OA}|$ und $b := |\overline{OB}|$. Mit $x^1 = h$, $x^2 = \dot{h}$, $u = \varrho$ lautet unser distributives Steuerungsproblem in der Standardform (6) wie folgt:

$$\int_0^{\varphi_0} x^1(t)\,dt \to \text{Min} \quad \text{bez. } x \in L_2^{\text{loc},2}, \qquad u \in \mathcal{D}_0(K^1) \tag{14a}$$

unter den Zustandsgleichungen

$$\dot{x}^1 = \varkappa x^2, \qquad \dot{x}^2 = -\varkappa x^1 + u, \tag{14b}$$

der Steuerrestriktion

$$(u, \psi) \geqq (m\varkappa, \psi) \quad \text{für alle } \psi \in K_+^1 \tag{14c}$$

und Randbedingungen

$$x^1(0) = x^1(\varphi_0) = 0, \qquad x^2(0+0) = a, \qquad x^2(\varphi_0 - 0) = -b. \tag{14d}$$

Dabei ist $\varkappa$ die charakteristische Funktion zum Intervall $[0, \varphi_0]$.

Hier lautet die Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi, v, y, \lambda_0) := -\lambda_0\xi^1\varkappa + y_1\xi^2\varkappa + y_2(-\xi^1\varkappa + v). \tag{15}$$

Nach Abschnitt 4 sind in diesem Beispiel die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt, denn es läßt sich selbstverständlich $\mathfrak{B}$ stets durch zulässige streng konvexe Bereiche in Hausdorffscher Metrik beliebig genau so approximieren, daß A und B auch für diese Randpunkte bleiben und die Geraden durch $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ Stützgeraden.

Ist $\langle x_*, u_*\rangle$ optimaler Prozeß zu (14), so existieren nach obigem Satz nicht gleichzeitig verschwindende Konstanten $\lambda_0 \geqq 0$, l_0^i, l_1^i $(i = 1, 2)$ und linksseitig stetige Funktionen y_1, y_2 von beschränkter Variation, so daß das Pontrjaginsche Maximumprinzip wie folgt lautet (im Sinne von (9)):

$$\sup_{\substack{v \in L_\infty(0,\varphi_0) \cap \mathcal{D}_0(K^1) \\ v \geqq m\varkappa}} \big([-\lambda_0 x_*^1\varkappa + y_1 x_*^2\varkappa + y_2(-x_*^1\varkappa + v)], \psi\big)$$

$$= \big([-\lambda_0 x_*^1\varkappa + y_1 x_*^2\varkappa + y_2(-x_*^1\varkappa + u_*)], \psi\big) \quad \text{für alle } \psi \in K_+^1; \tag{16a}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= -l_1^1 + \int_t^{\varphi_0} \big(-\lambda_0 - y_2(\tau)\big)\,d\tau \\ y_2(t) &= -l_1^2 + \int_t^{\varphi_0} y_1(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} \text{ in } [0, \varphi_0], \tag{16b}$$

$$y_1(0) = l_0^1, \qquad y_2(0) = l_0^2. \tag{16c}$$

Wir denken uns dabei die y_i über $[0, \varphi_0]$ hinaus stetig und konstant fortgesetzt.

Die Bedingung (16a) ist offensichtlich äquivalent mit

$$\sup_{\substack{v \in L_\infty(0,\varphi_0) \cap \mathcal{D}_0(K^1) \\ v \geqq m\varkappa}} \int_0^{\varphi_0} y_2(\tau)\, v(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau$$

$$= (y_2 u_*, \psi) = (y_2[\dot{x}_*^2 + \varkappa x_*^1], \psi)$$

$$= (y_2\varkappa x_*^1, \psi) - \big(x_*^2, (y_2\psi)'\big) \quad \text{für alle } \psi \in K_+^1. \tag{16'a}$$

Daraus folgt notwendig

$$y_2(\tau) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad \tau \in [0, \varphi_0]. \tag{17}$$

Gäbe es nämlich ein $\tau_0 \in [0, \varphi_0]$ mit $y_2(\tau_0) > 0$, so wäre für diese nach (16b) stetig differenzierbare Funktion y_2 auch noch in einer ε-Umgebung U_ε von τ_0 die Eigenschaft $y_2(\tau) > 0$ erfüllt. Setzen wir speziell $\psi(\tau) > 0$ in U_ε und $\psi(\tau) = 0$ für alle $\tau \notin U_\varepsilon$, so ergäbe die linke Seite von (16'a) den Wert $+\infty$ im Widerspruch zur Endlichkeit der rechten Seite. Weiterhin erkennen wir aus (16'a)

$$(y_2 u_*, \psi) = (y_2 m\varkappa, \psi) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1$$

bzw.

$$(u_* - m\varkappa, y_2\psi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1. \tag{18}$$

Somit ist die Distribution $u_* - m\varkappa$ in einer Umgebung aller jener Punkte t von $[0, \varphi_0]$ gleich Null, wo $y_2(t) < 0$ ist. Wesentliche Punkte von $u^* - m$ können somit auf $[0, \varphi_0]$ lediglich die Nullstellen von y_2 sein. Wegen $y_1 = -\dot{y}_2$ gilt nach (16'a) und (18)

$$(y_2\varkappa[x_*^1 - m], \psi) + (x_*^2, y_1\psi) - (x_*^2 y_2, \dot{\psi}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1. \tag{19}$$

Wählen wir für ein festes $t_0 \in (0, \varphi_0)$ speziell

$$\psi(t) = n \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } |t - t_0| > \dfrac{1}{n}, \\ t - \left(t_0 - \dfrac{1}{n}\right) & \text{für } t_0 - \dfrac{1}{n} \leqq t \leqq t_0, \\ -t + \left(t_0 + \dfrac{1}{n}\right) & \text{für } t_0 \leqq t \leqq t_0 + \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

so erhalten wir aus (19) nach Grenzübergang $n \to \infty$ unter Beachtung der Stetigkeit von y_2 die Gleichung

$$[x_*^2(t_0 - 0) - x_*^2(t_0 + 0)]\, y_2(t_0) = 0: \tag{20}$$

Daraus entnehmen wir, daß an allen Stellen t_0 des Intervalls $(0, \varphi_0)$, wo $y_2(t_0) < 0$ ist, x_*^2 stetig sein muß. Unstetigkeitsstellen von x_*^2 können also lediglich an Nullstellen von y_2 auftreten.

Aus (16b) folgt nach Differentiation und Elimination von y_1 die Differentialgleichung

$$\ddot{y}_2 + y_2 = -\lambda_0. \tag{21}$$

Wäre $\lambda_0 = 0$, so kann wegen $\varphi_0 > \pi$ eine der Bedingung (17) genügende Lösung von (21) nur die Funktion $y_2 \equiv 0$ sein. Dieses impliziert nach (16b) $y_1 \equiv 0$ sowie $l_0 = l_1 = 0$ im Widerspruch zum Pontrjaginschen Maximumprinzip, welches garantiert, daß alle diese Konstanten und Funktionen nicht gleichzeitig Null sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir somit $\lambda_0 = 1$ annehmen. Dafür hat jede der Bedingung (17) genügende Lösung von (21) höchstens eine Nullstelle im Intervall $(0, \varphi_0)$, da y_2 vom Typus $y_2 = -1 + c_1 \cos t + c_2 \sin t$ (mit $c_j = \text{const}$, $j = 1, 2$) ist.

Das heißt zusammengefaßt, es gibt höchstens eine Stelle $t_0 \in (0, \varphi_0)$, in der $u_* - m$ wesentlich ist; oder geometrisch interpretiert: die optimale Kurve $\mathfrak{C}^*$ zu Aufgabe 1 besteht aus Kreisbögen vom Radius m und höchstens einem Geradenstück mit der Normalenrichtung $e = (\cos t_0, \sin t_0)^{\mathsf{T}}$. Wir stellen diese beiden Lösungsarten in Abbildung 3 dar:

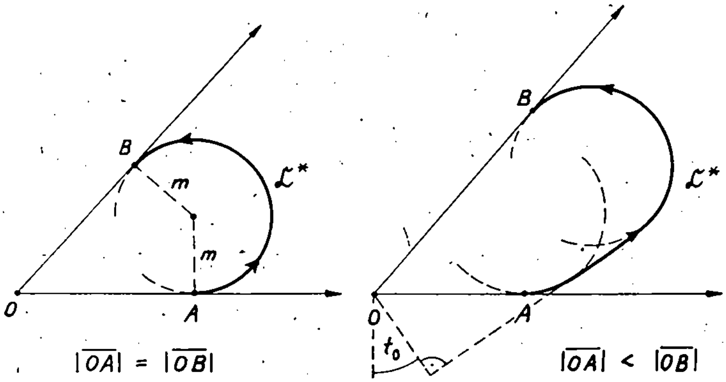

Abb. 3

Aufgabe 2 (Kürzeste „universale Rettungskurven"): *Nach einer von* R. KLÖTZLER *bereits in* [6], [7] *vorgestellten Darlegung wurde dieses Problem dort mittels Methoden der Dualität bei Steuerungsproblemen gelöst. Es soll hier gezeigt werden, daß auch das distributive Pontrjaginsche Maximumprinzip eine effektive Lösungsmethode zu diesem Problem bildet.*

Nach [6] ist obige Fragestellung zu folgendem geometrischen Optimierungsproblem äquivalent:

> Finde zu vorgegebener Konstanten $\Delta_0 > 0$ einen konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ kleinster Länge, dessen konvexe Hülle eine Dicke $\Delta(\operatorname{conv}\mathfrak{C}) \geqq \Delta_0$ besitzt.

Nach [6] Formel (4) entspricht diese Fragestellung unter Verwendung der Stützfunktion h zu $\operatorname{conv}\mathfrak{C}$ dem folgenden distributiven parametrischen Steuerungsproblem:

$$\int_0^\pi h(t)\,dt \to \text{Min} \tag{22a}$$

unter der distributiven Nebenbedingung

$$\ddot{h} + h = \varrho, \tag{22b}$$

der distributiven Steuerbeschränkung

$$\varrho \geqq 0, \tag{22c}$$

der Zustandsrestriktion (zu freiem Parameter α)

$$h(t) + \alpha\,|\cos t| \geqq \Delta_0 \quad \text{für alle} \quad t \in [0, \pi] \tag{22d}$$

und den Randbedingungen

$$h(0) = h(\pi) = \alpha, \qquad \dot{h}(0) = \dot{h}(\pi) = 0. \tag{22e}$$

Mit $x^1 = h$, $x^2 = \dot{h}$, $x^3 = \alpha$, $u = \varrho$ lautet dieses Problem in der standardisierten Form (6) wie folgt:

$$\int_0^\pi x^1(t)\,dt \to \text{Min} \quad \text{bez.} \; x \in L_2^{\text{loc},3}, \qquad u \in \mathcal{D}_0(K^1) \tag{23a}$$

unter den Zustandsgleichungen

$$\dot{x}^1 = x^2\varkappa, \quad \dot{x}^2 = -\varkappa x^1 + u, \quad \dot{x}^3 = 0, \tag{23b}$$

der Steuerrestriktion

$$(u, \psi) \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1, \tag{23c}$$

der Zustandsrestriktion

$$g\big(t, x(t)\big) := \Delta_0 - x^1(t) - x^3 \,|\cos t| \leqq 0 \quad \text{in } [0, \pi] \tag{23d}$$

und den Randbedingungen

$$x^1(0) = x^3(0), \quad x^1(\pi) = x^3(\pi), \quad x^2(0) = 0 = x^2(\pi). \tag{23e}$$

Dabei ist hier $\varkappa$ die charakteristische Funktion zum Intervall $[0, \pi]$.

Offensichtlich erfüllt hier g gemäß (23d) auch die am Ende der Zusatzvoraussetzung (8) genannte Bedingung (obwohl g jetzt nicht nur von x^1 abhängt). Denn konvergiert zu einer Folge zulässiger Prozesse $\langle x_j, u_j\rangle$ von (23) x_j in $L_2{}^3(0, \pi)$ gegen x, so gilt nach (23b) $x_j{}^1 \to x^1$ in $W_2{}^1(0, \pi)$ und wegen $\dot{x}_j{}^3 = 0$ auch $x_j{}^3 \to x^3$ in $W_2{}^1(0, \pi)$. Alle weiteren Überlegungen zur Anwendbarkeit unseres Satzes auf Problem (23) schließen sich den generellen Diskussionen von Abschnitt 4 an.

Zu Problem (23) lautet die Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi, v, y, \lambda_0) := -\lambda_0\varkappa\xi^1 + y_1\varkappa\xi^2 + y_2(-\varkappa\xi^1 + v) + y_3 0. \tag{24}$$

Ist nun $\langle x_*, u_*\rangle$ optimaler Prozeß zu (23), so existieren nach obigem Satz nicht gleichzeitig verschwindende Konstanten $\lambda_0 \geqq 0$, $l_0{}^i$, $l_1{}^i$ $(i = 1, 2)$, linksseitig stetige Funktionen y_1, y_2, y_3 von beschränkter Variation sowie ein nichtnegatives reguläres, auf $T_1 := \big\{t \in [0, \pi] \mid g\big(t, x_*(t)\big) = 0\big\}$ konzentriertes Maß μ, so daß das Pontrjaginsche Maximumprinzip wie folgt lautet (im Sinne von (9)):

$$\sup_{\substack{v \in L_\infty(0,\pi)\cap\mathcal{D}_*(K^1)\\ v \geqq 0}} \big([-\lambda_0 x_*{}^1\varkappa + y_1 x_*{}^2\varkappa + y_2(-x_*{}^1\varkappa + v)], \psi\big)$$

$$= \big([-\lambda_0 x_*{}^1\varkappa + y_1 x_*{}^2\varkappa + y_2(-x_*{}^1\varkappa + u_*)], \psi\big) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1; \tag{25a}$$

$$y_1(t) = -l_1{}^1 + \int_t^\pi \big(-\lambda_0 - y_2(\tau)\big)\,d\tau - \int_t^\pi (-1)\,d\mu(\tau), \tag{25b}$$

$$y_2(t) = -l_1{}^2 + \int_t^\pi y_1(\tau)\,d\tau,$$

$$y_3(t) = l_1{}^1 - \int_t^\pi (-|\cos\tau|)\,d\mu(\tau) \quad \text{für alle} \quad t \in [0, \pi];$$

$$y_1(0) = l_0{}^1, \quad y_2(0) = l_0{}^2, \quad y_3(0) = -l_0{}^1. \tag{25c}$$

Wir denken uns dabei die y_i über $[0, \pi]$ hinaus stetig und konstant fortgesetzt.

Die Bedingung (25a) ist offensichtlich äquivalent mit

$$\sup_{\substack{v \in L_\infty(0,\pi)\cap\mathcal{D}_*(K^1)\\ v \geqq 0}} \int_0^\pi y_2(\tau)\, v(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau$$

$$= (y_2 u_*, \psi) = (y_2[\dot{x}_*{}^2 + \varkappa x_*{}^1], \psi)$$

$$= (y_2\varkappa x_*{}^1, \psi) - \big(x_*{}^2, (y_2\psi)'\big) \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1. \tag{25'a}$$

Analog zu (17) folgt daraus notwendig

$$y_2(\tau) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad \tau \in [0, \pi]. \tag{26}$$

Weiterhin erkennen wir aus (25′a) — analog zu (18) —

$$(u_*, y_2\psi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \psi \in K_+^1. \tag{27}$$

Wesentliche Punkte von u_* können somit auf $[0, \pi]$ lediglich die Nullstellen von y_2 sein. In Analogie zu (18) erhalten wir weiterhin aus (27) die Bedingung (20), die wiederum besagt, daß Unstetigkeitsstellen von x_*^2 auf $[0, \pi]$ lediglich an Nullstellen von y_2 auftreten können. Wir beachten weiterhin, daß wir nach [4], S. 28/29 von vornherein in (25 b) μ auch als rechtsseitig stetige Funktion von beschränkter Variation auffassen können. Diese wiederum läßt sich nach [10], S. 239/240 als Summe einer stetigen Funktion γ und einer Sprungfunktion s darstellen.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen bestätigt man leicht, daß das folgende Funktionensystem (und nur dieses) den Bedingungen (25) und (23 b—e) genügt:

$$\lambda_0 = 1,$$

$$x_*^1(t) = \begin{cases} c \cos t & \text{in } [0, \tau_1] \\ \Delta_0 - c \cos t & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \\ \Delta_0 \sin t & \text{in } [\tau_2, \pi/2] \end{cases} \quad \text{mit } x_*^1(\pi - t) = x_*^1(t),$$

$$x_*^2(t) = \dot{x}_*^1(t),$$

$$x_*^3(t) = c = \text{const}^{1)};$$

$$(u_*, \psi) = (\varkappa x_*^1, \psi) - (x_*^2, \psi') \quad \text{für alle} \quad \psi \in K^1;$$

$$y_1(t) = -\dot{y}_2(t),$$

$$y_2(t) = \begin{cases} -1 + \cos(t - \tau_1) & \text{in } [0, \tau_1] \\ 0 & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \\ -1 + \cos(t - \tau_2) & \text{in } [\tau_2, \pi/2] \end{cases} \quad \text{mit } y_2(\pi - t) = y_2(t),$$

$$y_3(t) = -y_1(\pi) + \int_t^\pi |\cos \tau| \, d\gamma(\tau);$$

$$\mu(t) = s(t) + \gamma(t) \quad \text{mit} \quad s(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \pi/2) \\ 2 \cos \tau_2 & \text{in } [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \tau_1] \\ t - \tau_1 & \text{in } [\tau_1, \tau_2] \\ \tau_2 - \tau_1 & \text{in } [\tau_2, \pi - \tau_2] \\ t + 2\tau_2 - \tau_1 - \pi & \text{in } [\pi - \tau_2, \pi - \tau_1] \\ 2(\tau_2 - \tau_1) & \text{in } [\pi - \tau_1, \pi]. \end{cases}$$

Dabei errechnen sich τ_1, τ_2 und c (mit $0 < \tau_1 < \tau_2 < \pi/2$) aus den folgenden Bedingungen (28 a—c).

Aus (25) resultiert

$$y_1(0) + y_3(0) = 0 = \int_0^\pi [-1 - y_2(\tau)] \, d\tau + \int_0^\pi d\mu(\tau) + \int_0^\pi |\cos(\tau)| \, d\mu(\tau)$$

---

1) Außerhalb von $[0, \pi]$ denken wir uns dabei diese Zustandsfunktionen stetig und konstant festgesetzt.

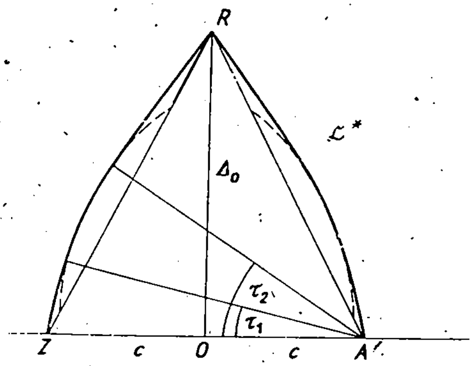

Abb. 4

und ausgerechnet

$$2 \sin \tau_1 = \sin \tau_2 . \tag{28a}$$

Aus der Stetigkeitsforderung von x_*^1 in $t = \tau_1$ resultiert

$$2c \cos \tau_1 = \Delta_0 . \tag{28b}$$

Aus der Stetigkeitsforderung von x_*^1 in $t = \tau_2$ resultiert

$$\Delta_0 - c \cos \tau_2 = \Delta_0 \sin \tau_2 . \tag{28c}$$

Die weitere Berechnung von τ_1, τ_2 und c erfolgt dann wie in [6]. Danach ist geometrisch interpretiert die gesuchte optimale Kurve $\mathfrak{C}^*$ zu Aufgabe 2 durch die Vereinigung der zwei kongruenten Schenkel $\widehat{AR}$ und $\widehat{RZ}$ des abgebildeten Yamanouti-Dreiecks (vgl. Abbildung 4) gegeben.

LITERATUR

[1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig: Teubner-Verlag 1916.
[2] Гельфанд, И. М., и Г. Е. Шилов: Обобщенные функции I. Москва: Физматгиз 1959.
[3] Hestenes, M. R.: Calculus of Variations and Optimal Control Theory. New York—London—Sidney: John Wiley & Sons 1966.
[4] Иоффе, А. Д., и В. М. Тихомиров: Теория экстремальных задач. Москва: Изд-во Наука 1974.
[5] Klötzler, R.: On a distributional version of Pontryagin's maximum principle. Optimization 19 (1988), 1—7.
[6] Klötzler, R.: Universale Rettungskurven I. Z. Anal. Anw. 5 (1986), 27—38.
[7] Klötzler, R., und S. Pickenhain: Universale Rettungskurven II. Z. Anal. Anw. 6 (1987), 363—369.
[8] Minkowski, H.: Theorie der konvexen Körper. In: Ges. Abh. 2. Leipzig: Teubner-Verlag 1911, S. 131—229.
[9] Minkowski, H.: Volumen und Oberfläche. Math. Ann. 57 (1903), 447—495.
[10] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin: Akademie-Verlag 1954.
[11] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., и Е. Ф. Мищенко: Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Физматгиз 1961.

[12] Завалищин, С. Т., и А. Н. Сесекин: Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества. Дифф. ур-ия **11** (1975), 665—671.
[13] Schwartz, L.: Théorie des distributions, I et II. Paris: Hermann 1950 et 1951.
[14] Sobolew, L. S.: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag 1964.

Manuskripteingang: 14. 07. 1987

VERFASSER:

Prof. Dr. Rolf Klötzler
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz
DDR-7010 Leipzig